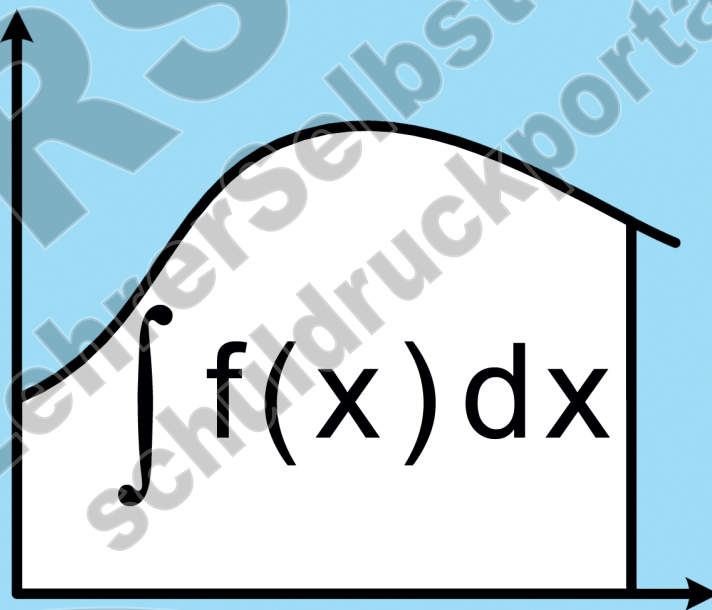


Integralrechnung

selbstorganisiert erlernen



Ursula Pirkel

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Alle Rechte vorbehalten. All rights reserved.
Nachdruck, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
die sich aus §§ 53 ff. UrhG nicht gestattet.

LehrerSelbstVerlag
Solling (Germany) 2014
www.f-druck.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Integralrechnung selbstorganisiert lernen

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de



Kapitel

Rand- und Flächeninhalts

Einführung in die Integralrechnung

Kapitel 1 – Rand- und Flächeninhaltsfunktion 7

Kapitel 2 – Von der Flächeninhaltsfunktion zur Stammfunktion 16

Kapitel 3 – Berechnung von Flächen mit der Stammfunktion 25

Kapitel 4 – Flächen unter Kurven 49

Kapitel 5 – Rechenregeln für Integrale 63

Anwendung der Integralrechnung

Kapitel 6 – Kontextbezogene Bedeutung von Flächen 71

Kapitel 7 – Parametrisierung 77

Kapitel 8 – Rekonstruktion von Funktionen 81

Kapitel 9 – Volumenberechnung 87

Kapitel 10 – Ungleichungen 89

Vertiefung der Integralrechnung

Kapitel 11 – Lineare Substitution 91

Kapitel 12 – Allgemeines Substitutionsverfahren 99

Kapitel 13 – Partielle Integration und Produktintegration 103

Kapitel 14 – Beispiele zur Integration bei e-Funktionen 107

Kapitel 15 – Logarithmische Integration 111

Gesamte Integralrechnung selbstorganisiert erlernen (02-030-251)

Alle Rechte vorbehalten. All rights reserved.
Nachdruck, auch auszugsweise, vorbehalten. Nachdruck, auch auszugsweise, vorbehalten.
aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.
LehrerSelbstVerlag
LehrerSelbstVerlag GmbH, Koblenz (Germany)
lehrerselbstverlag.de
www.f-druck.de

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de



VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Stand: 17.03.2015

Alle Rechte vorbehalten.
Nachdruck, auch auszugsweise, ist ohne schriftliche Genehmigung der Rechte,
die sich aus dem Urheberrecht ergeben, ist ausdrücklich gestattet.

LehrerSelbstVerlag
Sokrates Verlag GmbH, Koblenz (Germany) 2013
www.lehrerSelbstVerlag.de

Digitaldruck.de

VORSCHEU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Vorwort	
Einführung in die Integralrechnung	
Vorbetrachtungen	3
Kapitel 1: Rand- und Flächeninhaltsfunktion	7
Kapitel 2: Von der Flächeninhaltsfunktion zur Stammfunktion	16
Kapitel 3: Berechnung von Flächen mit der Stammfunktion	25
Kapitel 4: Flächen unter Kurven	49
Kapitel 5: Einführung in die Integralrechnung	63
Anwendung der Integralrechnung	
Kapitel 6: Kontextuelle Bedeutung von Flächen	71
Kapitel 7: Parameteraufgaben	77
Kapitel 8: Rekonstruktion von Funktionen	81
Kapitel 9:	87
.....	89

Weiterführung der Integralrechnung	
Kapitel 11: Lineare Substitution	91
.....	99
Partielle Integration oder Produktintegration	103
Kapitel 14: Beispiele zur Integration bei e-Funktionen	117
Kapitel 15: Logarithmische Integration	

© 2013 LehrerSelbstVerlag ...rkl, Integralrechnung ...rganisiert erlernen

Vorwort

Die Basis für die Entwicklung des vorliegenden Arbeitshefts zum Thema Integralrechnung bilden meine langjährigen Erfahrungen im Unterricht an Oberstufen von beruflichen Gymnasien in Südhessen. Vor allem die heterogene Zusammensetzung in Klassen mit Schülerinnen und Schülern, die in ihrem Bildungsgang zuvor die unterschiedlichsten Schulformen besucht haben, stellen hohe und vielschichtige Herausforderungen bei der Gestaltung von Unterricht. Das bildungsrechtliche Ziel, das Erreichen der Allgemeinen Hochschulreife für Schülerinnen und Schüler unabhängig von ihrem bisher erreichten Kompetenz zu ermöglichen, setzt voraus, dass die Schülerinnen und Schüler dort abgeholt werden, wo sie sich befinden. Meine letzten Jahre hinweg entwickelten Arbeitsmaterialien für die Themenbereiche der Oberstufe auf ausdrücklich diesen Bedürfnissen zu entwerfen. Ziel war es, dass meine Schülerinnen und Schüler das Abitur in Hessen bestätigen, dass der schulische Weg erfolgreich ist. Es ist mir wichtig, dass sie zu weiteren Themen der Oberstufe Mathematik Arbeitshefte herauszuheben.

Es macht mir immer wieder aufgefallen, dass viele meiner Schülerinnen und Schüler mit der Komplexität der Zusammenhänge in der Integralrechnung Schwierigkeiten haben, und selbst bei einfachen Flächenberechnungen und Problemen standen. Ich wurde von mir und meinen Kollegen und Kolleginnen erprobte Unterrichtsmethoden entstanden, mit dem in der Regel sogar Schülerinnen und Schüler erfolgreich einen Weg zum Thema Integralrechnung finden, die von sich selbst behaupten, Mathematik nicht zu verstehen. Durch den Einsatz dieser Materialien besteht die Möglichkeit, dass die Schülerinnen und Schüler das Verfahren selbstständig anwenden können.

Die Materialien fördern nach selbstorganisiertem Lernen (SOL) Rechnung getragen und die Zielsetzung der Kompetenzerweiterung erlangt.

Eigene Erfahrung mit dem Einsatz der Unterlagen zeigen, dass sich häufig bereits schon bei der Bearbeitung der ersten Seiten der Erfolgserlebnisse einstellen. Die Schülerinnen und Schüler zum Fach Mathematik motivieren. Letztendlich können die Schülerinnen und Schüler die Materialien mit Kolleginnen und Kollegen austauschen, die nicht von mir kommen, den Anstoß gegeben, zum Thema Integralrechnung dieses Arbeitsheft in gebundener Form zu erwerben.

Ursula P.

Kommentar der Schülerinnen und Schülern:

„Es hat mir sehr viel Spaß gemacht, mit Ihren Unterlagen zu arbeiten. Ich habe alles verstanden, was man sich das Thema in ganz kleinen Schritten selbst erarbeiten konnte und konnte sogar die Aufgaben im Schulbuch lösen. Die Probleme lösen konnte ich.“

„Ich war immer schlecht in Mathematik und hatte in der Mittelstufe oft eine Fünf. Seit ich mit Ihren Unterlagen arbeite, erkenne ich Strukturen, kann immer wieder zurückblättern und nachlesen, was ich in Mathematik und schreibe gute Noten.“

Zielgruppe

Die Unterlagen beinhalten für die Abiturprüfung in Hessen grundlegende Themen aus dem Bereich der Integralrechnung für Grund- und Leistungskurs und können in der gymnasialen Oberstufe sowie an Fachoberschulen und Einrichtungen, in denen die Allgemeine Hochschulreife erworben werden kann, eingesetzt werden. Das Konzept des selbstorganisierten Lernens ermöglicht auch angehenden Studentinnen und Studenten zur Vorbereitung auf einen Studiengang, der Mathematik beinhaltet, ihre Kenntnisse zum Thema Integralrechnung aufzuarbeiten.

Auch im Bereich der Nachhilfe im Fach Mathematik ist der Einsatz der Lern- und Arbeitsmaterialien vorzuziehen, da die Unterlagen die Bedürfnisse Zielgruppen „Lern- und Leistungsproblem in Mathematik“ voll abdeckt.

Methodische und didaktische Anmerkungen

Die Unterlagen sind auf ausgerichtet, dass die Schülerinnen und Schüler zunehmend eigenständig und individuell in Lernzeiten zu Hause die einzelnen Themen erarbeiten und zu bestimmten Zeiten auch nacharbeiten können. Über den zeitlichen Rahmen so gesteuert, dass die 20 Stunden für den Abschnitt Einführung in die Integralrechnung nicht überschritten werden. Als Lernbegleiterinnen und -begleiterinnen möchte ich mir die Unterlagen mittlerweile die Möglichkeit auf den Unterricht zu gestalten, dass ich die Rolle eines Lernbegleiters wahrnehmen und die Rolle eines leistungsfähigen Schülerinnen und Schülers übernehmen in der Regel.

völlig selbstständig erarbeiten, kann ich bei Bedarf individuelle Unterstützung anbieten. Zu Beginn der Stunden erfolgt eine inhaltsorientierte, fachliche Einführung bzw. die gemeinsame Wiederholung zur Festigung der bisher gewonnenen Erkenntnisse und somit die Erweiterung der Kompetenz des Einzelnen.

Die Unterlagen sind so gestaltet, dass Erläuterungen, Erkenntnisse und Ergebnisse vollständig in das Arbeitsbuch hineingeschrieben werden, sodass keine unübersichtlichen losen Blittersammlungen entstehen und alle Informationen ohne Suchaktionen schnell nachgeschlagen werden können. Die vollständigen Lösungen werden als Download zur Verfügung gestellt. Da die Unterlagen ergänzend zum Schulbuch eingesetzt werden sind an Stellen, an denen beispielsweise weiter vertieft werden durch Übungsaufgaben gewünscht sind, sind Verweise der Lehrerinnen und Lehrer auf Aufgaben im Schulbuch eingefügt, die sich notfalls weiter vertiefen können. Weiteren Anregungen und Verbesserungswünschen werden gerne auf dem Lehrerselbstverlag geäußert.

Anmerkungen zu den einzelnen Kapiteln

Einführung in die Integralrechnung
Kapitel 1 bis 3

Der Teil Einführung in die Integralrechnung stellt ein in sich geschlossenes Unterrichtskonzept dar. Die einzelnen Kapitel bauen aufeinander auf und sollten daher in der vorgegebenen Reihenfolge bearbeitet werden. In Kapitel 1 bis 3 werden anhand der Betrachtung von Flächenstücken bei linearen Funktionen die Grundlagen der Integralrechnung eingeführt. Die Entkopplung vom Regelwerk für die Ableitung der e-Funktion und die oben beschriebene Reduktion der Komplexität bewirkt.

Im Kapitel 4 erfolgt unter Verwendung der nun bereits bekannten Stammfunktion ein einfach nachvollziehbarer und anschaulicher Übergang zum Integral. Die formale Herleitung des Integrals $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$ über Grenzwerte ist optional und kann bei Bedarf weggelassen werden. Anhand von Beispielen wird der charakteristische Verlauf der Integrationskurven verdeutlicht. Die optionalen Aufgaben können zur Vertiefung der Kenntnisse in heterogenen Lerngruppen herangezogen werden.

In den folgenden Kapiteln werden die bisherigen Betrachtungen an Geraden kontinuierlich erweitert. Im Kapitel 5 wird der direkte Einstieg über die Grenzwerte bei der Riemannsumme oder Untersumme. Das gleicht sich

mit der Integralrechnung selbstorganisiert erlernen

jedoch wieder aus, da die SchülerInnen und Lehrer die Rechenregeln für die Integralrechnung als Ergänzung zu den Regeln für die Ableitung der e-Funktion sehen. Begriffe klar machen und am Ende von Kapitel 5 ohne Probleme in der Lage sind, die vorgegebenen Standardaufgaben zur Flächenberechnung selbstständig zu lösen.

Anwendung der Integralrechnung
Kapitel 6 bis 10

Im nächsten Abschnitt der Integralrechnung findet sich eine Sammlung von Arbeitsblätter zur Einführung in die Integralrechnung. Die Aufgabenstellung in Kapitel 6 knüpft dabei an das Beispiel zur Berechnung der Arbeit aus den Vorbemerkungen an, wobei die Berechnung von Flächen im Zusammenhang einer Aufgabenstellung für weitere Beispiele erläutert wird.

Weiterführung der Integralrechnung:
Kapitel 11 bis 15

Die Regel für die lineare Substitution wird zunächst im Grundkurs intuitiv an Beispielen plausibel gemacht. Als erweiternde Betrachtung erfolgt an einem Beispiel auch die Erarbeitung des ausführlichen Substitutionsverfahrens bei der linearen Substitution. Die Ausführungen zur e-Funktion setzen das Kenntnis von Ableitungsregeln bei der e-Funktion voraus und können daher erst nach der Einführung in die e-Funktionen bearbeitet werden.

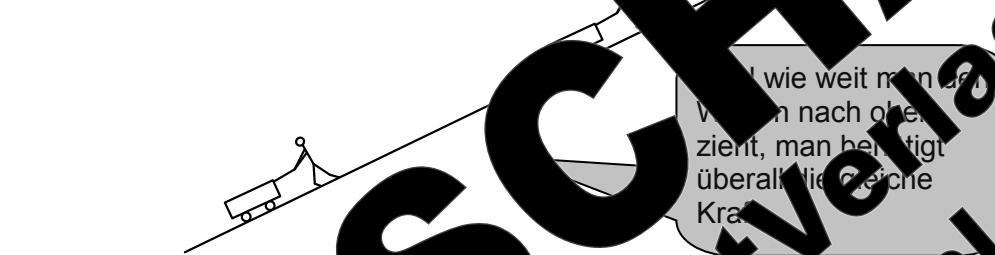
Eine Behandlung des Substitutionsverfahrens auch für nicht lineare innere Funktionen und die partielle Integration dürfte dem Leistungskurs vorbehalten sein und kann daher auf das Studium dienen. In beiden Fällen werden die jeweiligen Integrationsverfahren anhand von Beispielen verdeutlicht. Auf komplizierte Verfahren, die trickreich sind, werden wir nicht eingehen. Die Reihenfolge von Kapitel 12 und 13 ist beliebig.

Integrationsverfahren für Potenzfunktionen und die logarithmische Integration sind in Kapitel 14 und 15 kann erst nach der Behandlung der Ableitungsregeln erfolgen.

Vorbetrachtungen

Wie Sie sicherlich bereits aus dem Physikunterricht der Klasse 11 wissen, kann man zwischen dem Graphen einer Funktion und der x-Achse eine inhaltliche Bedeutung zuschreiben. Dies soll nun am Beispiel der Berechnung der Arbeit noch einmal kurz dargestellt werden.

1. Arbeit bei konstanter Kraft



Diesen Sachverhalt kann man in einem F,s-Diagramm wie folgt darstellen:



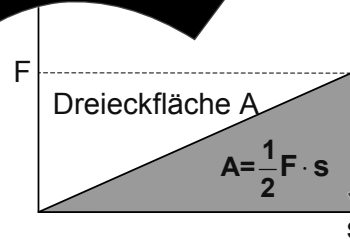
Das Produkt aus Kraft F und Weg s, also „Kraft · Weg = F · s“, wird die Arbeit W berechnet. Damit entspricht die Fläche A des Rechtecks der Arbeit W.
$$W = F \cdot s$$

Übrigens ergibt sich aus den Einheiten N (Newton) für die Kraft und m (Meter) für den Weg die Einheit Nm (Newtonmeter) für die Arbeit.

2. Arbeit bei zunehmender Kraft



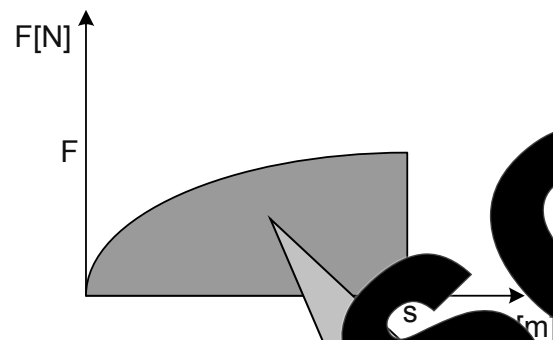
Bei einer Federkraft kann man ein F,s-Diagramm wie folgt aufstellen:



Die Fläche des Dreiecks entspricht der Arbeit, die bei der Ausdehnung der Feder verrichtet wird, also $W = \frac{1}{2} F \cdot s$.

3. Arbeit bei sich beliebig ändernder Kraft

In diesem Fall könnte ein F,s-Diagramm so aussehen:



Berechnung dieser Fläche kennen Sie aus den vorherigen Mathematikunterricht keine Formel! Wir brauchen neue mathematische Berechnungsmethoden für Flächen!

Wir brauchen neue mathematische Berechnungsmethoden für Flächen!

Zielsetzung

Mit dieser Zielsetzung soll gearbeitet werden, mit der man sich ein Ziel setzen kann, die in einem Koordinatensystem eingezeichnet werden können und die keine Begrenzung haben.

Bevor jedoch die Zielsetzung in Angriff genommen wird, sollte noch für das Verständnis der mathematischen Voraussetzungen geholt werden.

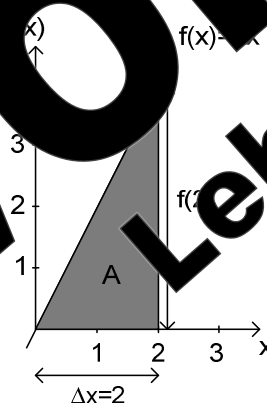
4. Mathematische Voraussetzungen

Abweichend von Ihrem Schulbuch werden in diesem Arbeitspapier zunächst noch keine Flächen betrachtet, bei denen die Begrenzung durch eine Kurve beschrieben wird. Die notwendigen Erkenntnisse werden hier zunächst anhand von Flächen betrachtet, die man auch mit den Formeln für Rechtecke, Dreiecke und Trapeze, also elementargeometrischen Betrachtungen, berechnen kann. Das hat den Vorteil, dass viele Ergebnisse mit bekannten Methoden überprüft werden können und somit das Verständnis für die neu zu lernenden Verfahren zur Flächenberechnung erleichtert wird.

Wiederholung von Flächenberechnungen im Koordinatensystem

a) Dreiecke im Koordinatensystem

Im folgenden Koordinatensystem ist ein Dreieck eingezeichnet, das eine Seite auf der x-Achse liegt. Auf der x-Achse liegende Seite wird als Grundseite g gewählt und hat wie bei einer beliebigen Figur die Länge $\Delta x = 2$ (Längeneinheiten). Die Höhe des Dreiecks ist hier dem Funktionswert der Geraden $f(x) = 2x$ an der Stelle $x = 2$ also $f(2) = 4$ L.E.



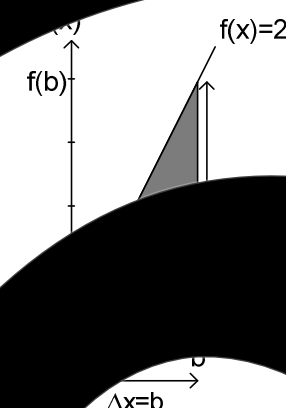
Da hier die Beschriftung mit Zahlenwerten vorgegeben ist, ergibt sich für die Fläche:

Fläche des Dreiecks A:

$$A = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{\Delta x \cdot f(x)}{2} = \frac{2 \cdot f(2)}{2} = \frac{2 \cdot 4}{2} = 4 \text{ FE}$$

(FE bedeutet Flächeneinheiten)

Im Koordinatensystem, dessen Achsen nicht mehr



Wenn man für $f(b)$ den Wert $2b$ einsetzt, indem man den Satz ergänzt:

$f(b)$ ist der Funktionswert der Stelle $x = \underline{\hspace{2cm}}$ und dieser wird berechnet, wenn b in die eingezeichneten

Geraden einsetzt.

Fläche des Dreiecks A:

$$A = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{\Delta x \cdot f(x)}{2} = \frac{b \cdot f(b)}{2}$$

Anmerkung: Wenn Sie für b nun den Wert 2 einsetzen, erhalten Sie wie oben für die Fläche den Wert 4 FE.

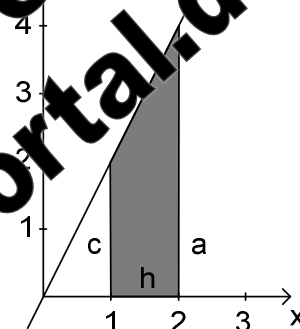
b) Trapeze im Koordinatensystem

Fläche eines Trapezes
laut Formelsammlung:

$$A = \frac{a+c}{2} h$$

Drehen des Trapezes

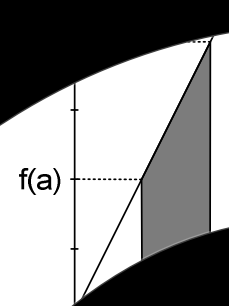
Ein 90° gedrehtes Trapez im
Koordinatensystem.



Übertragen der Rechnung, dass der Flächeninhalt des Trapezes im abgebildeten
Koordinatensystem einen Betrag von $A = 2$ hat.

für Rechnung:

Überträgt man die Überlegungen für das Dreieck im nicht mit Zahlen skalierten
Koordinatensystem, ergibt sich die folgende Abbildung:



Übertragen der Rechnung, dass der Flächeninhalt des Trapezes
im Koordinatensystem einen Betrag von $A = 2$ hat.

ergibt.

Begründung:

Kapitel 1: Rand- und Flächeninhaltsfunktion

In diesem Kapitel werden anhand aufeinander aufbauender Aufgaben die Zusammenhänge
hinsichtlich der neuen Methode, Flächen zu berechnen, erarbeitet. Sie dürfen sich daher keine
Aufgabe. Sollten Sie sich hinsichtlich Ihrer Lösung nicht sicher sein, teilen Sie Ihre Teilkontrollergebnisse
angeben und Sie finden zum Vergleichen Ergebnisse im Forum.

Neue Bezeichnungen und Schreibweisen

Auf den nun folgenden Seiten wird der Begriff Randfunktion verwendet und Flächen nicht nur mit dem
Buchstaben A sondern in der Schreibweise $A_0(b)$ angegeben. Verdeutlichen Sie sich die Bedeutung.

• Randfunktion:

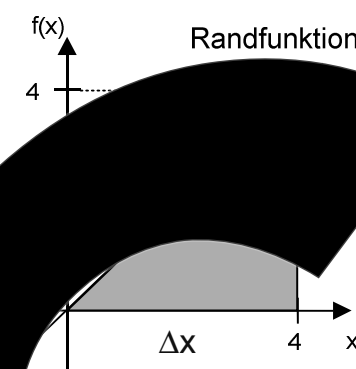
Die Randfunktion stellt je nach Kontext die Begrenzung dar, die in den Abbildungen dargestellten
Flächen dar.

• Flächenangabe:

Bisher wird für die Fläche nur der Buchstabe A verwendet. Im Folgenden wird diese
Schreibweise ergänzt. Beispielsweise bedeutet $A_0(4)$ (sprich: A von Null bis vier) in der Aufgabe
1., dass die Fläche bei $x = 0$ links in der y-Achse, dem sogenannten **unteren Grenze**, beginnt
und rechts am senkrechten Gerade $x = 4$, dem sogenannten **oberen Grenze**, endet. Erläutern
Sie, was die Bedeutung die Angabe $A_0(b)$ hat.

1. Der Begriff der Flächeninhaltsfunktion

Die Flächeninhaltsfunktion $A_0(x)$ ist die Funktion, die die Fläche unter der Randfunktion $f(x)$ von $x=0$ bis $x=x$ angibt. Sie kann durch entsprechende
Mittel, also mit der bekannten Formel für die Fläche eines Dreiecks, bestimmt werden. Sie dazu die Zahlenwerte
von Δx und $f(4)$ mithilfe der Angabe zur Randfunktion in der Abbildung.



Randfunktion: $f(x)=x$

Formel
Dreiecksfläche:

Grundseite:

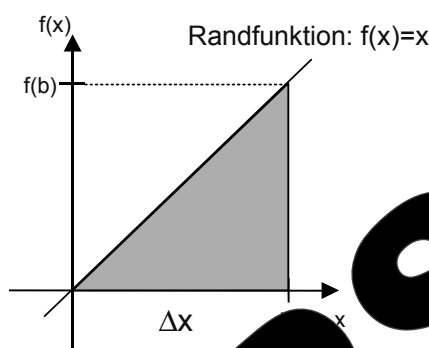
Höhe:

Flächeninhalt:

$A_0(4) =$

- b) Berechnen der Fläche $A_0(b)$, also der Fläche zwischen $x = 0$ und $x = b$

Für den rechten Wert der Flächenbegrenzung wird nun anstatt des Zahlenwerts 4 wie in Aufgabenteil a) die Variable $x = b$ verwendet. Bestimmen Sie nun $A_0(b)$ zum Aufgabenteil a) die Längen Δx sowie $f(b)$ und geben Sie die Fläche zwischen 0 bis b also $A_0(b)$ an.



$$A_0(b) = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{f(b) \cdot \Delta x}{2}$$

$$\Delta x =$$

$$h = f(b) =$$

Fläche zwischen
0 und b : $A_0(b) =$

- c) Da der Wert b nun beliebig auf der x -Achse liegen soll nun für eine weitere Variable x in der Formel für den Flächeninhalt $A_0(b) = \frac{1}{2} b^2$ das b durch ein x ersetzt werden.

$$A_0(b) = \frac{1}{2} b^2 \text{ wird daher: } A_0(x) = \frac{1}{2} x^2$$

Der Sinn für dieses Ersetzen von b durch x besteht darin, dass man nun für die Berechnung der Fläche eine Funktion $f(x)$ in x abhängig ist. Mit dieser Funktion wird die Fläche für jeden Wert für x berechnet.

Die Randfunktion $f(x)$

Interpretieren Sie durch einen Vergleich mit dem Ergebnis aus Aufgabenteil a), welche Bedeutung der Zahlenwert hat, der sich durch Einsetzen von 4 in die Formel $A_0(x) = \frac{1}{2} x^2$ ergibt.

$$A_0(4) =$$

- e) Skizzieren Sie die Ableitungsfunktion $A_0'(x)$ der Flächeninhaltsfunktion und vergleichen Sie das Ergebnis mit der Randfunktion. Was stellen Sie fest?

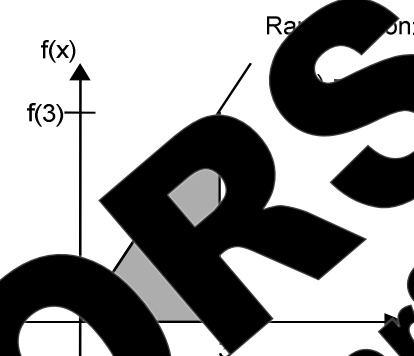
$$A_0'(x) =$$

Vergleichen Sie

Aufgabe 1.2

Als Randfunktion wird nun die Funktion $f(x) = 2x$ gewählt. Mit dieser Funktion werden die entsprechenden Schritte wie in Aufgabe 1.1 durchgeführt werden. Sie darauf, dass sich der jeweilige Funktionswert und damit $f(x)$ nun ändert.

- a) Berechnen Sie den Zahlenwert der markierten Dreiecksfläche. Interpretieren Sie jedoch zunächst, warum sich als Formel für die Dreiecksfläche $A_0(b) = \frac{1}{2} f(b) \cdot \Delta x$ ergibt:



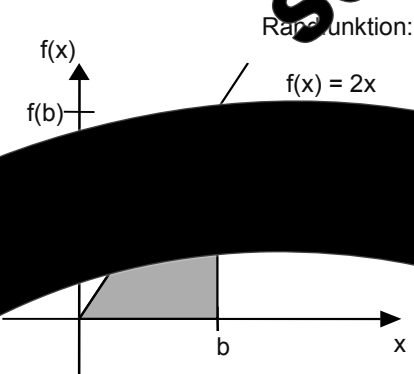
$$A_0(3) = \frac{1}{2} f(3) \cdot \Delta x$$

$$\Delta x =$$

$$f(3) =$$

Fläche zwischen
0 und 3: $A_0(3) =$

Wie in Aufgabe 1.1 wird nun der feste Zahlenwert 3 auf der x -Achse durch einen variablen Wert b ersetzt. Berechnen Sie nun mithilfe von Δx und $f(b)$ die Fläche zwischen 0 und b also $A_0(b)$. (Kontrollergebnis: $A_0(b) = b^2$)



$$A_0(b) = \frac{1}{2} f(b) \cdot \Delta x$$

$$\Delta x =$$

$$f(b) =$$

Fläche
0 und b : $A_0(b) =$

- c) Um auch hier eine x -abhängige Flächeninhaltsfunktion zu erhalten, soll nun wie in Aufgabenteil a) die Variable x eingesetzt werden. Tauschen Sie b durch die Variable x aus.

$$A_0(x) =$$

Fläche zwischen 0 und x an der
folgenden Stelle x

$A_0(x)$ bezeichnet man auch hier als **Flächeninhaltsfunktion** zur Randfunktion $f(x)$.

- d) Bestimmen Sie die Fläche zwischen 0 und der Stelle $x = 3$ mithilfe der Flächeninhaltsfunktion und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem im Aufgabenteil a) berechneten Wert.

$$A_0(3) =$$

Vergleich:

- e) Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion der Flächeninhaltsfunktion und vergleichen Sie das Ergebnis mit der Randfunktion. Was stellen Sie fest?

$$f'(x) =$$

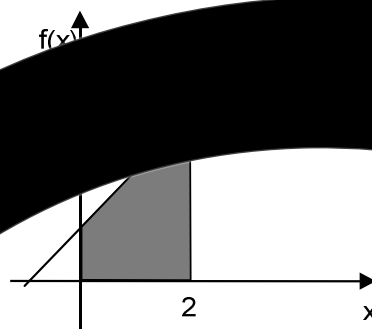
gleich

Aufgabe 2

Als Randfunktion wird nun die Funktion $f(x) = x+1$ gewählt. Wie Sie aus der Abbildung erkennen, kann man nun nicht mehr mit der einfachen Formel für die Dreiecksfläche arbeiten, sondern muss die zu berechnende Fläche als Trapez betrachten. Ermitteln Sie dabei mithilfe der Randfunktion und der Abbildung die notwendigen Zahlenwerte. Tragen Sie fehlende Angaben und Bezeichnungen in der Abbildung ein. (Kontrollergebnis: $A_0(2)=4$)

a)

Formel Trapezfläche:



Länge

Länge Seite c:

Fläche:

$$A_0(2) =$$

- b) Wie in den vorangegangenen Aufgaben 1.1 und 1.2 soll auch hier, anstatt mit einem vorgegebenen Zahlenwert als rechte Grenze, mit einer variablen Grenze gearbeitet und damit die Fläche zwischen 0 und b , also $A_0(b)$ bestimmt werden. Tragen Sie daher die Schritte von Aufgabenteil a) entsprechend geändert durch. (Kontrollergebnis: $A_0(b) = \frac{1}{2}(b^2 + b)$)



- c) Ermitteln Sie nun wieder die Ableitungsfunktion $f'(x)$ über den Quotientenquotienten nach der Variable x .

Bestimmen Sie die Fläche zwischen $x = 0$ und der Stelle $x = 2$ mithilfe der Flächeninhaltsfunktion und vergleichen Sie das Ergebnis mit Aufgabenteil a).

$$A_0(2) =$$

e) Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion der Flächeninhaltsfunktion und vergleichen Sie das Ergebnis mit der Randfunktion. Was stellen Sie fest?

2. Zusammenfassung

- a) Die Flächen unter einer Randfunktion $f(x)$ werden im Koordinatensystem berechnet. Diese Flächen sind durch die Randfunktion $f(x)$ und die x-Achse bzw. vier Seiten begrenzt. Diese Begrenzungen werden jeweils beschrieben. Beschreiben Sie, welche Begrenzungen die Flächen in den vorherigen Aufgaben haben. Ergänzen Sie die folgenden Sätze.

Alle Flächen haben als linke Begrenzung die y-Achse.

Alle Flächen haben als rechte Begrenzung die Stelle $x = b$.

Alle Flächen werden am oberen Rand durch die _____ begrenzt.

Alle Flächen werden am unteren Rand durch die _____-Achse begrenzt.

Information

In späteren Kapiteln werden für die linke und rechte Begrenzung folgende Bezeichnungen verwendet:

- Die **linke Begrenzung** einer Fläche wird als **linke Grenze** bezeichnet.
- Die **rechte Begrenzung** einer Fläche wird als **rechte Grenze** bezeichnet.

- b) In allen Beispielen der vorangegangenen Aufgaben wurde als Randfunktion eine lineare Funktion $f(x)$ verwendet. Formulieren Sie anhand Ihrer Ergebnisse Zusammenhänge zwischen der **Flächeninhaltsfunktion** $A_0(x)$ und der **Randfunktion** $f(x)$, indem Sie den folgenden Satz vervollständigen:

Wenn die Randfunktion bekannt ist, erhält man die Flächeninhaltsfunktion, indem man die Randfunktion _____.

Wenn die Flächeninhaltsfunktion bekannt ist, erhält man die Randfunktion, indem man die Flächeninhaltsfunktion _____.

Sie haben sich schon erkannt, dass man aus der Randfunktion die Flächeninhaltsfunktion prinzipiell mit Hilfe einer Umkehrung der Ableitung ermitteln kann. Jedoch fällt es Ihnen schwer, für diese Rechnung einen passenden Begriff zu finden. Vielleicht ist Ihnen dabei spontan ein Begriff wie „Vorwärts Ableiten“ in den Sinn gekommen. Dieser ist jedoch nicht zulässig. Sie sehen, dass es nicht zulässig ist, den rechnerischen Ablauf zu umkehren. Lesen Sie dazu die folgende Definition:

- c) Der Begriff „**Integrieren**“

Man kann die Flächeninhaltsfunktion $A_0(x)$ aus der Randfunktion $f(x)$ ermitteln. Dieser Vorgang wird als **Integrieren** bezeichnet.

Übungen

Ü1.1 Bestimmen Sie zu der gegebenen Flächeninhaltsfunktion $A_0(x)$ die zugehörige Randfunktion $f(x)$:

a) $A_0(x) = 2x - 2 \Rightarrow f(x) =$ _____

b) $A_0(x) = x^2 - 5 \Rightarrow f(x) =$ _____

c) $A_0(x) = 0,5x^2 + x \Rightarrow f(x) =$ _____

d) $A_0(x) = 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow f(x) =$ _____

e) $A_0(x) = 0,7x^2 - 0,1x + 3 \Rightarrow f(x) =$ _____

f) $A_0(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f(x) =$ _____

g) $A_0(x) = x^2 + bx + c \Rightarrow f(x) =$ _____

h) $A_0(x) = x^2 + 3x + 2 \Rightarrow f(x) =$ _____

Ü1.2 Bestimmen Sie zu der gegebenen Randfunktion $f(x)$ die Flächeninhaltsfunktion $A_0(x)$.

a) $f(x) = 2 \Rightarrow A_0(x) =$ _____

b) $f(x) = 0,2x \Rightarrow A_0(x) =$ _____

c) $f(x) = x + 2 \Rightarrow A_0(x) =$ _____

d) $f(x) = 2x + 1 \Rightarrow A_0(x) =$ _____

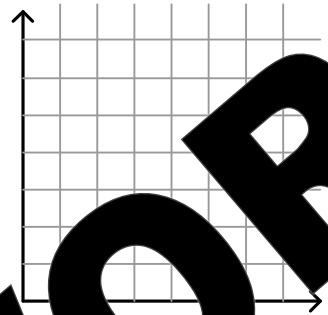
e) $f(x) = 4x - 3 \Rightarrow A_0(x) =$ _____

f) $f(x) = 2rx + 4s \Rightarrow A_0(x) =$ _____

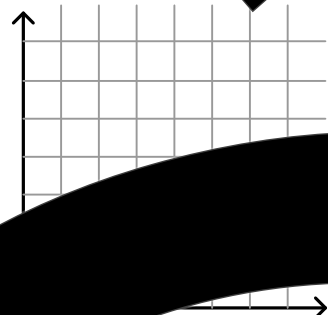
g) $f(x) = \frac{2}{5}x + \frac{3}{2} \Rightarrow A_0(x) =$ _____

Ü1.3 Berechnen von Flächen

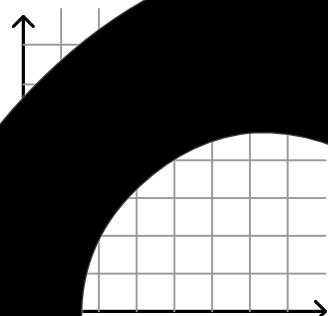
- Skizzieren Sie die angegebenen Geraden in den jeweils vorgegebenen Koordinatensystemen. Wählen Sie dabei sinnvolle Skalierungen.
- Markieren Sie jeweils für die angegebene rechte bzw. obere Grenze die zugehörige schattierende Fläche farbig.
- Berechnen Sie die Fläche mithilfe der Flächeninhaltsfunktion $A_0(x)$.
- Berechnen Sie zur Kontrolle die markierte Fläche auch mit elementargeometrischen Betrachtungen (Rechteck, Dreieck bzw. Trapez) und vergleichen Sie die Ergebnisse.

Randfunktion $f(x) = 2$ rechte bzw. obere Grenze $x = 2$ 

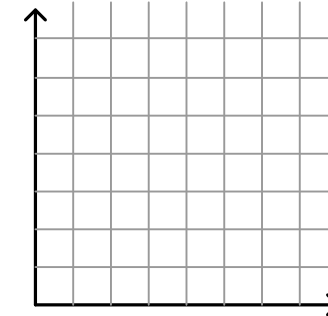
Kontrollrechnung über elementargeometrische Betrachtung:

 $A_{\text{Rechteck}} =$ Randfunktion $g(x) = 2$ rechte Grenze $x = 3$  $A_0(3) =$

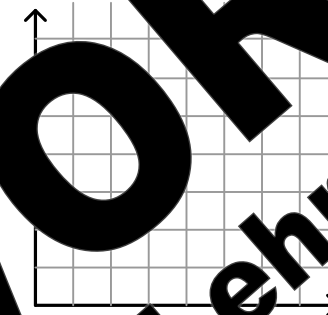
Kontrollrechnung über elementargeometrische Betrachtung:

Randfunktion $h(x) = 0,25x$ rechte Grenze $x = 2$ 

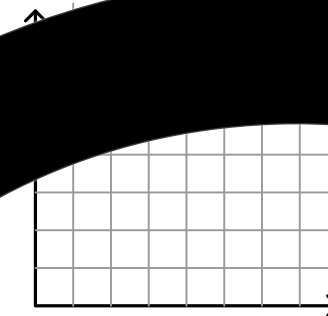
Kontrollrechnung über elementargeometrische Betrachtung:

 $A_{\text{Dreieck}} =$ Randfunktion $k(x) = 0,25x$ rechte Grenze $x = 3$  $A_0(\quad) =$

Kontrollrechnung über elementargeometrische Betrachtung:

 $A_{\text{Dreieck}} =$ Randfunktion $l(x) = x+2$ rechte Grenze $x = 2$  $A_0(\quad) =$

Kontrollrechnung über elementargeometrische Betrachtung:

 $A_{\text{Trapez}} =$ Randfunktion $n(x) = x+2$ rechte Grenze $x = 2,5$ 

Kontrollrechnung über elementargeometrische Betrachtung:

 $A_{\text{Trapez}} =$

Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Integralrechnung selbstorganisiert erlernen

LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de



Kapitel 2

Von der Flächeninhaltsfunktion zur Stammfunktion

Einführung in die Integralrechnung

Kapitel 1 – Rand- und Flächeninhaltsfunktion	7
Kapitel 2 – Von der Flächeninhaltsfunktion zur Stammfunktion	16
Kapitel 3 – Berechnung von Flächen mit der Stammfunktion	25
Kapitel 4 – Flächen unter Kurven	49
Kapitel 5 – Rechenregeln für Integrale	63

Anwendung der Integralrechnung

Kapitel 6 – Kontextbezogene Bedeutung von Flächen	71
Kapitel 7 – Parameteraufgaben	77
Kapitel 8 – Rekonstruktion von Funktionen	81
Kapitel 9 – Volumenberechnung	87
Kapitel 10 – Uneigentliche Integrale	89

Vertiefung der Integralrechnung

Kapitel 11 – Lineare Substitution	91
Kapitel 12 – Allgemeines Substitutionsverfahren	99
Kapitel 13 – Partielle Integration und Produktintegration	103
Kapitel 14 – Beispiele zur Integration bei e-Funktionen	107
Kapitel 15 – Logarithmische Integration	111

Gesamte Arbeit ist unter der Lizenz selbstorganisiert erlernen (ISBN 978-3-02-030-251-1) veröffentlicht.

Alle Rechte vorbehalten. All rights reserved.

Keine Weitergabe, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte, die aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

LehrerSelbstVerlag

LehrerSelbstVerlag GmbH, Koblenz (Germany)

www.lehrerselbstverlag.de

www.f-druck.de

Ü1.4 Beschreiben Sie unter Verwendung der Ausdrücke

- Randfunktion
- senkrechte Gerade
- x-Achse
- y-Achse
- rechte bzw. obere Grenze
- linke bzw. untere Grenze
- unterer Rand
- oberer Rand

wie die in Aufgabe Ü1.3 berechneten Flächeninhalte

Ü1.5 Formulieren Sie die neuen Erkenntnisse Sie hinsichtlich der Berechnung von Flächen in Aufgabe Ü1.4. Verwenden Sie in Ihrer Erklärung den Begriff „Integrieren“.

Ü1.6 Die Berechnung sich nicht ... verbirgt.

Kapitel 2: Von der Flächeninhaltsfunktion zur Stammfunktion

In der nun folgenden Aufgabe soll die Berechnung von Flächen, die nicht an der y-Achse beginnen, untersucht werden.

1. Flächen, die nicht an der y-Achse beginnen**Aufgabe 2.1**

Gegeben ist die Randfunktion $f(x) = x+1$

- a) Bestimmen Sie die Flächeninhaltsfunktion $A_0(x)$ so, dass die weiteren angegebenen Flächen. Berechnen Sie für die Randfunktion $f(x)$ mithilfe der Flächeninhaltsfunktion $A_0(x)$ die folgenden Flächen:

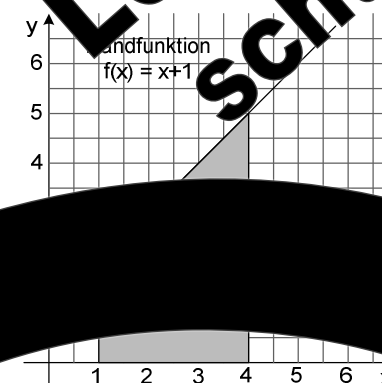
$$A_0(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$A_0(1) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$A_0(4) = \underline{\hspace{2cm}}$$

- b) Mithilfe der Ergebnisse aus Aufgabe a) sollen nun die in den folgenden Aufgaben i) bis iv) grau schattierten Flächen berechnet werden.

- i) Erläutern Sie den dargestellten Ansatz, die Rechenschritte und das Ergebnis.



Grenzen für die Fläche:

linke Grenze: $a = \underline{\hspace{2cm}}$

rechte Grenze: $b = \underline{\hspace{2cm}}$

Erläuterung:

$$(1) A_1(4) = A_0(4) - A_0(1)$$

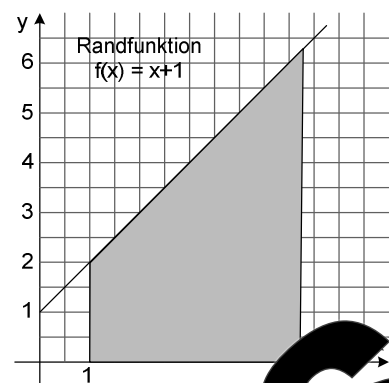
(1) $\underline{\hspace{2cm}}$

$$(2) A_1(4) = 12 - 1,5$$

(2) $\underline{\hspace{2cm}}$

$$(3) A_1(4) = 10,5 \text{ FE}$$

- ii) Erläutern Sie den dargestellten Ansatz, die Rechenschritte und das Ergebnis



Grenzen für die Fläche:

linke Grenze:

rechte Grenze: b

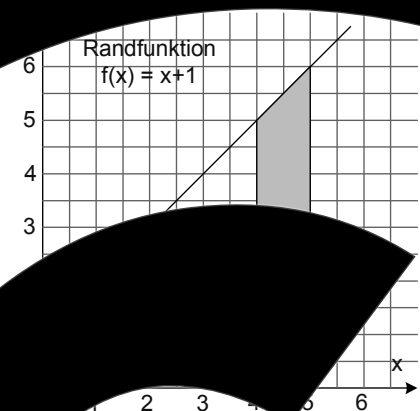
Erläuterung:

(1) $A_1(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{1}{2}(1+1)^2$ (1) _____

(2) $A_1(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 1,5$ (2) _____

(3) $A_1'(x) = x+1$ (3) _____

- iii) Berechnen Sie die Fläche $A_4(5)$ entsprechend zu den Zeilen (1) bis (3) dieser



linke

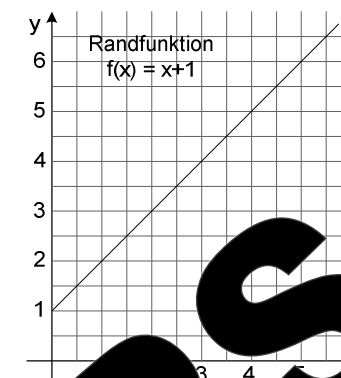
rechte Grenze

$A_4(5) = A_4(\underline{\quad}) - A_4(\underline{\quad})$

$A_4(5) = \underline{\quad}$

$A_4(5) = \underline{\quad}$

- iv) Übertragen Sie die Überlegungen zur Berechnung der Fläche A_4 auf den allgemeinen Fall, bei dem die obere Grenze den beliebigen Wert x annimmt. Zeichnen Sie eine beliebige passende Fläche.



$A_4(x) = A_4(\underline{\quad}) - A_4(\underline{\quad})$

$A_4(x) = \underline{\quad}$

Für die erste Ableitung von $A_4(x)$ gilt dann:

$A_4'(x) = \underline{\quad}$

Aufgabe

- a) Vergleichen Sie die Flächeninhaltsfunktionen $A_0(x)$, $A_1(x)$ und $A_4(x)$, indem Sie den folgenden Vergleich durchführen:

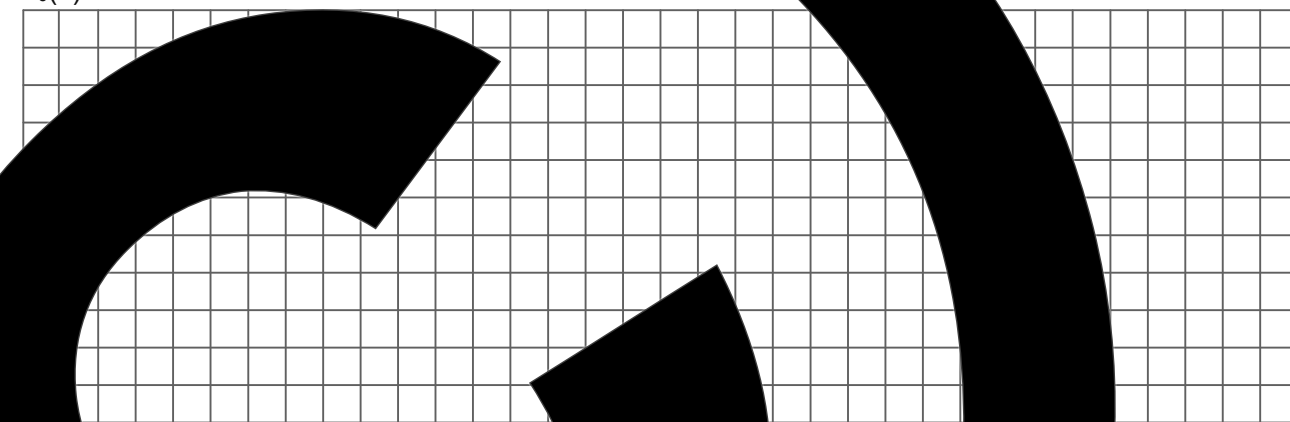
Die Summanden $\underline{\quad}$ sind in allen drei Flächeninhaltsfunktionen

vorhanden. Die Flächeninhaltsfunktionen unterscheiden sich durch $\underline{\quad}$

- b) Vergleichen Sie die erste Ableitung der Flächeninhaltsfunktionen $A_0'(x)$, $A_1'(x)$ und $A_4'(x)$. Was stellen Sie fest?

Aufgabe 2.3

Bilden Sie für die Funktion $g(x)=2x+3$ die folgenden Flächeninhaltsfunktionen: $A_0(x)$, $A_2(x)$ und $A_3(x)$. Zeigen Sie durch Rechnung, dass sich $A_2(x)$ bzw. $A_3(x)$ durch $A_0(x)$ unterscheiden.



Aufgabe 2.4

Gegeben ist die Randfunktion $f(x) = 2x + 3$.

a) Erläutern Sie die einzelnen Schritte der folgenden Rechnung bzw. Herleitung:

(1) $A_0(x) = x^2 + 3x$

(1) _____

(2) $A_a(x) = A_0(x) - A_0(a)$

(3) $A_a(x) = x^2 + 3x - (a^2 + 3a)$

(4) $c = -a^2 - 3a$

(5) $A_a(x) = x^2 + 3x - c$

(6) $A_a'(x) = 2x + 3$

(6) _____

Erläutern Sie, bezogen auf die Wahl der linken bzw. unteren Grenze, den Unterschied zwischen den Flächeninhaltsfunktionen $A_0(x)$ und $A_a(x)$, indem Sie die folgenden Sätze vervollständigen:

Die Flächeninhaltsfunktion $A_0(x)$ wird durch Integration der _____ $f(x)$

berechnet. Wenn man eine Fläche mit der Flächeninhaltsfunktion

$A_0(x)$ beschreibt, dann beginnt man an der linken bzw. unteren Grenze $x = 0$, also an der

unteren Grenze $x = 0$. Die weiteren Flächeninhaltsfunktionen für Flächen, die durch die Randfunktion

begrenzt werden, aber nicht an der unteren Grenze $x = 0$ beginnen, unterscheiden sich von

$A_0(x)$ nur durch eine _____.

2. Verallgemeinerungen, Definitionen und Begriffe

Wir haben in den vorangegangenen Aufgaben folgendes festgestellt:

- Zu jeder Randfunktion kann man durch Integration unterschiedliche Flächeninhaltsfunktionen ermitteln, die sich jedoch nur durch eine Konstante unterscheiden.
- Wenn man eine beliebige Flächeninhaltsfunktion $A_a(x)$ wählt, fällt die Konstante c und man erhält die Randfunktion, welche den oberen Rand der Fläche darstellt.

Aus diesem Zusammenhang wird nur der wichtige Begriff "Stammfunktion" abgeleitet:

Da $f(x)$ durch Ableiten aus $A_a(x)$ entsteht bzw. abstammt, bezeichnet man die Flächeninhaltsfunktion $A_a(x)$ auch als **Stammfunktion $F(x)$ zur Randfunktion $f(x)$** .

Eine differenzierbare Funktion $F(x)$, für die $F'(x) = f(x)$ gilt, wird als **Stammfunktion** von $f(x)$ bezeichnet.

Eine Stammfunktion wird mit dem Namen der Randfunktion gebildet. Die großen Buchstaben bezeichnen die Stammfunktion von $f(x)$ wird mit $G(x)$ bezeichnet.

Erläutern Sie, was Sie unter dem Begriff Stammfunktion versteht.

Geben Sie an, wie man aus der Randfunktion $f(x)$ die Flächeninhaltsfunktion $A_0(x)$ erhält.

Geben Sie an, wie man aus der Flächeninhaltsfunktion $A_0(x)$ eine allgemeine Stammfunktion $F(x)$ erhält.

3. Ergänzende Betrachtungen zur Konstanten c



Verdeutlichen Sie sich das nebenstehende Ablaufdiagramm und bearbeiten Sie dazu die folgenden Aufgaben:

- a) Begründen Sie, warum man zu den beiden Stammfunktionen $G(x)$ eindeutig die zugehörige Randfunktion $g(x)$ berechnen kann, jedoch aus der Randfunktion $g(x)$ nur die allgemeine bzw. eine bestimmte Stammfunktion ermitteln kann.

- b) Man berechnet die Stammfunktion $F(x)$ der Funktion $f(x) = ax + b$ die Stammfunktion. Begründen Sie, warum $F(x) = 0,5ax^2 + bx$ angibt sondern noch eine Konstante c ergibt.

- c) Für den Fall $c = 0$ lautet eine Stammfunktion $G(x) = 4x^2 + 5x$. Setzt man x den Wert 10 in diese Funktion ein, so erhält man $G(10) = 450$. Interpretieren Sie dies in der Betrachtung, dass für $A(x) = 4x^2 + 5x$, die anschauliche Bedeutung des Wertes.

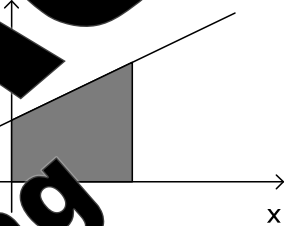
Erklären Sie den Merksatz:

Wenn man einen positiven Zahlenwert b in die allgemeine Stammfunktion der Funktion $f(x) = nx^2 + mx$ einsetzt, beginnt die zugehörige Fläche an der Stelle b auf der x-Achse.

Übungen

Ü2.1 In der Abbildung nebenan ist die Funktion $h(x) = 0,5x + 1$ skizziert. In die unten angegebenen Stammfunktionen wird der Wert 2 eingesetzt. Entscheiden Sie, mit welcher der angegebenen Stammfunktionen die markierte Fläche berechnet wird:

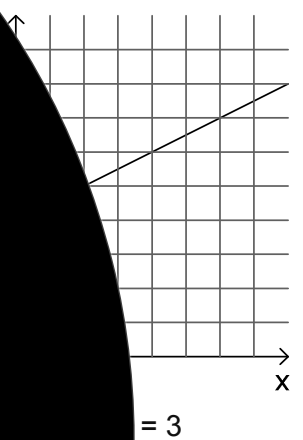
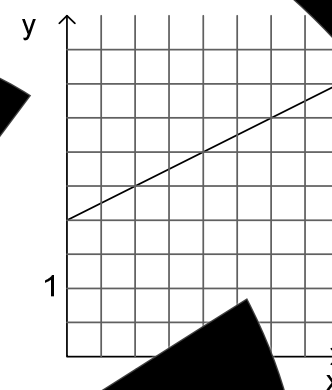
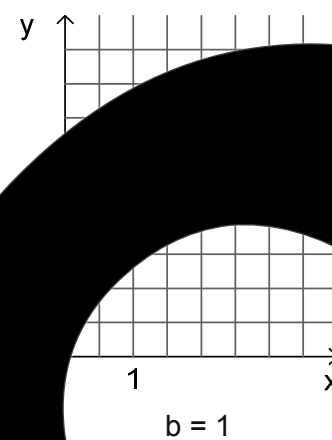
- ☐ $H(x) = 0,25x^2 + x + 1$
☐ $H(x) = 0,25x^2 + x$
☐ $H(x) = 0,25x^2 + x - 1$



Ü2.2 Berechnen Sie zur gegebenen Randfunktion $g(x)$ eine Stammfunktion $F(x)$:

- a) $f(x) = x + 2$ $F(x) =$ _____
 b) $f(x) = 3$ $F(x) =$ _____
 c) $f(x) = x - 1$ $F(x) =$ _____
 d) $f(x) = -x$ $F(x) =$ _____
 e) $f(x) = 2x + 5$ $F(x) =$ _____
 f) $f(x) = -10x$ $F(x) =$ _____
 g) $f(x) = 0,25x + 0,5$ $F(x) =$ _____
 h) $f(x) =$ _____

Die Randfunktion $f(x) = 0,5x + 2$ ergibt sich zur Stammfunktion $F(x) = 0,25x^2 + 2x$. Setzt man in die Stammfunktion für x einen Wert b ein, so erhält man eine Fläche. Skizzieren Sie diese Fläche ohne Rechnung für die jeweils gegebenen Werte b in den Diagrammen unten.



Raum für Notizen:



Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Integralrechnung
selbstorganisiert erlernen



Kapitel

Berechnung von Fläche
Stammfunktion



Kapitel 1 – Rand- und Flächeninhaltsfunktion	7
Kapitel 2 – Von der Flächeninhaltsfunktion zur Stammfunktion	16
Kapitel 3 – Berechnung von Flächen mit der Stammfunktion.	25
Kapitel 4 – Flächen unter Kurven	49
Kapitel 5 – Rechenregeln für Integrale	63
Anwendung der Integralrechnung	
Kapitel 6 – Kontextbezogene Bedeutung von Flächen	71
Kapitel 7 – Parametrauflösung	77
Kapitel 8 – Rekonstruktion von Funktionen	81
Kapitel 9 – Volumenberechnung	87
Kapitel 10 – Ungleichungen und Integrale	89
Vertiefung der Integralrechnung	
Kapitel 11 – Lineare Substitution	91
Kapitel 12 – Allgemeines Substitutionsverfahren	99
Kapitel 13 – Partielle Integration und Produktintegration	103
Kapitel 14 – Beispiele zur Integration bei e-Funktionen	107
Kapitel 15 – Logarithmische Integration	111

Kapitel 3: Berechnung von Flächen mit der Stammfunktion

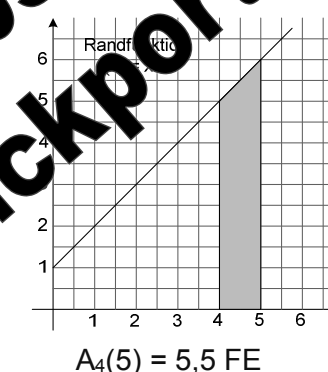
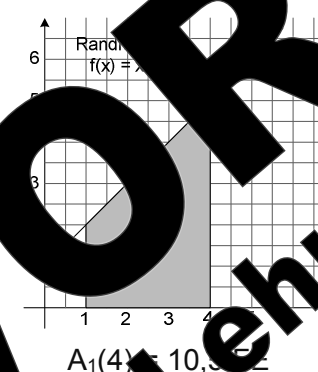
Bisher wurden die Flächen zwischen einer Geraden und der x-Achse mit Hilfe der Flächeninhaltsfunktion $A_a(x)$ berechnet. Nun soll das Verfahren verallgemeinert werden, indem die Stammfunktion zur Berechnung von Flächen herangezogen wird.

1. Grundlegende Betrachtung zur Flächenberechnung mit der Stammfunktion

Zunächst soll im folgenden Beispiel geklärt werden, wie man mit einer Stammfunktion eine Fläche berechnen kann und wie die Konstante in die Rechnung einfließt. Ergänzen Sie dazu die Angaben unten.

Rückblick:

Im Kapitel 2 wurden für die Funktion $f(x) = x + 1$ mit Hilfe der Flächeninhaltsfunktion $A_0(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$ die folgenden Flächen berechnet:



Nun sollen diese Flächen mit der Anwendung der Stammfunktion erneut berechnet und die bereits bekannten Ergebnisse als Vergleich herangezogen werden.

$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + c$ Ermitteln der allgemeinen Stammfunktion mit Konstante c aus der Flächeninhaltsfunktion

$F(0) = \frac{1}{2} \cdot 0^2 + 0 + c = c$ Berechnen der Stammfunktion für $x = \underline{\hspace{2cm}}$

$F(1) = \frac{1}{2} \cdot 1^2 + 1 + c = 0,5 + 1 + c = 1,5 + c$ Berechnen der Stammfunktion für $x = \underline{\hspace{2cm}}$

$F(4) = \frac{1}{2} \cdot 4^2 + 4 + c = \underline{\hspace{2cm}} + c$ Berechnen der Stammfunktion für $x = \underline{\hspace{2cm}}$

$F(5) = \frac{1}{2} \cdot 5^2 + 5 + c = \underline{\hspace{2cm}} + c$ Berechnen der Stammfunktion für $x = \underline{\hspace{2cm}}$

Berechnen Sie nun die folgenden Differenzen (beachten Sie, dass bei der Substitution von Klammern gesetzt werden müssen) und vergleichen Sie die Ergebnisse mit den Flächen, die oben dargestellten Flächen.

a) $F(4) - F(1) =$

b) $F(5) - F(4) =$

c) Vergleich:

Die über die Bildung der Differenzen $F(4) - F(1)$ und $F(5) - F(4)$ berechneten Zahlenwerte sind mit den Zahlenwerten für die oben berechneten Fläche.

Folgerung aus dem Vergleich:

Mit der Differenz $F(4) - F(1)$ berechnet man für die Randfunktion $f(x)$ die Fläche zwischen $x = 1$ und $x = 4$ und mit der Differenz $F(5) - F(4)$ berechnet man für die Randfunktion $f(x)$ die Fläche zwischen $x = 4$ und $x = 5$.

d) Was stellen Sie fest? (a) und b) bezüglich der Konstanten fest?

Folgerung aus der Feststellung:

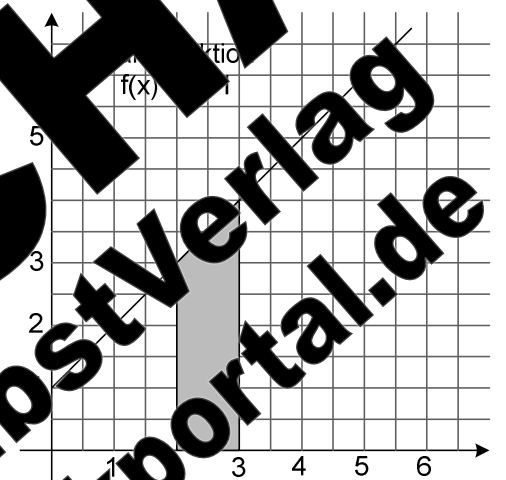
Merke

Die Konstante C einer Stammfunktion $F(x)$. Da die Konstante bei der Berechnung der Fläche jeweils gegebener linker bzw. rechter Grenze keine Rolle spielt, kann man sie bei der Berechnung weglassen.

2. Vereinbarungen zur Schreibweise

Bei der Berechnung von Flächen mit der Stammfunktion soll die folgende Schreibweise vereinbart werden:

Für die Randfunktion $f(x) = x + 1$ gilt bei der Berechnung der Fläche zwischen der unteren Grenze $x = 2$ und der oberen Grenze $x = 3$.



Angabe, welche Fläche berechnet wird, in der Schreibweise für den Flächeninhalt einer Funktion.

$$A_{2,3} = \left[\frac{1}{2}x^2 + x \right]_2^3 = \left(\frac{1}{2} \cdot 3^2 + 3 \right) - \left(\frac{1}{2} \cdot 2^2 + 2 \right) = 7,5 - 4 = 3,5 \text{ FE}$$

Zuerst wird 3 als obere Grenze in die Funktion eingesetzt, d.h. $F(3)$ wird berechnet.

Danach wird 2 als untere Grenze in die Stammfunktion eingesetzt, d.h. $F(2)$ wird berechnet.

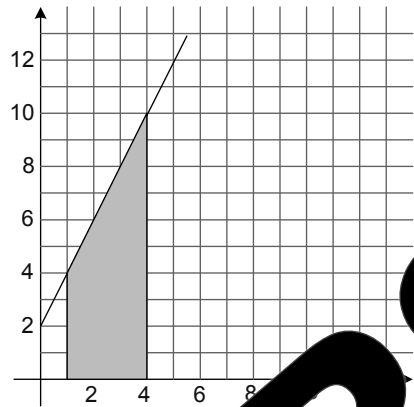
Allgemein

Die Funktion verläuft im Intervall $[a; b]$ oberhalb der x -Achse. Die Gerade $x = a$ als untere Grenze und der Geraden $x = b$ als obere Grenze die Fläche $A_a(b)$ ein. Man schreibt:

$$A_a(b) = F(b) - F(a)$$

3. Beispiel für die Berechnung einer Fläche mithilfe der Stammfunktion:

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2x + 2$. Zu berechnen ist die Fläche $A_1(2)$, d.h. die Fläche zwischen der unteren Grenze $x = 1$ und der oberen Grenze $x = 4$.



Randfunktion: $f(x) = 2x + 2$

Stammfunktion $F(x) = x^2 + 2x + c$

$$A_1(2) = [x^2 + 2x]_1^4$$

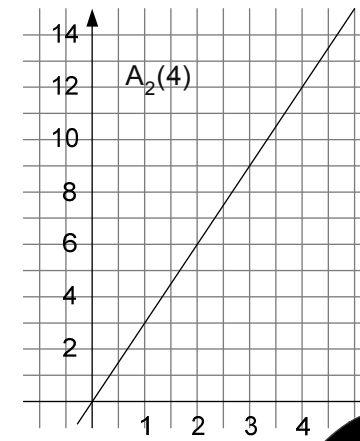
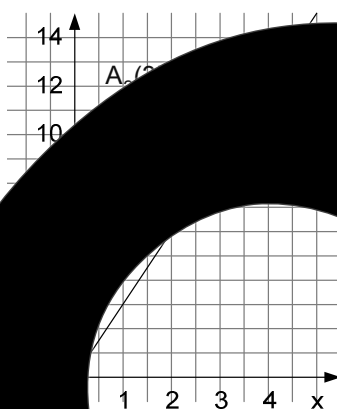
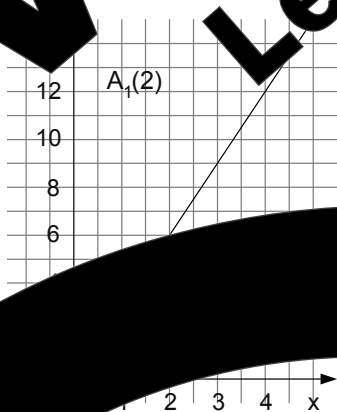
$$= (4^2 + 2 \cdot 4) - (1^2 + 2 \cdot 1)$$

$$= 20 - 3 = 17 \text{ FE}$$

Übungen

Ü3.1 Berechnen von Flächen

a) Gegeben ist die Randfunktion $f(x) = 3x$. Markieren Sie in den folgenden Koordinatensystemen, jeweils ein Beispiel oben, jeweils die Fläche $A_1(2)$, $A_2(3)$ und $A_2(4)$ und berechnen Sie jeweils die Maßzahl in der Einheit FE.



b) Berechnen Sie jeweils $A_1(2)$, $A_2(3)$ und $A_2(4)$ für die folgenden Funktionen:

- i) $f(x) = x + 2$ Ergebnisse zur Kontrolle: 4 FE, 12 FE, 28 FE
- ii) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ Ergebnisse zur Kontrolle: 2 FE, 2 FE, 4 FE
- iii) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$ Ergebnisse zur Kontrolle: 1,75 FE, 2,25 FE, 5 FE

Platz für Rechnungen:

	zu i)	zu ii)	zu iii)
$A_1(2)$			
$A_2(3)$			
$A_2(4)$			

4. Berechnung von Flächen links und rechts der y-Achse mithilfe der Stammfunktion

Gegeben sind die beiden Funktionen $f(x) = 2x + 2$ und $g(x) = x + 1,5$.

- a) Zeichnen Sie die Funktion jeweils in eines der gegebenen Koordinatensysteme ein.



- b) Mitteln Sie die Stammfunktionen

Für $f(x) = 2x + 2$ folgt: $F(x) = x^2 + 2x + c$

Für $g(x) = x + 1,5$ folgt: $G(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1,5x + c$

- c) Zeichnen Sie für die Funktion $f(x)$ die untere Grenze $x = -1$ und die obere Grenze $x = 2$ deutlich als senkrechte Geraden ein.
Zeichnen Sie für die Funktion $g(x)$ die untere Grenze $x = -1$ und die obere Grenze $x = 4$ deutlich als senkrechte Geraden ein.

Bestimmen Sie die Flächen mit der Stammfunktion und überprüfen Sie die Ergebnisse mit elementargeometrischen Betrachtungen.

Berechnung für die Randfunktion $f(x)$:

$$A_{-1}(0) = [F(x)]_{-1}^0 = \left[\frac{1}{2}x^2 + 2x + c \right]_{-1}^0 = \left[\frac{1}{2}(0)^2 + 2(0) + c \right] - \left[\frac{1}{2}(-1)^2 + 2(-1) + c \right] = 0 - \left[\frac{1}{2} - 2 + c \right] = 0 - \left[-\frac{3}{2} + c \right] = \frac{3}{2} - c$$

elementargeometrisch zum Vergleich: $A_{\text{Dreieck}} = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{(2 - (-1)) \cdot (2 - (-1))}{2} = \frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{9}{2}$

$$A_{-1}(2) = [F(x)]_{-1}^2 = \left[\frac{1}{2}x^2 + 2x + c \right]_{-1}^2 = \left[\frac{1}{2}(2)^2 + 2(2) + c \right] - \left[\frac{1}{2}(-1)^2 + 2(-1) + c \right] = (2 + 4 + c) - \left(\frac{1}{2} - 2 + c \right) = 6 + c - \left(-\frac{3}{2} + c \right) = 6 + c + \frac{3}{2} - c = \frac{15}{2}$$

elementargeometrisch zum Vergleich: $A_{\text{Dreieck}} = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{(2 - (-1)) \cdot (2 - (-1))}{2} = \frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{9}{2}$

Berechnung für die Randfunktion $g(x)$:

$$A_{-1}(0) = [G(x)]_{-1}^0 = \left[\frac{1}{2}x^2 + 1,5x + c \right]_{-1}^0 = \left[\frac{1}{2}(0)^2 + 1,5(0) + c \right] - \left[\frac{1}{2}(-1)^2 + 1,5(-1) + c \right] = 0 - \left[\frac{1}{2} - 1,5 + c \right] = 0 - \left[-\frac{1}{2} + c \right] = \frac{1}{2} - c$$

elementargeometrisch zum Vergleich: $A_{\text{Trapez}} = \frac{(a+b) \cdot h}{2} = \frac{(1,5 - (-1)) \cdot (1,5 - (-1))}{2} = \frac{(2,5) \cdot (2,5)}{2} = \frac{6,25}{2} = 3,125$

$$A_{-1}(4) = [G(x)]_{-1}^4 = \left[\frac{1}{2}x^2 + 1,5x + c \right]_{-1}^4 = \left[\frac{1}{2}(4)^2 + 1,5(4) + c \right] - \left[\frac{1}{2}(-1)^2 + 1,5(-1) + c \right] = (8 + 6 + c) - \left(\frac{1}{2} - 1,5 + c \right) = 14 + c - \left(-\frac{1}{2} + c \right) = 14 + c + \frac{1}{2} - c = \frac{29}{2}$$

elementargeometrisch zum Vergleich: $A_{\text{Trapez}} = \frac{(a+b) \cdot h}{2} = \frac{(4 - (-1)) \cdot (4 - (-1))}{2} = \frac{(5) \cdot (5)}{2} = \frac{25}{2} = 12,5$

- e) Vergleichen Sie die Ergebnisse und ergänzen Sie den folgenden Satz:

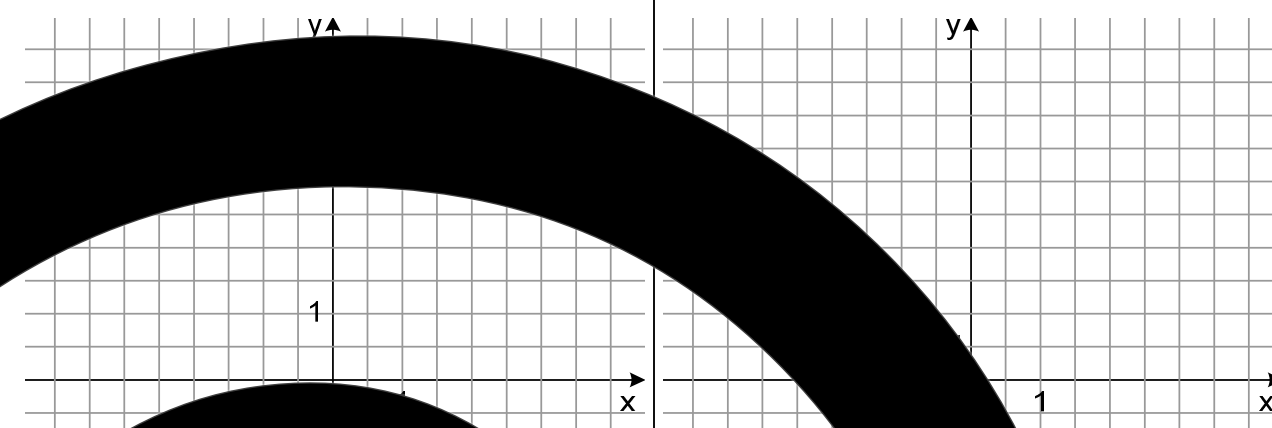
Bei Verwendung der Stammfunktion zur Berechnung einer Fläche zwischen der Randfunktion $f(x)$ und der x-Achse spielt die Lage der x-Achse keine Rolle.

Übungen

2. Zeichnen Sie die folgenden Geraden und berechnen Sie mithilfe der entsprechenden Stammfunktionen jeweils die Fläche zwischen der unteren Grenze $a = 2$ und der oberen Grenze $b = 3$ sowie zwischen $a = -1$ und $b = 1$. Markieren Sie jeweils die zu bestimmenden Flächen.

a) $f(x) = x + 2$

b) $f(x) = 2x + 5$



Stammfunktion: $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + c$

c) $f(x) = 0,25x + 0,5$

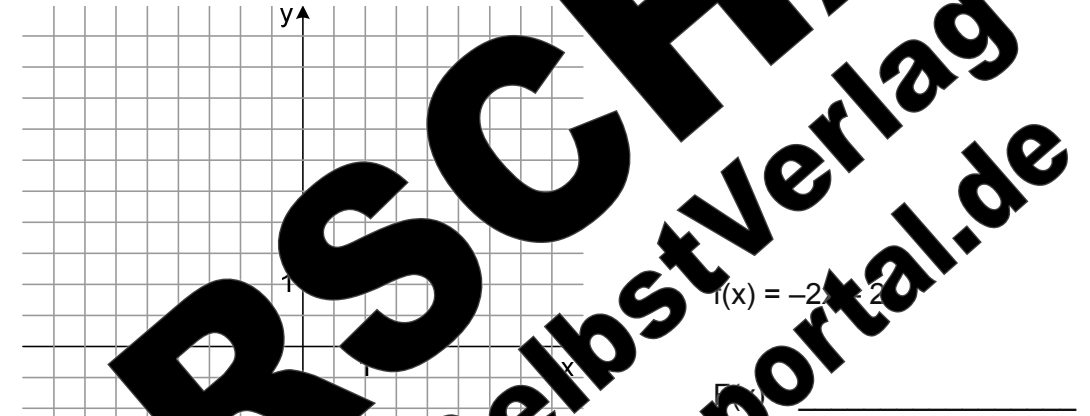


Stammfunktion: $F(x) =$ _____

Stammfunktion: $F(x) =$ _____

5. Berechnung von Flächen unterhalb der x-Achse mithilfe der Stammfunktion

Zeichnen Sie die Funktion $f(x) = -2x - 2$ in das Koordinatensystem. Berechnen Sie mithilfe der Stammfunktion die Fläche zwischen der unteren Grenze $a = -3$ und der oberen Grenze $b = 1$. Interpretieren Sie das Ergebnis mithilfe von entsprechenden geometrischen Betrachtungen und ergänzen Sie den Merksatz.



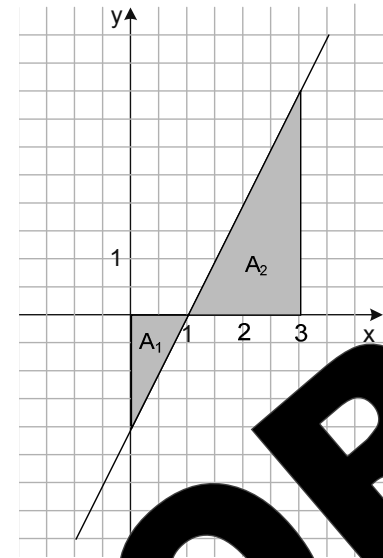
$F(1) = [F(x)]_a^b =$ _____

ation:

Flächen unterhalb der x-Achse sind _____. Man muss die Flächen unterhalb und oberhalb der x-Achse daher getrennt berechnen und addiert die Ergebnisse.

Beispiel für die Schreibweise bei der Berechnung von Flächen unterhalb und oberhalb der x-Achse:

Zu berechnen ist die Fläche zwischen der x-Achse und der Funktion $f(x) = 2x - 2$ im Intervall $[0;3]$.



$$f(x) = 2x - 2 \Rightarrow F(x) = x^2 - 2x + c$$

Flächenberechnung:

Da A_1 unter der x-Achse liegt, ist der Wert für die Fläche negativ. Daher wird mit Betragsstrichen gerechnet.

$$|A_1| = |A_0(1)| = \left| \left[x^2 - 2x \right]_0^1 \right| = |1 - 2 - 0| = 1 \text{ FE}$$

$$2. \text{ Fläche: } A_2 = A_1(3) - A_1(1) = \left[x^2 - 2x \right]_1^3 = (9 - 6) - (1 - 2) = 3 + 1 = 4 \text{ FE}$$

Da A_2 oberhalb der x-Achse liegt, ist der Wert für die Fläche positiv. Daher benötigt man keine Betragsstriche.

$$\text{Gesamtfläche: } A_1 + A_2 = 1 + 4 = 5 \text{ FE}$$

Übungen

Ü3.3 Berechnen Sie, warum es sinnvoll ist, die Flächen unterhalb und oberhalb der x-Achse separat zu berechnen.

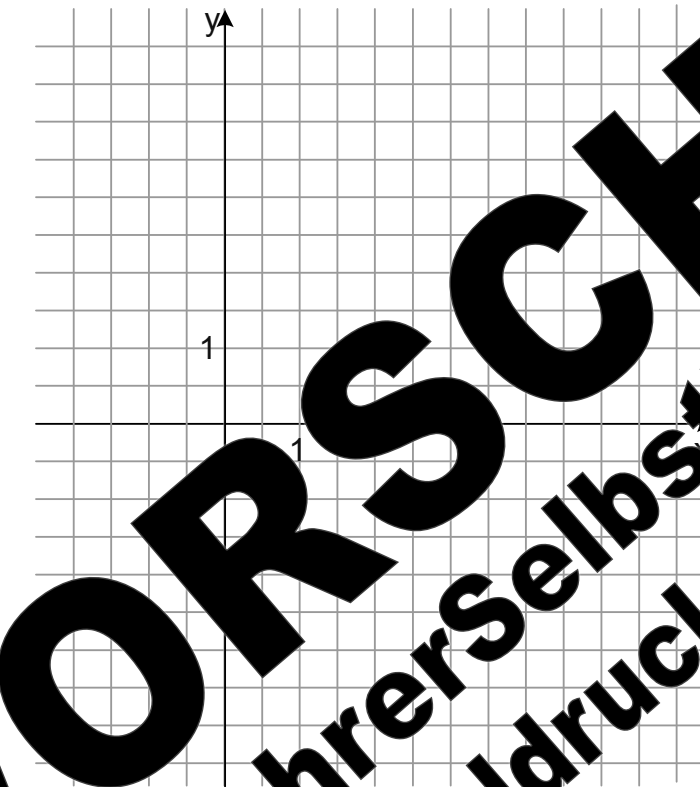
Grenzen $a = -1$ und $b = 3$ (Ergebnis: $A = 10 \text{ FE}$)

Grenzen $a = -3$ und $b = 6$ (Ergebnis: $A = 13,5 \text{ FE}$)

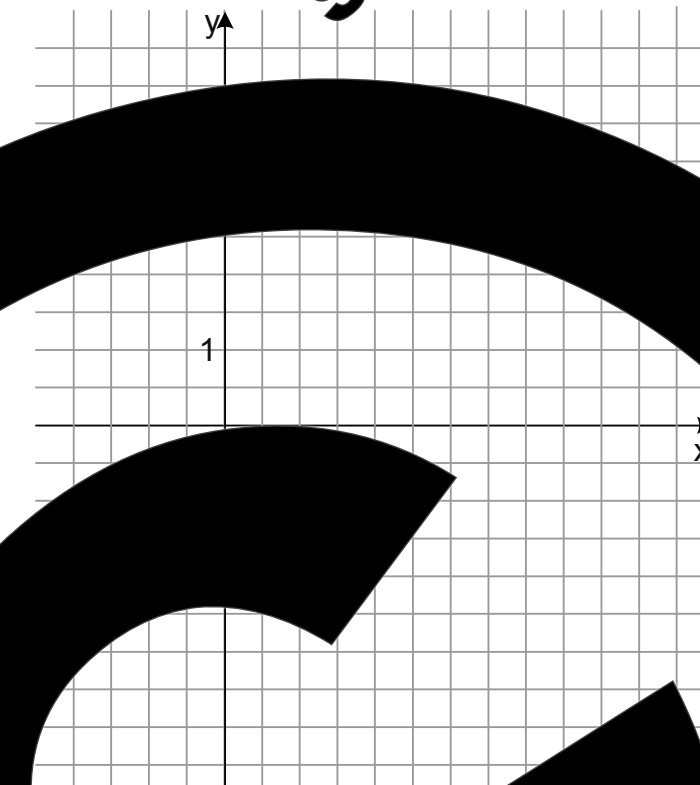
Begründung:

Rechnungen auf der Folgeseite

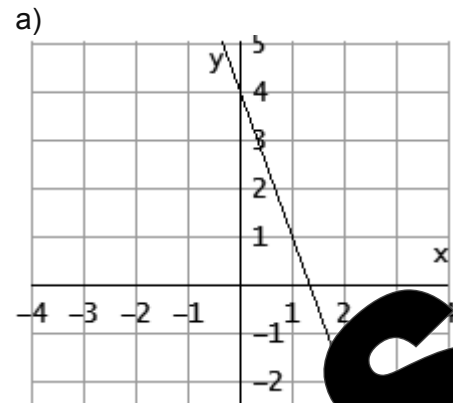
zu a)



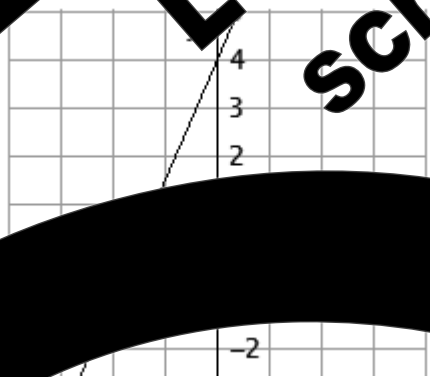
zu b)



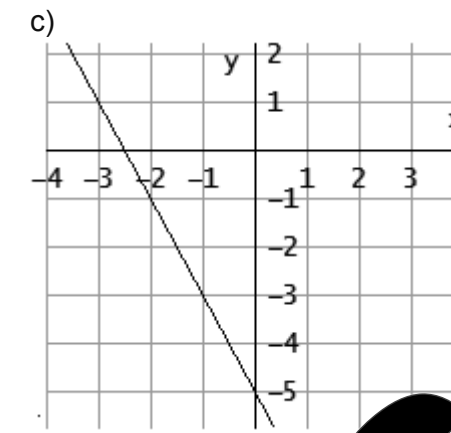
Ü3.4 Markieren Sie in allen Abbildungen jeweils das Dreieck, welches die Fläche mit der beiden Koordinatenachsen einschließt. Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks zunächst elementargeometrisch und dann mithilfe der Stammfunktion.



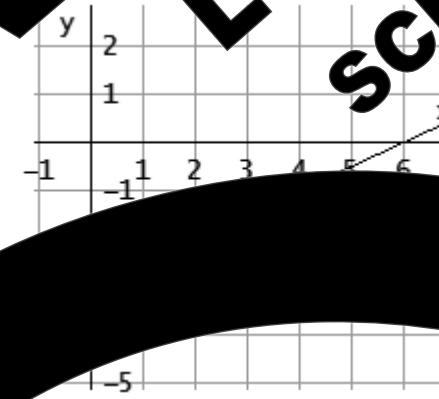
$$a(x) = -3x$$



$$b(x) = 2,5x + 4$$



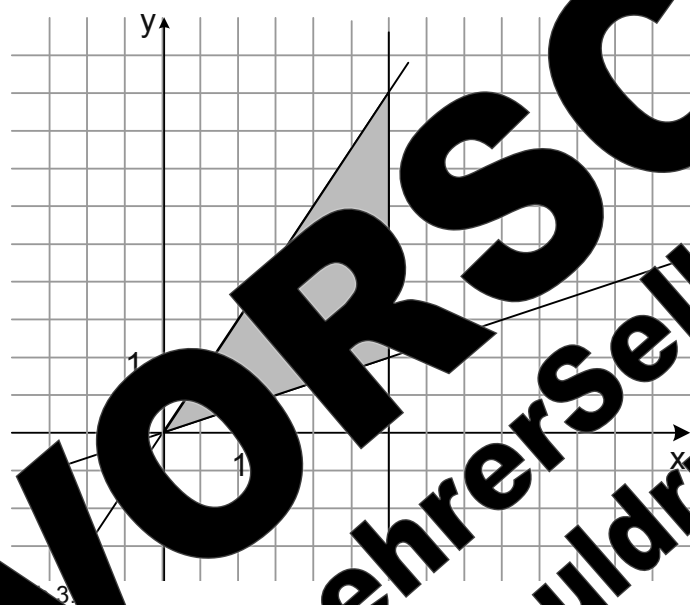
$$c(x) = -2x - 5$$



$$d(x) = 0,5x - 3$$

6. Berechnung von Flächen zwischen zwei Funktionen

In der Abbildung ist eine dreieckige Fläche durch die obere Funktion $f(x) = 2x$ und die untere Funktion $g(x) = \frac{1}{3}x$ sowie durch die senkrechte Gerade $x = 3$ begrenzt. Die Fläche des markierten Dreiecks soll nun mit drei unterschiedlichen Methoden berechnet werden. (Kontrollergebnis: 5,25 FE)



- a) Bestimmen Sie die Fläche des von den drei Geraden begrenzten Dreiecks mithilfe von herkömmlichen elementargeometrischen Mitteln und einem möglichst geringen Rechenaufwand.

Erläutern Sie die geometrische Bedeutung des folgenden Ansatzes und führen Sie dann die Berechnung durch.

$$A_{\text{Dreieck}} = [F(x)]_0^3 - [G(x)]_0^3$$

Erläuterung:

Ang:

$$= [F(x)]_0^3 - [G(x)]_0^3 =$$

- c) Im Folgenden wird eine weitere Möglichkeit für die Flächenberechnung angegeben. Hier wird zunächst die Differenz $h(x)$ zwischen den beiden Randfunktionen gebildet. Die Differenz zwischen den beiden Randfunktionen wird als Differenzenfunktion bezeichnet. Die Berechnung der Differenzenfunktion erfolgt über den Ansatz:

$$h(x) = \text{obere Funktion} - \text{untere Funktion} \\ h(x) = f(x) - g(x)$$

Nach dem Einsetzen der beiden Funktionen in den Ansatz werden die folgenden Rechenschritte durchgeführt. Erläutern Sie die Bedeutung.

$$h(x) = f(x) - g(x) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{3}x = \frac{7}{6}x$$

$$H(x) = \frac{7}{12}x^2 + c$$

$$A_{\text{Dreieck}} = \left[\frac{7}{12}x^2 \right]_0^3 = \frac{7}{12} \cdot 9 = \frac{63}{12} = 5,25$$

drei Wege haben, das Ergebnis 5,25 FE geliefert. Begründen Sie, warum es bei Anwendung der Stammfunktion günstiger ist, den Weg von Aufgabenteil c) zu verwenden.

Bestimmen Sie die Fläche des von den oben angegebenen Funktionen $g(x)$

$$k(x) = \text{untere Funktion} - \text{obere Funktion} \\ k(x) = g(x) - f(x)$$

und des Ergebnisses, welcher Fehler auftritt.

Ergänzen Sie zu einem Merksatz:

Berechnung der Fläche zwischen zwei Funktionen oberhalb der x-Achse

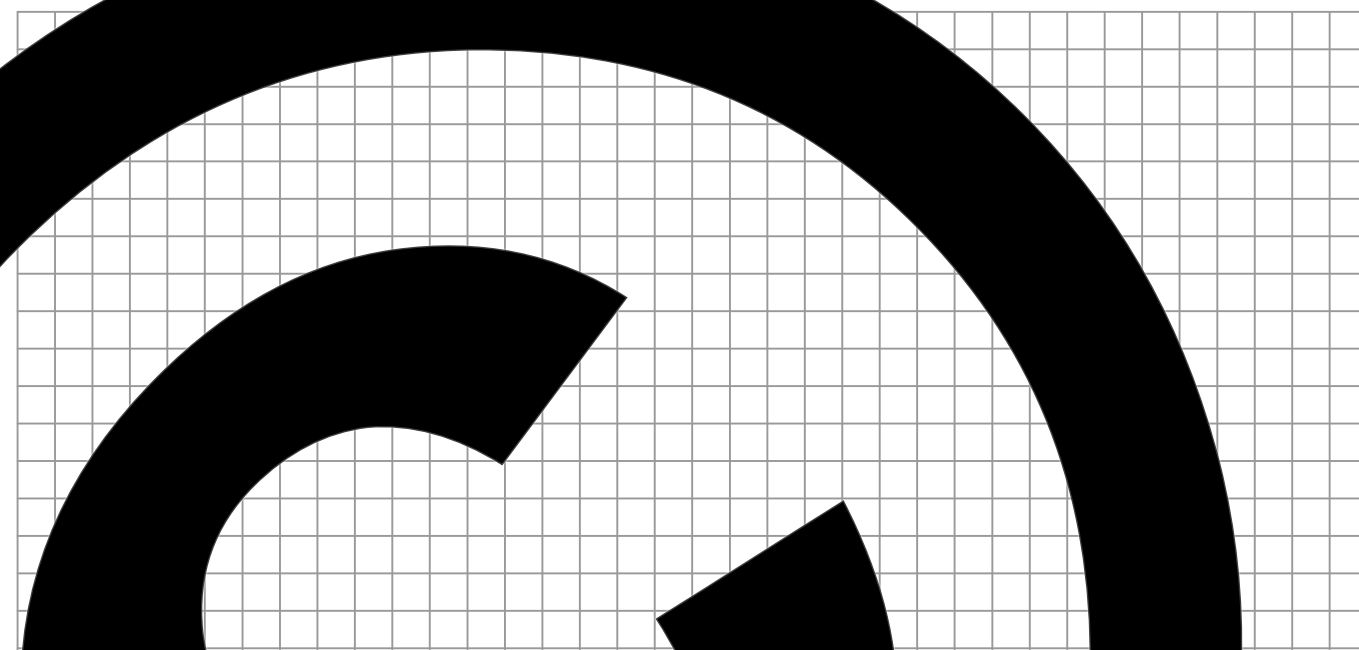
Man bildet die Differenzenfunktion $h(x)$ über

$h(x) =$ _____ Funktion – _____ Funktion

und berechnet die Fläche mit der Stammfunktion $H(x)$.

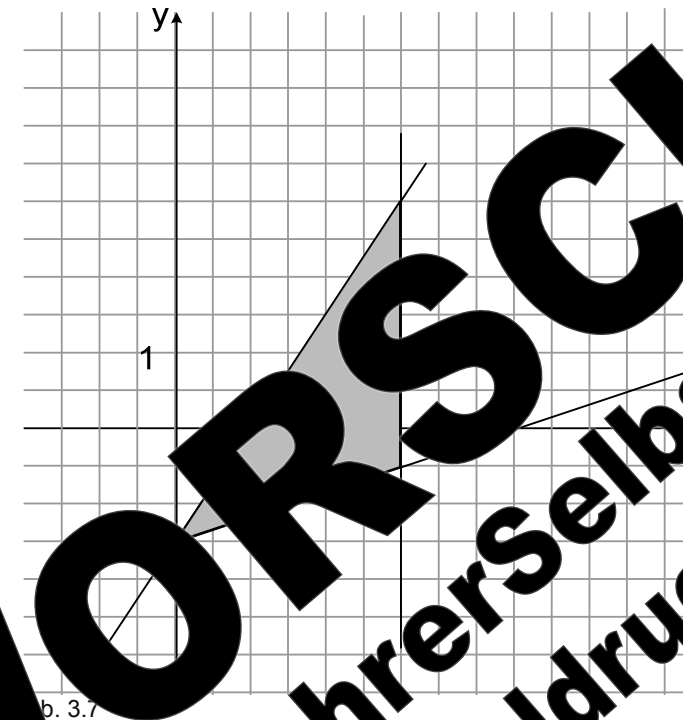
Übungen

Ü3.5 Gegeben sind die Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = x + 1$ sowie die Gerade $x = 2$. Zeichnen Sie die Geraden und berechnen Sie die Fläche, welche von den drei Geraden eingeschlossen wird. Berechnen Sie dies nach dem Hilfsfunktionsstammfunktionsansatz. Ermitteln Sie dazu zunächst eine geeignete Differenzfunktion $h(x)$.



7. Berechnung von Flächen zwischen zwei Geraden unterhalb und oberhalb der x-Achse

Die folgende Abbildung zeigt die Funktionen $f(x) = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$ und $g(x) = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$ sowie die Gerade $x = 3$.



Berechnen Sie die Flächen zwischen den Geraden zunächst mit den zugehörigen Funktionsbezeichnungen und anschließend mit der Differenzfunktion $h(x)$.

$h(x) =$ _____ obere Fkt. – untere Fkt.

$h(x) =$ _____

$h(x) =$ _____

$h(x) =$ _____

$h(x) =$ _____

Vergleichen Sie die Fläche des entstandenen Dreiecks mit der Fläche in Abb. 3.6. Beschreiben Sie, wie die Fläche in Abb. 3.7 aus der Fläche in Abb. 3.6 hervorgeht und begründen Sie damit, warum die beiden Flächen gleich groß sind.

Berechnen Sie mit der Differenzfunktion die Fläche für Abb. 3.7 und begründen Sie anhand der Rechnung, warum die Berechnung der beiden Randfunktionen keine Rolle bei der Flächenberechnung über die Differenzfunktion spielt.

$H(x) =$ _____

$A_0(3) =$ _____

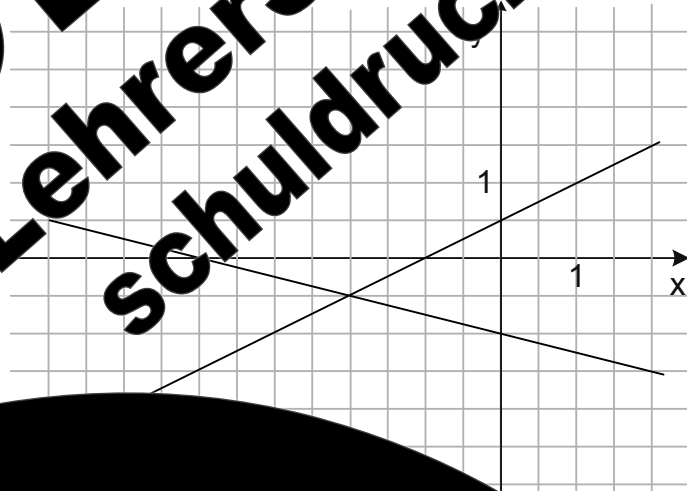
Ergänzen Sie den folgenden Merksatz:

Fläche zwischen zwei linearen Funktionen

Wenn man die Fläche zwischen zwei Funktionen mithilfe der Differenzfunktion $h(x)$ berechnet, spielt es _____ Rolle, ob die Funktionen vollständig ober- oder unterhalb oder teilweise ober- oder unterhalb der x -Achse verlaufen.

8. Berechnung von Flächen zwischen zwei sich schneidenden Geraden

Gegeben sind die beiden Geraden $f(x) = -\frac{1}{4}x - 1$ und $g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$. Markieren Sie zwischen den Grenzen _____ und _____ die Fläche zwischen den beiden Geraden.



_____ dass man die Fläche zwischen $f(x)$ und $g(x)$ mithilfe der Differenzfunktion $h(x)$ ermitteln kann. Erläutern Sie, wie man in der folgenden Rechnung die Fläche das falsche Ergebnis 0FE erhält:

$$h(x) = f(x) - g(x) = -\frac{1}{4}x - 1 - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$$

$$A_{-4}(0) = \left[H(x) \right]_{-4}^0 = \left(-\frac{3 \cdot 16}{8} + \frac{3 \cdot 4}{2} \right) = 0 - (-6 + 6) = 0$$

- b) Wie Sie sicher erkannt haben, wurde bei der Rechnung von Aufgabe 8 nicht berücksichtigt, dass die beiden Funktionen links und rechts vom Schnittpunkt ihre Positionen hinsichtlich der oberen und unteren Funktion tauschen. Eine Möglichkeit dies zu berücksichtigen ist, die Fläche in zwei Teile zu berechnen, wird im Folgenden dargestellt. Erläutern und ergänzen Sie die folgenden Rechenschritte.

(1) Ansatz: $A_{-4}(0) = A_{-4}(-2) + A_{-2}(0)$

(2) Intervall $[-4; -2]$:

$$h(x) = f(x) - g(x) = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$$

$$A_{-4}(-2) = \left[H(x) \right]_{-4}^{-2}$$

$$= \left(-\frac{3}{4} \cdot (-2) - \frac{3}{2} \right) - \left(-\frac{3}{4} \cdot (-4) - \frac{3}{2} \right) = (1.5 - 1.5) - (3 - 1.5) = 0 - 1.5 = -1.5$$

(3) Intervall $[-2; 0]$:

$$h(x) = g(x) - f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{4}x - 1 \right) = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$$

$$A_{-2}(0) = \left[H(x) \right]_{-2}^0 = \left(\frac{3}{4} \cdot 0 + \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{3}{4} \cdot (-2) + \frac{1}{2} \right) = 0.5 - (-1.5 + 0.5) = 0.5 - (-1) = 1.5$$

$$= 0 - \left(-\frac{3}{4} \cdot (-2) - \frac{3}{2} \right) = 0 - (1.5 - 1.5) = 0$$

$$= -\left(-\frac{3}{4} \cdot (-2) - \frac{3}{2} \right) = 1.5 \text{ FE}$$

Da $f(x)$ und $g(x)$ die Position untere und obere Funktion tauschen, gilt hier nun: $h(x) = g(x) - f(x) = - (f(x) - g(x))$. Man muss die Differenzfunktion nicht neu berechnen, sondern nur alle Vorzeichen von $h(x)$ umdrehen.

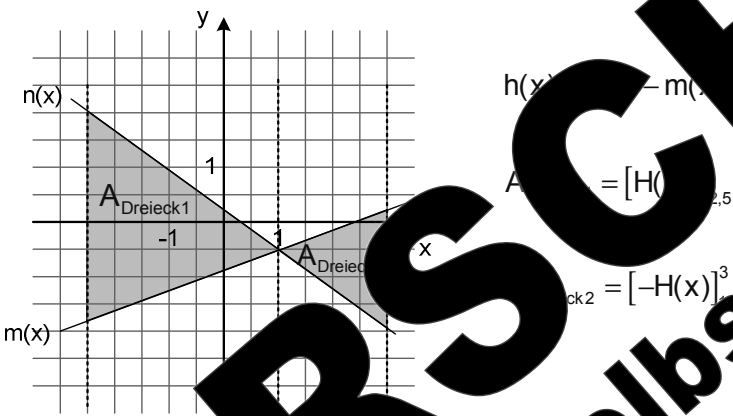
Ergänzen Sie den folgenden Merksatz:

Fläche zwischen zwei sich schneidenden Funktionen

Bei der Berechnung der Fläche zwischen zwei sich schneidenden Funktionen muss man sich unabhängig von der Position der Funktionen bezüglich der x - und y -Achse mithilfe der Differenzfunktion $h(x)$ berechnen. An jedem Schnittpunkt muss eine neue Differenzfunktion $h(x)$ aufgestellt werden und hinzugefügt und immer darauf achten, dass man das richtige Intervall für $h(x)$ wählt. Es gilt: $h(x) =$ _____ Funktion - _____ Funktion. Die neue Differenzfunktion bedeutet dies, dass man beim Wechsel des Intervalls bei $h(x)$ bzw. _____ einfach alle Vorzeichen _____.

Ü3.6 Die markierten Flächen sollen berechnet werden. Zeichnen Sie das Diagramm noch einmal in Stellen mithilfe von senkrechten Geraden Grenzen ein, und geben Sie jeweils den Ansatz für die Flächenberechnung wie im Beispiel an:

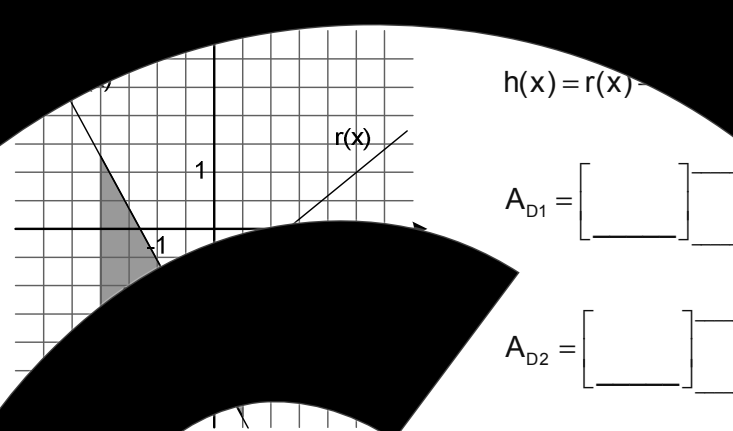
Beispiel:



a)



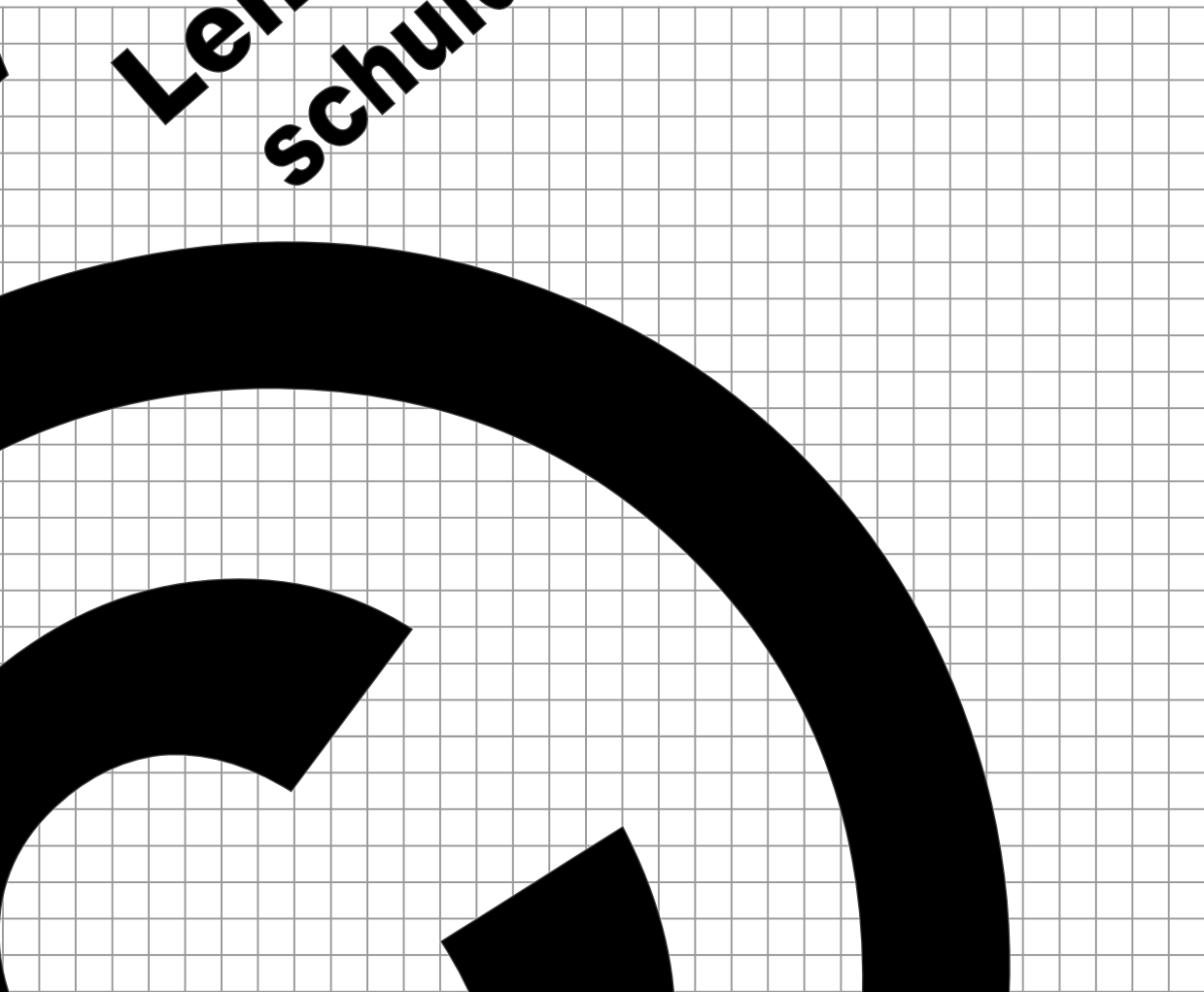
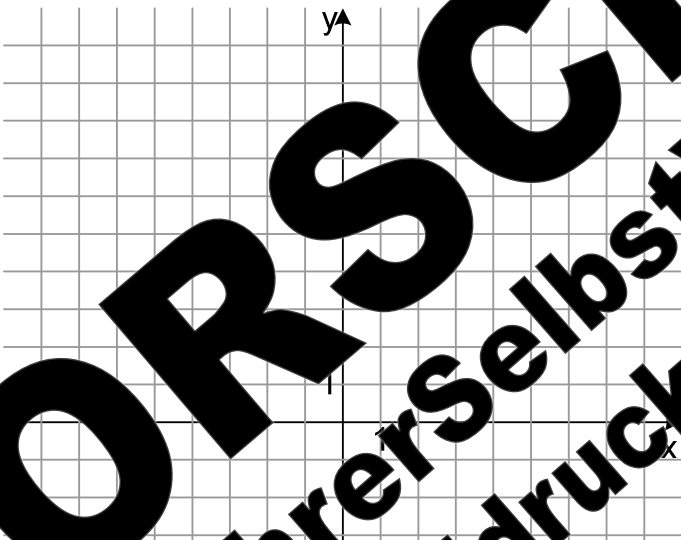
b)



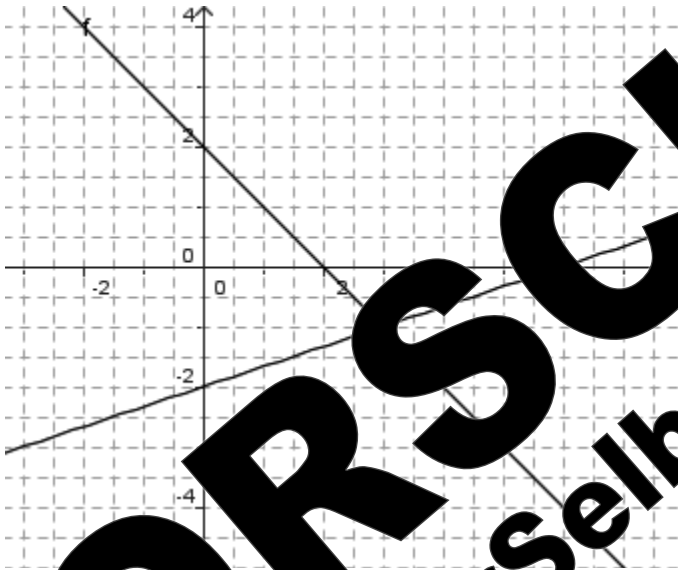
Zusatzaufgaben zum Festigen und Wiederholen

Übungen

Ü3.7 Zeigen Sie unter Verwendung der Differenzenfunktion, dass die Fläche, welche von den Geraden $f(x) = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$, $g(x) = -\frac{3}{2}x + 6$ und $x = 0$ begrenzt wird, die Maßzahl $A = 30,625$ FE ergibt.



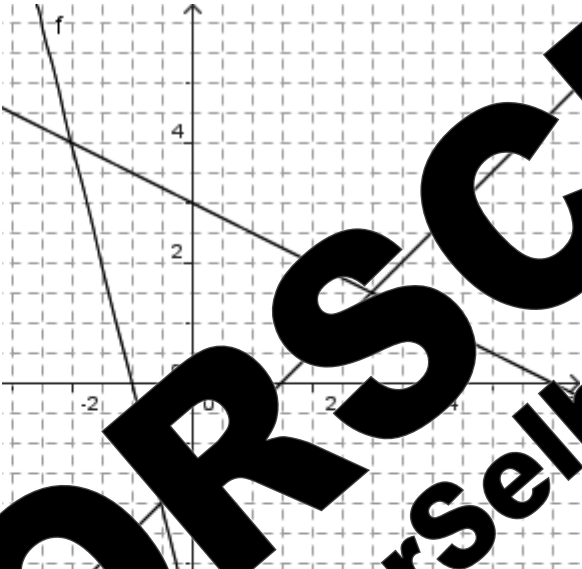
Ü3.8 Berechnen Sie die Fläche zwischen den beiden Geraden $u(x) = -x + 3$ und $w(x) = x + 2$ zwischen der unteren Grenze $a = 0$ und der oberen Grenze $b = 3$.



(Ergebnis: $A = \frac{9}{2}$ FE)

Ü3.9 Berechnung unregelmäßiger Dreiecke im Koordinatensystem mithilfe von Stammfunktionen

Gegeben sind die Geraden $f(x) = -4x - 4$, $g(x) = -\frac{1}{5}x + 3$ und $h(x) = 1,5$.



Berechnen Sie die Fläche mithilfe der Methode der Stammfunktion.

- Die Koordinaten der Eckpunkte können hier aus der Abbildung abgelesen werden.
- Teilen Sie die Fläche durch Einzeichnen von geeigneten senkrechten Geraden so in zwei Teilflächen ein, dass die Methode der Stammfunktion anwendbar ist.

(Ergebnis: $A = 13,125$ FE)

Ü3.10 Zeichnen Sie die Geraden $u(x) = -\frac{1}{3}x - 2$, $v(x) = x + 2$ sowie $w(x) = -x$ und berechnen Sie die Fläche des von den drei Geraden begrenzten Dreiecks. (Ergebn: 2 FE)



Integralrechnung
selbstorganisiert erlernen



Kapitel 3
Flächen unter Kurven



Kapitel 1 – Rand- und Flächeninhaltsfunktion	7
Kapitel 2 – Von der Flächeninhaltsfunktion zur Stammfunktion	16
Kapitel 3 – Berechnung von Flächen mit der Stammfunktion	25
Kapitel 4 – Flächen unter Kurven	49
Kapitel 5 – Rechenregeln für Integrale	63

Anwendung der Integralrechnung

Kapitel 6 – Kontextbezogene Bedeutung von Flächen	71
Kapitel 7 – Parametrisierung	77
Kapitel 8 – Rekonstruktion von Funktionen	81
Kapitel 9 – Volumenberechnung	87
Kapitel 10 – Uneigentliche Integrale	89
Kapitel 11 – Lineare Substitution	91
Kapitel 12 – Allgemeine Substitutionsverfahren	99
Kapitel 13 – Partielle Integration und Produktintegration	103
Kapitel 14 – Beispiele zur Integration bei e-Funktionen	107
Kapitel 15 – Logarithmische Integration	111

Gesamte Lernaktivität wird selbstorganisiert erlernt (02-030-251)

St...

Alle Rechte vorbehalten. All rights reserved.

Druck, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte, aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

SelbstVerlag

tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germany)

Lehrerselbstverlag.de

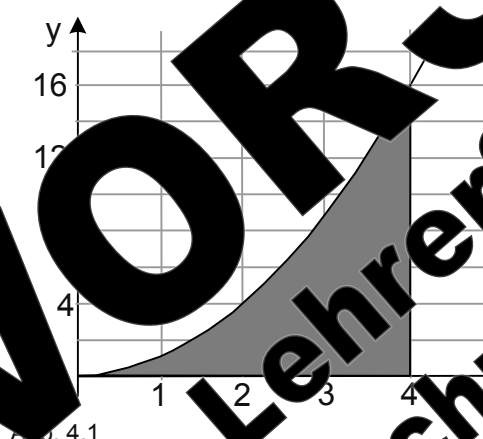
www.f-druck.de

Kapitel 4: Flächen unter Kurven

Nachdem Sie gelernt haben, dass man bei Geraden als Randfunktion $g(x)$ und der x-Achse $y=0$ die Fläche berechnen kann, die zwischen einer Gerade $g(x)$ und der x-Achse zwischen zwei senkrechten Geraden liegt, welche die untere Grenze $x=a$ und die obere Grenze $x=b$ bilden, sollen diese Kenntnisse nun für nicht lineare Randfunktionen, d.h. Kurven, erweitert werden. Dafür wird zunächst die möglichst einfache Randfunktion $f(x) = x^2$ betrachtet.

1. Formulieren einer Hypothese

In der Abbildung ist die Randfunktion $f(x) = x^2$ dargestellt. Formulieren Sie unter Verwendung Ihrer Kenntnisse hinsichtlich des Zusammenhangs zwischen Randfunktion und Stammfunktion eine Hypothese über die Berechnung der Fläche unter der Kurve.



Hypothese:

Als den Überlegungen zur Berechnung von Flächen unter Geraden kann man für die markierte Fläche unter der Funktion $f(x) = x^2$ die folgende Vermutung über eine Stammfunktion ableiten:

Stammfunktion von $f(x)$: $F(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

2. Berechnen der Fläche unter Annahme der Hypothese

Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche zwischen der Randfunktion $f(x)$, der x-Achse und der vertikalen Linie bei $x=4$ aufgrund Ihrer Hypothese mit der

Flächeninhalt von $a = 0$ bis $b = 4$: $A_0(4) = \underline{\hspace{2cm}}$

$A_0(4) = \underline{\hspace{2cm}}$

Vermutung: $A_0(4) = \underline{\hspace{2cm}}$ FE

3. Test zur Gültigkeit der Hypothese

Die Gültigkeit der oben erstellten Hypothese zu überprüfen, geht man wie folgt vor: Die Fläche wird zunächst durch treppenförmige Rechtecke angenähert. Liegen die Rechtecke unter der Randfunktion, so beträgt die Summe

aller Rechteckflächen als Obersumme O . Liegen die Rechteckflächen unterhalb der Randfunktion, so bezeichnet man die Summe aller Rechteckflächen als Untersumme U . Berechnen Sie in Aufgabe a) und b) die Fläche der jeweils abgebildeten Rechtecke bzw. Trapeze sowie die Summe aller Rechteck- und Trapezflächen.

a) Annäherung der Fläche über die Bildung der Obersumme O mit Balken

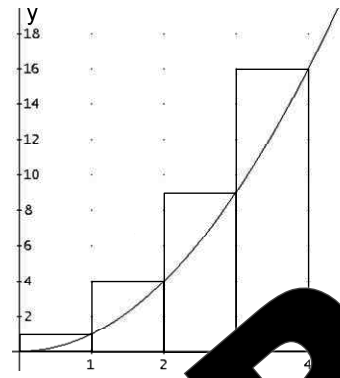


Abb.4.3.1

Berechnung der Rechteckflächen:

$$O_0(1) =$$

$$O_1(2) =$$

$$O_2(3) =$$

$$O_3(4) =$$

Summe: $O =$

Stellen Sie sich: "idealerweise" oder "kleiner als die" oder "größer als die":

Die genaue Fläche unter der Kurve ist _____ über die Summe O berechnete Fläche.

b) Annäherung der Fläche über die Bildung der Untersumme U mit Balken

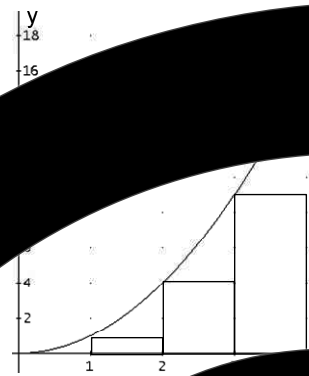


Abb.4.3.2

Berechnung der Rechteckflächen:

$$U_2(3) =$$

$$U_3(4) =$$

Summe: $U =$

Sie entsprechend zur Obersumme: Die genaue Fläche unter der

über die Untersumme U berechnete Fläche.

Da die Obersumme einen zu großen Wert und die Untersumme einen zu kleinen Wert für die markierte Fläche liefert, soll ein Näherungswert für die gesuchte Fläche durch Mittelwertbildung bestimmt werden:

$$A_{\text{Mittel}} =$$

Formulieren Sie ein vorläufiges Ergebnis hinsichtlich der Richtigkeit der Hypothese und der Vermutung hinsichtlich des über die Stammfunktion berechneten Flächeninhalts:

c) Zur Ober- und Untersumme alternative Annäherung der Fläche mithilfe von 4 Trapezen

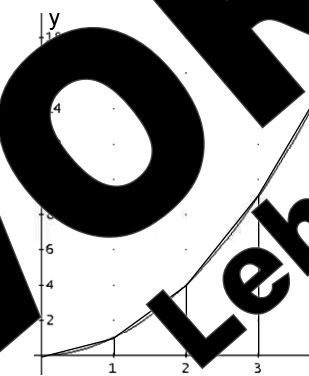


Abb.4.3.3

Berechnung der Trapezflächen:

$$T_0(1) =$$

$$T_1(2) =$$

$$T_2(3) =$$

$$T_3(4) =$$

Summe: $T =$

Entscheiden Sie sich, ob die Summe der Trapezflächen größer oder kleiner als die Fläche unter der Kurve ist.

_____ als die Trapezfläche.

Vergleichen Sie das Ergebnis mit der Obersummenberechnung.

Vergleich: _____

4. Verbesserung

Die Obersumme und Untersumme bzw. dem Trapez berechnete Fläche kommt dem mit der Stammfunktion berechneten Wert schon sehr nahe. Man kann annehmen, dass die Hypothese richtig ist. Im nächsten Abschnitt soll die Näherung verbessert werden. Dazu wird für die Berechnung der Fläche unter der Funktion $f(x) = x^2$, der x -Achse, der unteren Grenze $a = 0$ und der oberen Grenze $b = 3$ nur die Betrachtung der Obersummen weiter verfolgt.

a) Hypothese zur Fläche $A_0(3)$ für die Randfunktion $f(x) = x^2$

Geben Sie anhand der Hypothese zur Flächenberechnung mit der Randfunktion $f(x) = x^2$ die Vermutung für die Maßzahl der folgenden gesuchten Fläche an:

$$A_0(3) = \underline{\hspace{2cm}}$$

b) Beschreiben des Näherungsverfahrens

Beschreiben Sie das Näherungsverfahren anhand der Abbildungen 4.4.1 bis 4.4.4.

c) Näherungsverfahren

Da es sehr aufwendig ist, per Hand die Fläche einer Vielzahl von Balken zu berechnen, kann man das Näherungsverfahren beispielsweise mit dem Computerprogramm Geogebra berechnen. In den vielen Abbildungen wird die Anzahl der Balken durch den Wert n angegeben, und der Zahlenwert O gibt jeweils die von Geogebra ermittelte Obersumme an.

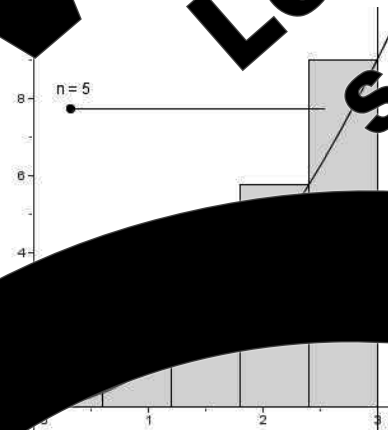


Abb. 4.4.1

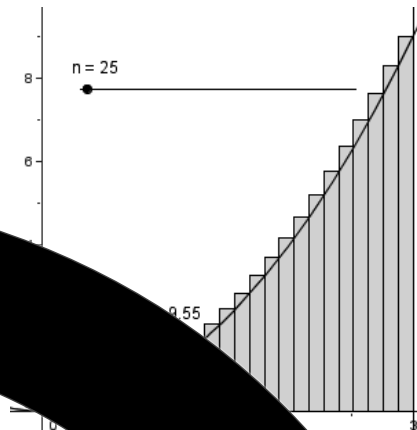


Abb. 4.4.2

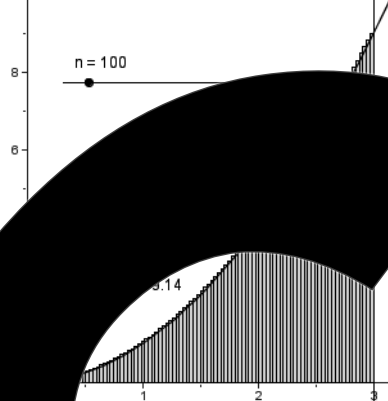


Abb. 4.4.3

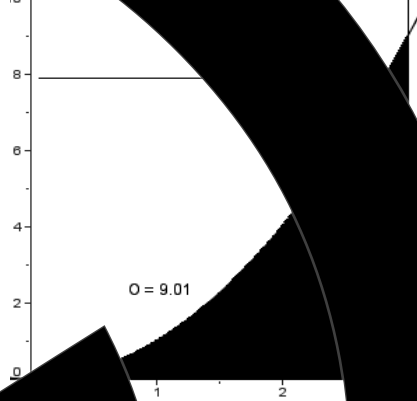


Abb. 4.4.4

Notieren Sie den Wert für die Obersumme zu der jeweiligen Anzahl n der Balken:

$$n = 5: \quad O = \underline{\hspace{2cm}} \text{ FE}$$

$$n = 25: \quad O = \underline{\hspace{2cm}} \text{ FE}$$

$$n = 100: \quad O = \underline{\hspace{2cm}} \text{ FE}$$

$$n = 1000: \quad O = \underline{\hspace{2cm}} \text{ FE}$$

Vergleichen Sie die Werte für die Obersumme O mit dem vermuteten Wert für die Fläche $A_0(3)$ und begründen Sie, warum man davon auslegen kann, dass die oben notierte Vermutung über den genauen Inhalt der Fläche $A_0(3)$ richtig ist.

Vergleich:

Begründung:

Zusammenfassung:

Für die Berechnung der Fläche $A_0(x)$ gilt bei der Parabel $f(x) = x^2$: $A_0(x) = \frac{1}{3}x^3$

Damit hat die Randfunktion $f(x) = x^2$ die Stammfunktion: $F(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

Formeln für Randfunktionen der Form $f(x) = ax^n$ und die Stammfunktion $F(x)$ für Geraden und der Stammfunktion

formulieren Sie aufgrund Ihrer Kenntnis bei Stammfunktionen, Geraden und der Stammfunktion von $f(x) = x^2$ sowie den Ableitungsregeln der Differenzialrechnung die Regel, die angibt, wie man bei einer Funktion $f(x) = ax^n$ die Stammfunktion $F(x)$ bestimmt.

gilt: $F(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

in eigenen Worten:

6. Erweiternde und vertiefende Betrachtungen zur Ermittlung der Stammfunktion von $f(x) = x^2$

Die Betrachtungen in Abschnitt 4 sind Plausibilitätsbetrachtungen für die Richtigkeit der Hypothese zur Flächenberechnung bei Flächen mit nicht linearen Randfunktionen. In der Vorlesung soll, vor allem im Leistungskurs, die Gültigkeit dieser Hypothese zumindest für die Randfunktion $f(x) = x^2$ ausführlich bewiesen werden. In allen gängigen Schulbüchern ist der Beweis ebenfalls nachgeschlagen werden.

a) Erstellen einer Abbildung für die Obersumme bei n Balken und Festlegung von Bezeichnungen



Abb.4.6

b) Bezeichnungen:

- n : Anzahl aller Balken
- b : Gesamtbreite über alle Balken
- Δx : Breite eines Balkens
- x_i : rechte Grenze des i -ten Balkens

c) Festlegen der Grenzen:

- untere Grenze $a = 0$
- obere Grenze $b = x_n$

d) Bestimmung der Balkenbreite:

Bei n Balken gilt: $\Delta x = \frac{b}{n}$ und die Breite des i -ten Balkens ist $\Delta x = \frac{b}{n}$.

e) Erläutern Sie die in den Zeilen (1) bis (8) erfolgten Rechnungen und Formumformungsschritte.

$$(1) \quad O_0(b) = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n$$

$$(2) \quad O_0(b) = f(x_1) \cdot \Delta x + f(x_2) \cdot \Delta x + f(x_3) \cdot \Delta x + \dots + f(x_n) \cdot \Delta x$$

$$(3) \quad O_0(b) = [f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \dots + f(x_n)] \Delta x$$

$$(4) \quad O_0(b) = \left[f\left(1 \cdot \frac{b}{n}\right) + f\left(2 \cdot \frac{b}{n}\right) + f\left(3 \cdot \frac{b}{n}\right) + \dots + f\left(n \cdot \frac{b}{n}\right) \right] \Delta x$$

$$(5) \quad O_0(b) = \left[1 \cdot \frac{b^2}{n^2} + 4 \cdot \frac{b^2}{n^2} + 9 \cdot \frac{b^2}{n^2} + \dots + n^2 \cdot \frac{b^2}{n^2} \right] \frac{b}{n}$$

$$(6) \quad O_0(b) = \frac{b^2}{n^2} \left[1 + 4 + 9 + \dots + n^2 \right] \frac{b}{n} = \frac{b^3}{n^3} \left[1 + 4 + 9 + \dots + n^2 \right]$$

$$(7) \quad \left[1 + 4 + 9 + \dots + n^2 \right] = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6} = \frac{n^3}{6} \left(1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2} \right)$$

$$(8) \quad O_0(b) = \frac{b^3}{n^3} \left(1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2} \right) \frac{b}{n} = \frac{b^4}{n^4} \left(1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2} \right)$$

Mit dieser Formel wird die Summe der Quadratzahlen von 1 bis n berechnet. Kann man in Tafelwerk nachschlagen.

Lösung zu den einzelnen Zeilen:

(1) _____

(2) _____

(3) _____

(5) _____

(6) _____

(8) _____

7. Der Begriff Integral

Im Rahmen der Flächenberechnungen für Geraden und für die Parabel wurde bisher der Begriff "Stammfunktion" verwendet. Bei der Parabel konnte aus der Betrachtung von Geraden gewonnene Regel zur Bestimmung der Stammfunktion über das Integrieren der Randfunktion bestätigt werden, indem man die Fläche der Obersumme angenähert hat. Die Näherung an die wahre Fläche einer Kurve ist dabei durch ein Erhöhen der Anzahl der Balken erreicht worden. Hier ist dies nun festgestellt.

Ergänzen Sie: Je größer die Anzahl der Balken ist, desto _____ wurden die Balken und desto _____ nähern sich die Balken dem wahren Kurvenverlauf an. Je _____ Balken verwendet werden, desto besser ist die Annäherung der Fläche an die wahre Fläche zwischen Kurve und x-Achse.

Nachdem für den Rand der Ermittlung der Stammfunktion bereits der Begriff „Integrieren“ verwendet wurde, soll nun der mathematische Begriff „Integral“ definiert werden. Verdeutlichen Sie sich das schrittweise folgende Tabelle.

Erläuterung	Formelmäßige Darstellung
Die Stammfunktion für $f(x)$ wurde durch das Aufsummieren von Rechtecken hergeleitet. Wird die Anzahl der Balken sehr groß, gilt für n :	
Die Fläche eines beliebigen Balkens A_i wird mithilfe der Rechteckformel $A = \text{Länge} \cdot \text{Breite}$ dann wie nebenan berechnet.	$A_i = \begin{matrix} \text{Höhe des i-ten} \\ \text{Balkens} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} \text{Breite des i-ten} \\ \text{Balkens} \end{matrix}$ $A_i = f(x_i) \cdot \Delta x$
Wird die Fläche der Mathematik (übrigens der Summenbildung im Programm) mit dem Summensymbol $\sum$ (sprich: Summe bis n für ...)	
Werden zwischen der unteren Grenze 0 und der oberen Grenze b viele dieser Rechtecke aufsummiert, so nähert sich die Fläche der Fläche zwischen Kurve und x-Achse.	$A_0(b) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$

Der Ausdruck entspricht der Summe aus sehr vielen Balken der Obersumme, wobei jeder Balken fast die Breite Null hat. Berechnet wird damit die Näherung für die Fläche zwischen Randfunktion und x-Achse.

Wenn die Anzahl der Balken sehr groß wird, also n gegen ∞ läuft, dann wird die Breite der Balken immer kleiner (vgl. Abb. 4.4.1 bis 4.4.3) und nähert sich der Breite Null (vgl. Abb. 4.4.4). Damit geht auch Δx gegen Null. Man gibt im Grenzfall die Breite des Balkens dann nicht mehr mit Δx an, sondern man schreibt dx .

Für $\Delta x \rightarrow 0$ schreibt man im Grenzfall dx .

Um die Summe aus sehr vielen extrem schmalen Balken vom Grenzfall für $n \rightarrow \infty$ zu unterscheiden, schreibt man statt $\sum$ das Symbols für die Summenbildung $\int$ das Symbol $\int$ als **Integralsymbol**. Das Integralsymbol $\int$ steht für die Summe symbolisch.

$A_0(b) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \int_0^b f(x) dx$
sprich: Integral $f(x) dx$

Wenden Sie diese Schreibweise auf unsere ursprüngliche Aufgabenstellung und alle bisher erworbenen Kenntnisse an, wie Fläche zwischen einer Kurve und der x-Achse zu berechnen, an, folgt:

Betrachtungen bei Geraden

Aus der Betrachtung bei den Geraden wissen wir, dass man die Randfunktion integrieren muss, um eine Stammfunktion zu erhalten. Mit der Stammfunktion $F(x)$ kann man Fläche zwischen einer Geraden und der x-Achse berechnen.

$$A_0(b) = [F(x)]_0^b = F(b) - F(0) = F(b)$$

Betrachtungen bei Kurven

Aus Betrachtungen zur Grenzwertbildung bei den Balken der Obersumme wissen wir, dass die Fläche zwischen Kurve und x-Achse dem Integral entspricht.

$$A_0(b) = \int f(x) dx$$

Betrachtungen

Der Vergleich zwischen der Berechnung des Integrals durch die Summenbildung und der Integration über die Stammfunktion

$$A_0(b) = \int_0^b f(x) dx = [F(x)]_0^b = F(b) - F(0)$$

Man ermittelt die Fläche einer Funktion $f(x)$ und der x-Achse über das Integral der Funktion $f(x)$. Dies erfolgt über die Stammfunktion $F(x)$ (Hauptsatz der Integralrechnung)

$$A_a(b) = \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

8. Beispiel für die Anwendung der Integralschreibweise bei der Berechnung der Fläche

Berechnung der Fläche $A_1(2)$ zwischen Randfunktion und x-Achse im Intervall $[1;2]$, zwischen der unteren Grenze $a = 1$ und der oberen Grenze $b = 2$ mithilfe der Integralschreibweise.

Randfunktion: $f(x) = x^2$

Stammfunktion: $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$

Fläche:

$$A_1(2) = \int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_1^2 = \frac{1}{3} \cdot 2^3 - \frac{1}{3} \cdot 1^3 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

Hinweis: Die Integralschreibweise ist eine Kurzform für die Berechnung der Fläche. Die Stammfunktion wird ohne Integrationskonstante eingesetzt. Die Grenzen der Integration sind in der Integralschreibweise angegeben.

Die Stammfunktion wird ohne Integrationskonstante eingesetzt. Die Grenzen der Integration sind in der Integralschreibweise angegeben.

Einsetzen der Grenzen in die Stammfunktion. Es wird immer „obere Grenze“ minus „untere Grenze“ gerechnet.

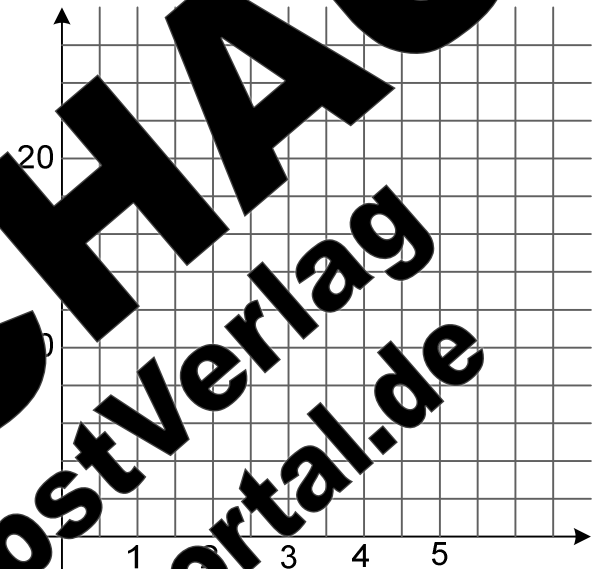
Übungen

Ü4.1 Berechnen Sie, wie im Beispiel, für die Funktion $f(x) = x^2$ die Fläche zwischen Funktionsgraph und x-Achse in den gegebenen Intervallen.

a) $[2;4]$

Ü4.2 Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3$.

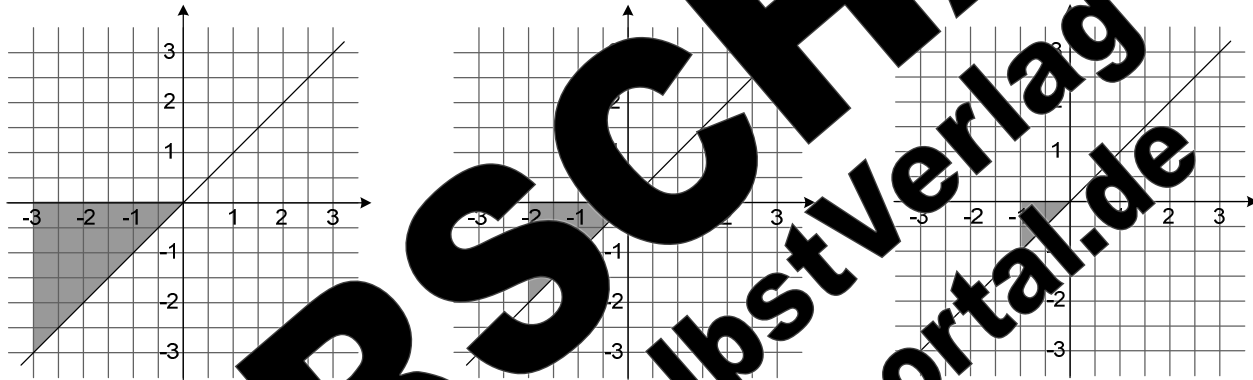
- Ermitteln Sie im Intervall $[0;3]$ einen Näherungswert für die Fläche mithilfe der Trapezmethode. Zeichnen Sie dazu die Funktion $f(x)$ im angegebenen Intervall und teilen Sie die Fläche in drei Trapeze ein.
- Ermitteln Sie eine Stammfunktion.
- Berechnen Sie die Fläche im Intervall $[0;3]$ mithilfe der Integralrechnung und vergleichen Sie den Wert mit der Näherung aus Aufgabe a).
- Berechnen Sie die Fläche im Intervall $[2;4]$ mithilfe der Integralrechnung.



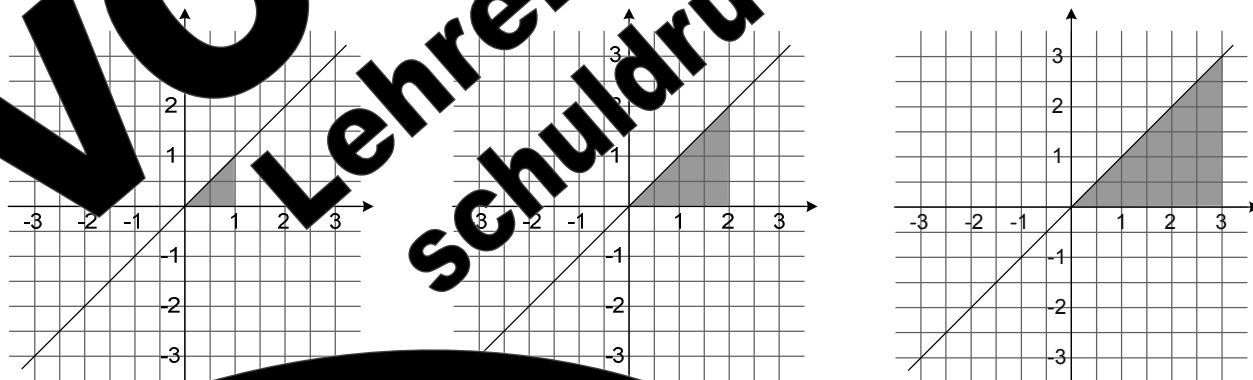
9. Erweiternde Betrachtungen zum funktionalen Charakter der Stammfunktion

Aufgabe 4.9.1

Berechnen Sie für die lineare Funktion $f(x) = x$ die folgenden Flächen mithilfe der Dreiecksformel, also ohne Anwendung der Integralrechnung, auf elementargeometrisische Weise.



$$A_{-3}(0) = \frac{(-3) \cdot (-3)}{2} = \frac{9}{2} \text{ FE} \quad A_{-2}(0) = \frac{(-2) \cdot (-2)}{2} = 2 \text{ FE} \quad A_{-1}(0) = \frac{(-1) \cdot (-1)}{2} = \frac{1}{2} \text{ FE}$$



$$A_0(3) = \frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{9}{2} \text{ FE} \quad A_0(2) = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2 \text{ FE} \quad A_0(1) = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2} \text{ FE}$$

Aufgabe 4.9.2

Wie bei den Betrachtungen zu Geraden im Kapitel 3 festgestellt, kann man bei der Berechnung von Flächen die Integrationskonstante bei der Stammfunktion vernachlässigen. Damit verwenden wir hier die Stammfunktion $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ von $f(x) = x$.

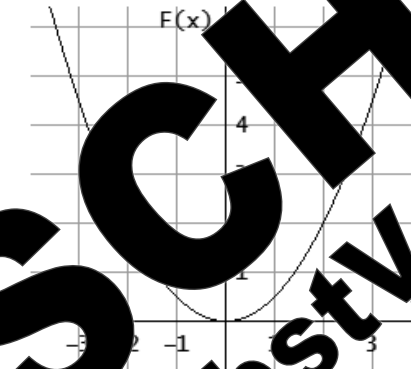
$$F(x) = \frac{1}{2}x^2$$

Füllen Sie die Wertetabelle der Stammfunktion $F(x)$ die folgende Wertetabelle aus.

	-3	-2	-1	1	2
$F(x)$					

Aufgabe 4.9.3

Die Abbildung zeigt den Graphen der Stammfunktion $F(x)$. Ergänzen Sie im angegebenen Koordinatensystem die Wertepaare aus der Wertetabelle in Aufgabe 4.9.1, indem Sie entsprechende Punkte markieren.



Aufgabe 4.9

Vergleichen Sie mit der Aufgabe 4.9.1 die berechneten Werte für die Flächen mit der Wertetabelle bzw. dem Diagramm eingezeichneten Koordinaten. Markieren Sie für die Stammfunktion jeweils den passenden Funktionswert.

$$\begin{aligned} A_{-3}(0) &= F(\quad) & A_0(3) &= F(\quad) \\ A_{-2}(0) &= F(\quad) & A_0(2) &= F(\quad) \\ A_{-1}(0) &= F(\quad) & A_0(1) &= F(\quad) \end{aligned}$$

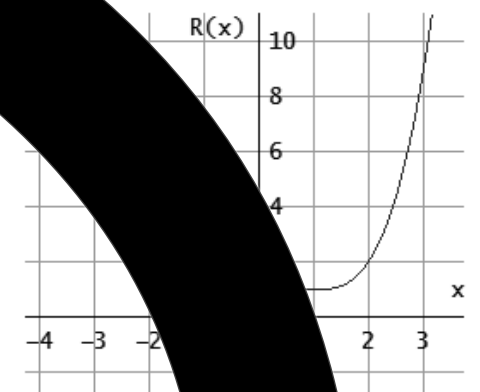
Ergänzen Sie aufgrund des Vergleichs die folgenden Aussagen: Die in Aufgabe 4.9.1 berechneten Flächen entsprechen den Funktionswerten der _____. Setzt man in die Stammfunktion einen Wert b für x ein, berechnet man eine Fläche, die an der ____-Achse beginnt und an der ____-Achse endet.

Die rationale Funktion $r(x)$ verläuft in den ersten Quadranten vollständig oberhalb der x -Achse. Der Graph der Stammfunktion $R(x)$ mit $c = 0$ ist im Diagramm nebenan dargestellt. Ermitteln Sie mithilfe des Graphen die Maßzahl für folgende Flächen.

$$A_0(1) = \int_0^1 r(x) dx = \quad \text{FE}$$

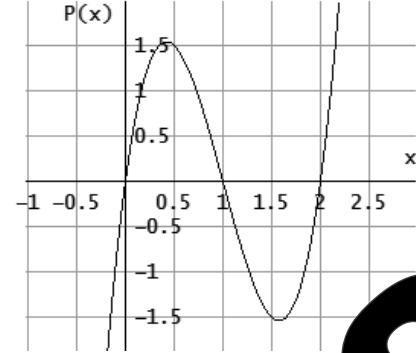
$$A_{-1}(1) = \int_{-1}^1 r(x) dx = \quad \text{FE}$$

$$A_{-3}(3) = \int_{-3}^3 r(x) dx = \left[\quad \right]_{-3}^3 = \quad \text{FE}$$

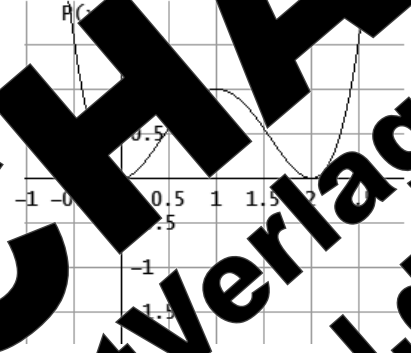


Ü4.4 In den folgenden Abbildungen sind eine Funktion $p(x)$ und ihre für $c = 0$ zugehörige Stammfunktion $P(x)$ gegeben.

Funktion $p(x)$:



Stammfunktion $P(x)$:

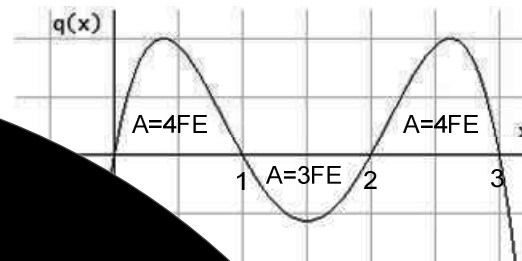


Erläutern Sie, warum hier die Aussage gilt:

Die von der Funktion $p(x)$ mit der x-Achse eingeschlossene Flächen können mithilfe der Funktionswerte von $P(x)$ berechnet werden.

Ü4.5 Die Funktion $q(x)$ schließt mit der x-Achse, wie abgebildet, drei Flächenstücke mit den angegebenen Maßzahlen ab.

Geben Sie die Werte an, die in den Kreisen stehen müssen.



$$Q(0) = 0$$

$$Q(1) = 4$$

$$Q(2) = 7$$

$$Q(2) = 1$$

$$Q(3) = 5$$

Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Integralrechnung
selbstorganisiert erlernen

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

$$\int p(x) dx$$

Kapitel

Rechenregeln für Integ

Kapitel 1 – Rand- und Flächeninhaltsfunktion	7
Kapitel 2 – Von der Flächeninhaltsfunktion zur Stammfunktion	16
Kapitel 3 – Berechnung von Flächen mit der Stammfunktion	25
Kapitel 4 – Flächen unter Kurven	49
Kapitel 5 – Rechenregeln für Integrale	63

Anwendung der Integralrechnung

Kapitel 6 – Kontextbezogene Bedeutung von Flächen	71
Kapitel 7 – Parametrisierung	77
Kapitel 8 – Rekonstruktion von Funktionen	81
Kapitel 9 – Volumenberechnung	87
Kapitel 10 – Ungleichungen und Integrale	89

Kapitel 11 – Lineare Substitution	91
Kapitel 12 – Allgemeines Substitutionsverfahren	99
Kapitel 13 – Partielle Integration und Produktintegration	103
Kapitel 14 – Beispiele zur Integration bei e-Funktionen	107
Kapitel 15 – Logarithmische Integration	111

Gesamte Verantwortung für den Inhalt der Inhalte liegt bei den Autoren. (02-030-251)

Seit

Alle Rechte vorbehalten. All rights reserved.

Druck, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte, aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

SelbstVerlag

tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germany)

Lehrerselbstverlag.de

www.f-druck.de

Kapitel 5: Rechenregeln für Integrale

Bei der Berechnung von Flächen mithilfe der Stammfunktion bzw. der Integralrechnung gelten alle für die im Kapitel 1 bis 3 für Geraden hergeleiteten Regeln. Zusätzlich kommen noch Definitionen und einige Rechenregeln für den Umgang mit Integralen hinzu.

Def.: Ein Integral, bei dem keine Grenzen angegeben sind, ist ein **unbestimmtes Integral**.

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

Man lässt die eckige Klammer bei der Stammfunktion weg und fügt dafür die Integrationskonstante hinzu.

Ein Integral, bei dem Grenzen angegeben sind, nennt man **bestimmtes Integral**.

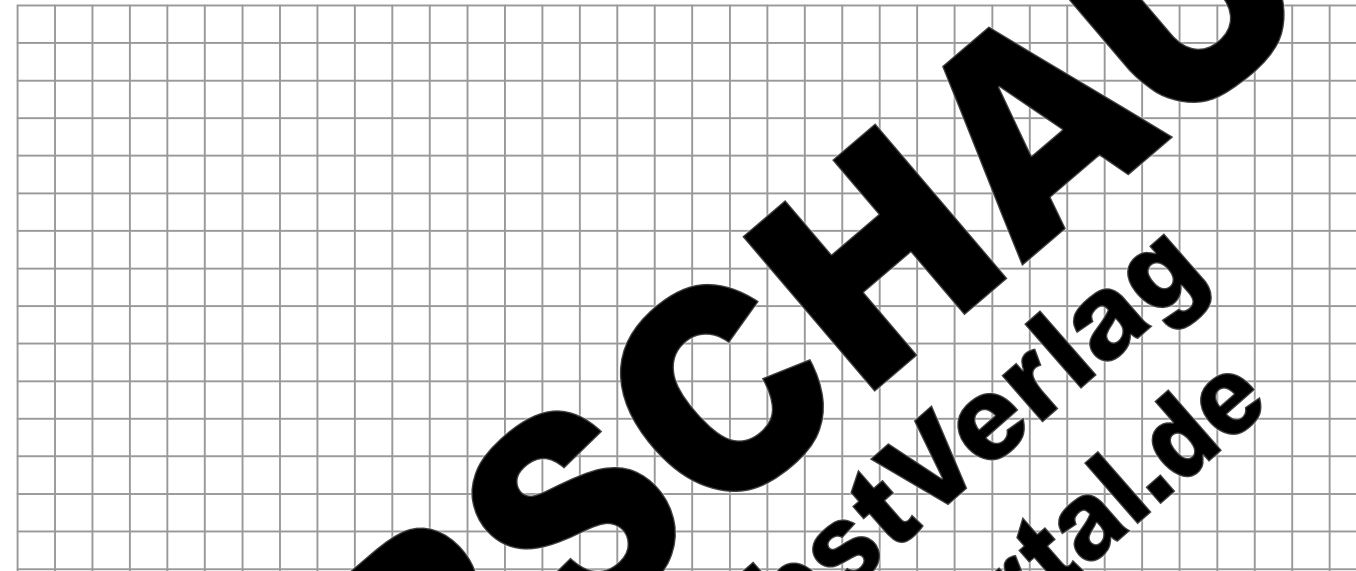
Bestimmung der Stammfunktion bei einfachen Potenzfunktionen

Potenzregel mit $f(x) = x^n$ $\Rightarrow$ $F(x) = \frac{a}{n+1} x^{n+1} + c$

Ü5.1 Benutzen Sie die Potenzregel, indem Sie die erste Ableitung der Stammfunktion berechnen.

Ü5.2 Berechnen Sie jeweils die Stammfunktion und überprüfen Sie Ihre Rechnung, indem Sie die ermittelte Stammfunktion wieder ableiten und tragen Sie die Ergebnisse ein.

- | | | |
|------------------------------------|---|------------------------------------|
| a) $f(x) = 4$ $F(x) =$ | b) $f(x) = 5x$ $F(x) =$ | c) $f(x) = 3x^2$ $F(x) =$ |
| d) $f(x) = 8x^3$ $F(x) =$ | e) $f(x) = 10x^4$ $F(x) =$ | f) $f(x) = 15x^5$ $F(x) =$ |
| g) $f(x) = \frac{1}{x^3}$ $F(x) =$ | h) $f(x) = \frac{1}{x^3}$ $F(x) =$ | i) $f(x) = \frac{1}{x^3}$ $F(x) =$ |
| | j) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $F(x) =$ | |

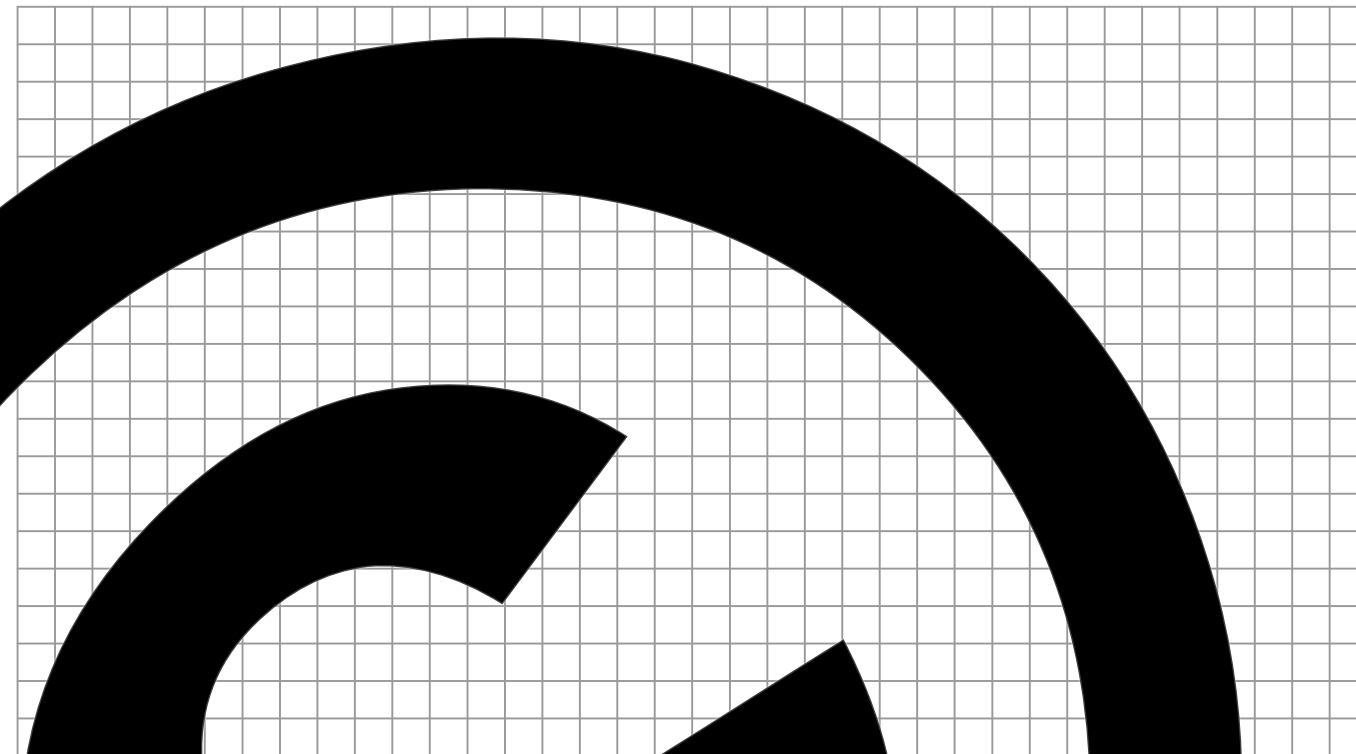


Summenregel

$$\int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx = \int_a^b (f(x) + g(x)) dx$$

Ü5.3 Die Integrale I_1 und I_2 sollen ohne einen Flächenbezug berechnet werden, d.h. der Funktionsverlauf und Randfunktion sind nicht berücksichtigt werden. Weisen Sie durch Rechnung nach, dass die Berechnung für beide Integrale den gleichen Wert ergibt.

$$\begin{aligned} \text{a) } I_1 &= \int_{-1}^1 (4x^3 + 6x^2 + 3) dx & I_2 &= \int_{-1}^1 4x^3 dx + \int_{-1}^1 6x^2 dx + \int_{-1}^1 3 dx \\ \text{b) } I_1 &= \int_1^2 (2x^3 + 9x^2 + 2) dx & \text{und} & \quad I_2 = \int_1^2 2x^3 dx + \int_1^2 9x^2 dx + \int_1^2 2 dx \end{aligned}$$



Faktorregel

$$I = \int_a^b k \cdot f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

Ü5.4 Überprüfen Sie die Gültigkeit der Faktorregel anhand der folgenden Beispiele. Berechnen Sie dazu jeweils die bestimmten Integrale I_1 und I_2 . Vergleichen Sie die Ergebnisse. Was stellen Sie hinsichtlich des Rechenaufwandes fest?

Feststellung: _____

$$\text{a) } I = \int_2^3 18x^5 dx$$

$$\text{und } I = 18 \int_2^3 x^5 dx$$

$$\text{b) } I = \int_0^1 (4x^3 + 4x + 2) dx$$

$$\text{und } I = \int_0^1 (2x^3 + 2x + 1) dx$$



Stimmen obere und untere Grenze überein, ergibt sich für das Integral der Wert Null.

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

Intervalladditivität

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

Ü5.5 Begründen Sie die Gültigkeit der beiden Regeln jeweils mithilfe geometrischer Betrachtungen bzw. mit Ihren Kenntnissen über die Flächenberechnung mit Geraden an geeigneten Beispielen.



Wenn die Grenzen ändert

Ü5.6 Überprüfen Sie die Vorzeichenregel durch Vergleich der beiden Integrale I_1 und I_2 .

$$I_1 = \int_2^3 4x^3 dx =$$

$$I_2 =$$

Übungen zur Berechnen von Flächen mithilfe der Integralrechnung unter Verwendung aller bisher gelernten Regeln

Aufgabenstellung

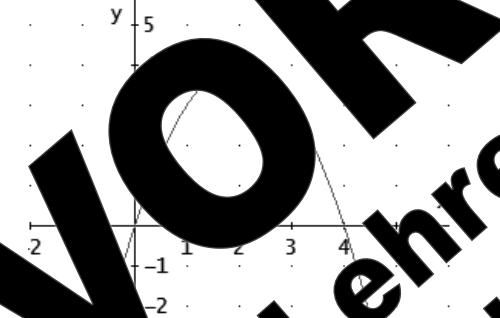
Berechnen Sie die folgenden Flächen, indem Sie

- die für Geraden ermittelten Regeln für die Flächenberechnung ober und unterhalb der x-Achse sowie für Flächen zwischen zwei Funktionen anwenden,
- die Rechenregeln für Integrale anwenden,
- in allen Abbildungen die Integrationsgrenzen aus der Betrachtung von Geraden gewohnt sind, als senkrechte Geraden einzeichnen und in den jeweiligen Abbildungen die zu berechnende Fläche farblich markieren.

Beispiel:

$$f(x) = 4x - x^2$$

Berechnen Sie die Fläche, welche die Funktion $f(x)$ mit der x-Achse einschließt.

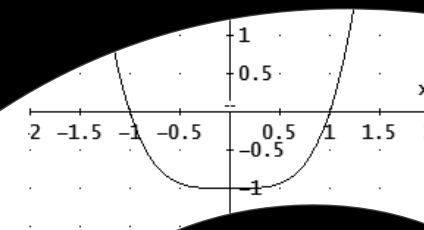


$$A = \int_0^4 (4x - x^2) dx = \left[2x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^4 = \left(2 \cdot 4^2 - \frac{1}{3} \cdot 4^3 \right) - 0 = \frac{32}{3}$$

Ü5.7

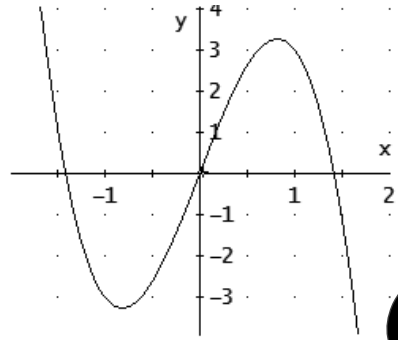
$$f(x) = x^2 - 1$$

Berechnen Sie die Fläche, welche die Funktion $f(x)$ mit der x-Achse einschließt. (Ergebnis 1,6 FE)



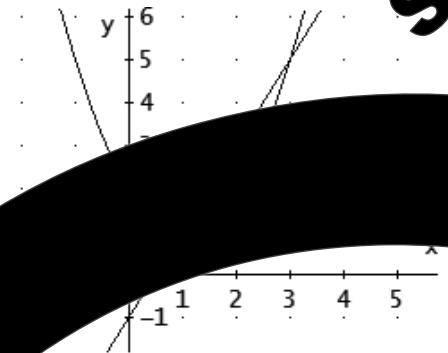
Ü5.8

$$u(x) = 6x - 3x^3$$



Berechnen Sie die Fläche, welche die Funktion $f(x)$ zwischen den Grenzen $a = -1$ und $b = 1$ mit der x-Achse einschließt. (4,5 FE)

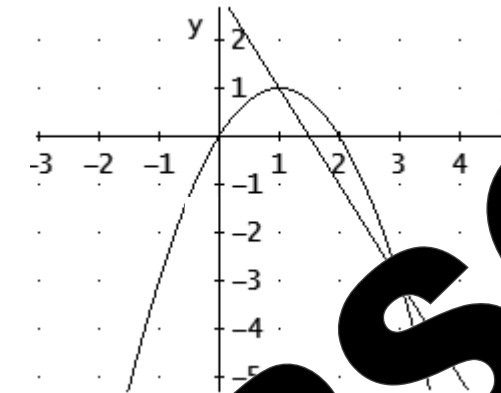
$$u(x) = -2x + 2 \text{ und } v(x) = 2x - 1$$



Berechnen Sie die Fläche, welche von der Kurve und der Geraden eingeschlossen wird. (1,333 FE)

Ü5.10

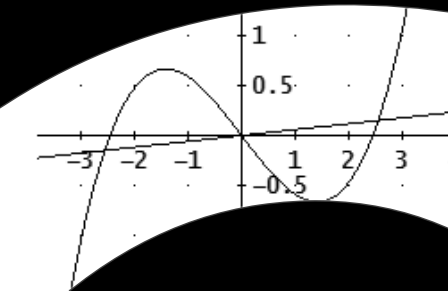
$$a(x) = 2x - x^2 \text{ und } b(x) = -2x + 3$$



Berechnen Sie die Fläche, welche von der Kurve und der Geraden eingeschlossen wird. (1,333 FE)

Ü5.11

$$g(x) = \frac{1}{17}x \text{ und } f(x) = \frac{2}{17}x^3 - \frac{12}{17}x$$

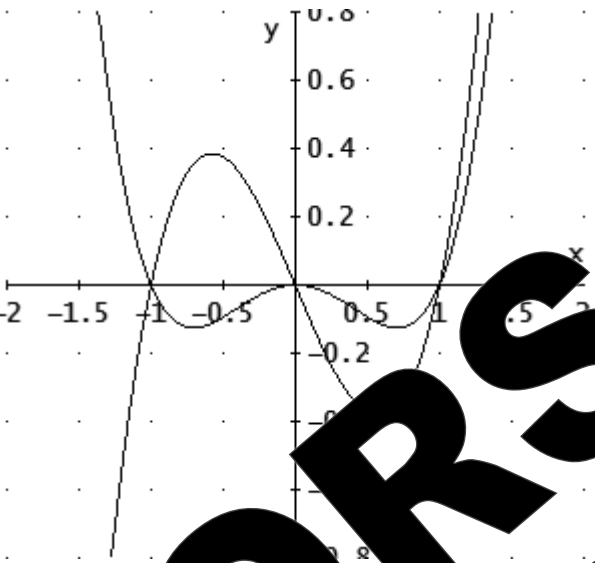


Berechnen Sie die Fläche zwischen Kurve f und Gerade g sowie den beiden Geraden $x = 1$ und $x = 2$. (12/17 FE)

Nutzen Sie die Faktorregel für die Vereinfachung der Rechnung!

Ü5.12

$u(x) = x^4 - x^2$ und $w(x) = x^3 - x$



Berechnen Sie die Fläche, welche im Intervall $[-1; 1]$ von den Graphen der beiden Funktionen eingeschlossen wird. (0,5 FE)

Ergänzen Sie:

Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Integralrechnung
selbstorganisiert erlernen



Kapitel

Kontextbezogene Bedeutung
von Flächen



Einführung in die Integralrechnung

Kapitel 1 – Rand- und Flächeninhaltsfunktion	7
Kapitel 2 – Von der Flächeninhaltsfunktion zur Stammfunktion	16
Kapitel 3 – Berechnung von Flächen mit der Stammfunktion	25
Kapitel 4 – Flächen unter Kurven	49
Kapitel 5 – Rechenregeln für Integrale	63

Anwendung der Integralrechnung

Kapitel 6 – Kontextbezogene Bedeutung von Flächen	71
Kapitel 7 – Parametrisierung	77
Kapitel 8 – Rekonstruktion von Funktionen	81
Kapitel 9 – Volumenberechnung	87
Kapitel 10 – Ungleichungen und Integrale	89
Kapitel 11 – Lineare Substitution	91
Kapitel 12 – Allgemeine Substitutionsverfahren	99
Kapitel 13 – Partielle Integration und Produktintegration	103
Kapitel 14 – Beispiele zur Integration bei e-Funktionen	107
Kapitel 15 – Logarithmische Integration	111

Gesamte Lerninhalte können selbstorganisiert erlernt werden (02-030-251)

Seit

alle Rechte vorbehalten. All rights reserved.

Druck, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet

SelbstVerlag

tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germany)

Lehrerselbstverlag.de

www.f-druck.de

Kapitel 6: Kontextbezogene Bedeutung von Flächen

Wenn man eine Fläche mithilfe der Integralrechnung berechnet und eine Einheit Flächeneinheiten FE zuordnet, versteht man darunter in der Regel, dass es sich um eine Fläche im geometrischen Sinn handelt. Wie Sie jedoch im Einstiegskapitel zu diesem ersten Kapitels gesehen haben, kann einer Fläche im Koordinatensystem im Kontext einer Aufgabenstellung auch eine andere Bedeutung zukommen. In diesem Kapitel sollen exemplarisch einige dieser Aufgabenstellungen behandelt werden.

1. Flächen im Kraft-Weg-Diagramm

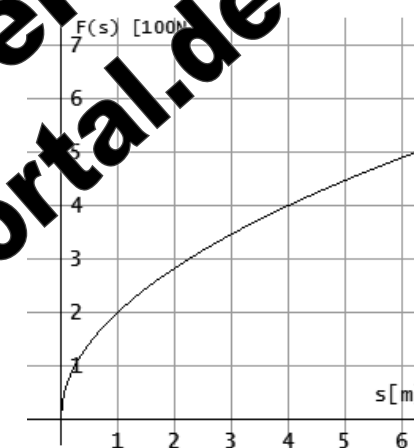
Ein Roboterarm benötigt für die Bewegung eines Gegenstands auf einem Fließband über die Strecke von $s = 0$ bis $s = 6$ m die mithilfe der Funktion $F(s)$ beschriebene Kraft.

Die Funktion $F(s)$ im Kraft-Weg-Diagramm kann dargestellt werden durch:

Begründen Sie, wie viel hier verrichtete Arbeit mithilfe

des Area- $W = \int_0^6 F(s) ds$ berechnen kann, und zeigen

mit einer Rechnung einschließlich der Betrachtung von Einheiten, dass sich für die verrichtete Arbeit folgender Wert ergibt: $W = 180 \text{ Nm}$



2. Grundlegendes zur Bedeutung von Flächen

Im Beispiel zur Berechnung der Arbeit ist die kontextbezogene Bedeutung der Fläche durch die Verknüpfungen zum Einstiegsbeispiel in den Vorbetrachtungen ersichtlich. Hier soll eine grundsätzliche Möglichkeit verdeutlicht werden, wie man erkennen kann, ob eine Fläche eine Anwendungsbezogene Bedeutung hat und wie man diese Bedeutung ermitteln kann.

Merkmal 1:

Wenn eine Fläche eine Anwendungsbezogene Bedeutung hat, liegt die Fläche in einem ersten Quadranten des Koordinatensystems.

Merkmal 2:

Das Produkt der Einheiten der Größen, die auf der y- und x-Achse dargestellt werden, muss eine sinnvolle neue Einheit ergeben.

Begründung:

Die grau markierte Fläche zwischen der Kurve $f(x)$ und der x-Achse kann mit Hilfe der Integralrechnung durch die Berechnung von $A = \int f(x) dx$ ermittelt werden. Erläutern Sie die geometrische Bedeutung des Ausdrucks $\int f(x) dx$, indem Sie die Sätze ergänzen:

Der Ausdruck $\int f(x) dx$ bedeutet, dass die Fläche

unter der Kurve bei der Integralrechnung

letztendlich aus der _____ unendlich

vieler ganz schmaler Rechtecke berechnet wird.

(Vgl. Kapitel 4). Der Ausdruck „ $f(x) dx$ “ oder

_____ gibt dabei die _____ eines

_____ der schmalen Rechtecks an.

$A = \int f(x) dx$

$f(x)$

Rechteck an der Stelle x mit der Höhe $f(x)$ und der Breite dx

Für die Fläche eines schmalen Rechtecks betrachte man die Breite dx und die Höhe $f(x)$. Die Fläche A des schmalen Rechtecks ist dann $A = f(x) \cdot dx$. Wenn man die Gesamtfläche aus diesen schmalen Rechtecken berechnet wird, erhält man die Gesamtfläche in der Einheit $[f(x)] \cdot [dx]$, also die Einheit für die Arbeit.

$f(x)$

A

dx

Einheit der Fläche $[A] = [f(x)] \cdot [dx]$

Weitere Beispiele für Flächen mit kontextbezogener Bedeutung.

Auf der x- und y-Achse werden die im Folgenden angegebenen Größen eingetragen. Geben Sie jeweils die Einheit und die kontextbezogene Bedeutung der Fläche an.

Bedeutung der y-Achse	Bedeutung der x-Achse	Einheit der Fläche	Kontextbezogene Bedeutung der Fläche
Anzahl verkaufter oder produzierter Artikel pro Tag d, d.h. Verkaufsrate oder Produktionsrate Einheit $\left[\frac{\text{Anzahl}}{d}\right]$	Zeit t Einheit [d] Es kann auch folgende Zeiteinheiten sein: s, min, h; ...	$[A] = \left[\frac{\text{Anzahl}}{d} \cdot d\right] = [\text{Anzahl}]$	
Zufluss- bzw. Abflussrate von Wasser in einen Behälter r(t) in Sekund	Zeit t Einheit [s]	$[A] = \left[\frac{m^3}{s} \cdot s\right] = [m^3]$	
Weggeschwindigkeit eines Fahrzeuges v(t) Einheit $\left[\frac{m}{s}\right]$	Zeit t Einheit [s]	$[A] = \left[\frac{m}{s} \cdot s\right] = [m]$ $[A] = []$	
Beschleunigung eines Fahrzeuges a(t)	Zeit t Einheit [s]	$[A] = \left[\frac{m}{s^2} \cdot s\right] = \left[\frac{m}{s}\right]$ $[A] = []$	
Anderungsrate der Konzentration eines Stoffes in einer Flüssigkeit k(t) pro Stunde	Zeit t Einheit [h]	$[A] = \left[\frac{mg}{l \cdot h} \cdot h\right] = \left[\frac{mg}{l}\right]$ $[A] = []$	
Weggeschwindigkeit eines Fahrzeuges v(t) Einheit $\left[\frac{mg}{d}\right]$	Zeit t Einheit [d]	$[A] = \left[\frac{mg}{d} \cdot d\right] = [mg]$ $[A] = []$	

Bedeutung der y-Achse	Bedeutung der x-Achse	Einheit der Fläche	Kontextbezogene Bedeutung
Ausstoß von Rußpartikeln mit einem bestimmten Durchmesser $r(x)$ Einheit $\left[\frac{\text{Anzahl}}{\mu\text{m}}\right]$	Durchmesser x Einheit $[\mu\text{m}]$	$[A] = \left[\frac{\text{Anzahl}}{\mu\text{m}} \cdot \mu\text{m}\right] = [\text{Anzahl}]$	
Kraft F Einheit $[\text{N}]$ (Newton)	Weg s Einheit $[\text{m}]$	$[A] = [\text{N} \cdot \text{m}]$	
Leistung P Einheit $[\text{W}]$ (Watt) oder $[\text{J/s}]$	Zeit t Einheit $[\text{s}]$ oder $[\text{h}]$	$[A] = [\text{W} \cdot \text{s}]$ oder $[A] = [\text{J}]$	

Raum 1: weitere Beispiele zur Bedeutung von Flächen in Diagrammen

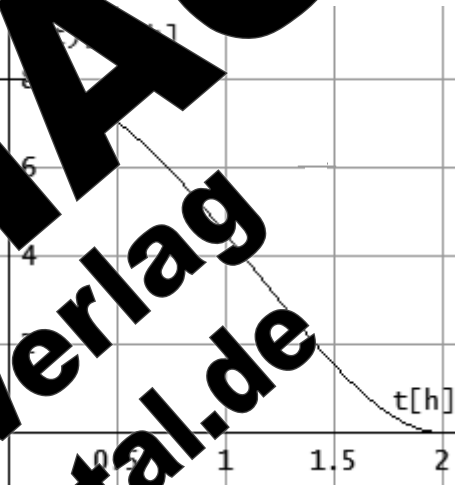
		$[A] = \left[\frac{\text{Anzahl}}{\text{m}^2} \cdot \text{m}^2\right] = [\text{Anzahl}]$ oder $[A] = \left[\frac{\text{Anzahl}}{\text{m}^2} \cdot \text{m}^2\right] = [\text{Anzahl}]$	
		$[A] = \left[\frac{\text{Anzahl}}{\text{m}^2} \cdot \text{m}^2\right] = [\text{Anzahl}]$ oder $[A] = \left[\frac{\text{Anzahl}}{\text{m}^2} \cdot \text{m}^2\right] = [\text{Anzahl}]$	
		$[A] = \left[\frac{\text{Anzahl}}{\text{m}^2} \cdot \text{m}^2\right] = [\text{Anzahl}]$ oder $[A] = \left[\frac{\text{Anzahl}}{\text{m}^2} \cdot \text{m}^2\right] = [\text{Anzahl}]$	

Übungen

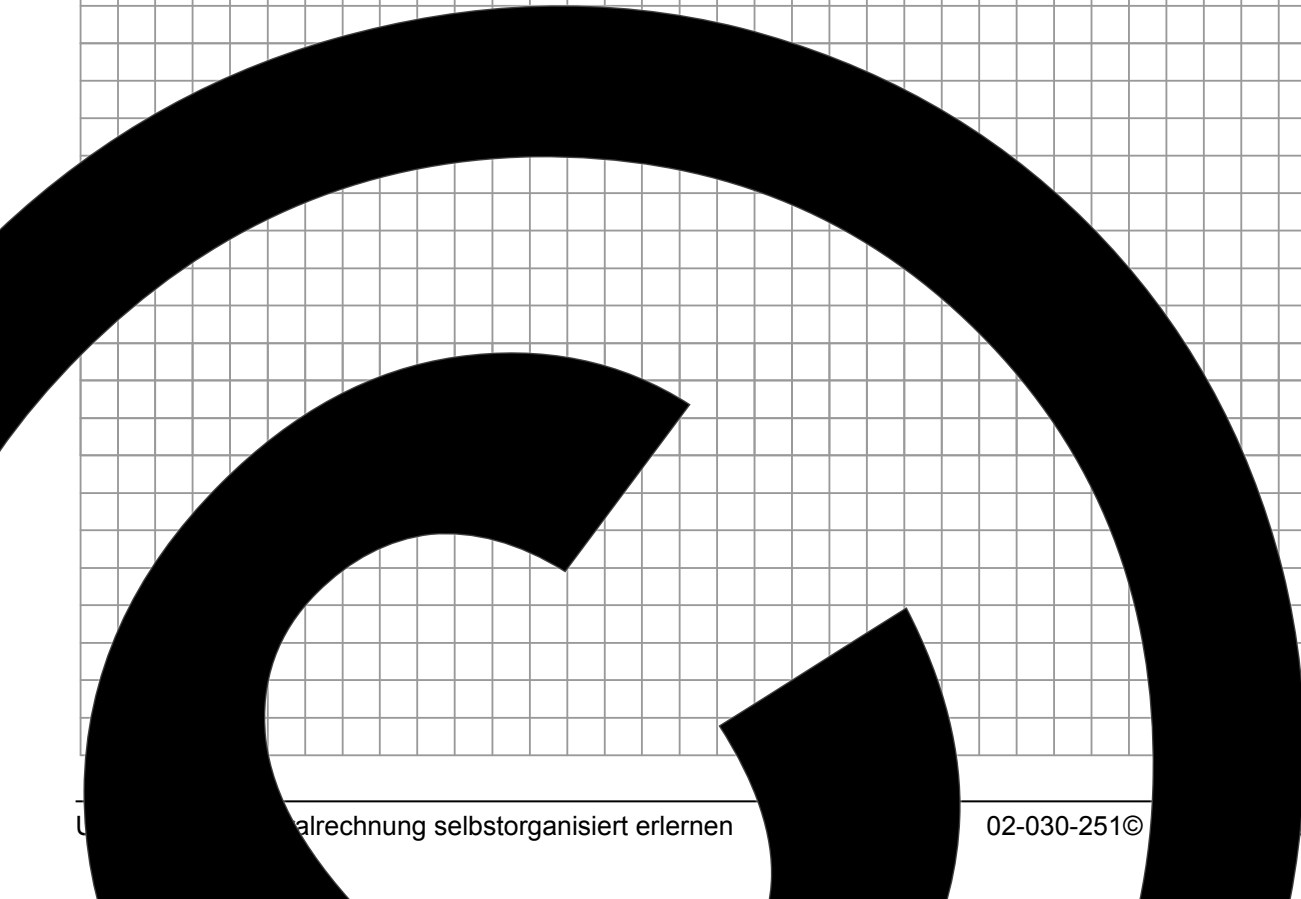
Ü6.1 Dem nebenan abgebildeten Graph kann entnommen werden, welche Menge einer Reagenz bei einem chemischen Prozess zu einem Zeitpunkt t entsteht. Für t wird die Reaktionsgeschwindigkeit $r(t)$ angegeben. Für $r(t)$ gilt: $r(t) = 0,5t^4 - 4t^2 + 8$

Einheiten: $r(t)$ wird in der Einheit $\frac{\text{kg}}{\text{h}}$ und die Zeit t in der Einheit Stunde h angegeben.

Begründen Sie, warum $r(t)$ die Menge der insgesamt entstandenen Reagenz R des Gesetzes $R = \int_0^t r(t) dt$ berechnen kann und zeigen Sie mit Hilfe einer Rechnung einschließlich der Bestimmung von Einheiten, dass sich hier $R = 8,535$ ergibt.



VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de



Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Integralrechnung
selbstorganisiert erlernen

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de



Kapitel
Parameternaufgabe

Einführung in die Integralrechnung

Kapitel 1 – Rand- und Flächeninhaltsfunktion	7
Kapitel 2 – Von der Flächeninhaltsfunktion zur Stammfunktion	16
Kapitel 3 – Berechnung von Flächen mit der Stammfunktion	25
Kapitel 4 – Flächen unter Kurven	49
Kapitel 5 – Rechenregeln für Integrale	63
Anwendung der Integralrechnung	
Kapitel 6 – Kontextbezogene Bedeutung von Flächen	71
Kapitel 7 – Parameteraufgaben	77
Kapitel 8 – Rekonstruktion von Funktionen	81
Kapitel 9 – Volumenberechnung	87
Kapitel 10 – Uneigentliche Integrale	89
Vertiefung der Integralrechnung	
Kapitel 11 – Lineare Substitution	91
Kapitel 12 – Allgemeine Substitutionsverfahren	99
Kapitel 13 – Partielle Integration und Produktintegration	103
Kapitel 14 – Beispiele zur Integration bei e-Funktionen	107
Kapitel 15 – Logarithmische Integration	111

Gesamte Lerninhalte können selbstorganisiert erlernt werden (02-030-251)

Seit

alle Rechte vorbehalten. All rights reserved.

Druck, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet

SelbstVerlag

tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germany)

Lehrerselbstverlag.de

www.f-druck.de

Kapitel 7: Parameteraufgaben

Bisher haben Sie Flächen bei Funktionen berechnet, die eindeutig definiert sind, bei denen also außer der Variable x keine weiteren Variablen vorgekommen sind. Es gibt auch Aufgabenstellungen, bei denen die Gleichung einer Randkurve von einer Variable, einen sogenannten **Parameter**, enthält. Im Folgenden wird im Beispiel 1 zu diesem Aufgabentyp eine Aufgabenstellung aus dem Bereich der Architektur vorgestellt. Im Beispiel 2 eine rein formale Aufgabe ohne Anwendungsbezug bearbeitet.

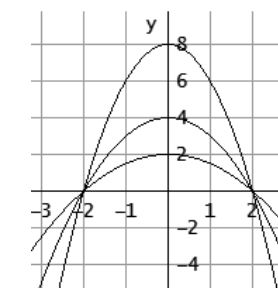
Beispiel 1:

Ein Gebäude soll auf Wunsch des Bauherrn ein Fenster erhalten, dessen oberer Rand durch eine Parabel und dessen unterer Rand von der x -Achse begrenzt wird. Der parabelförmige Rand des Fensters soll durch die Gleichung $r_a(x) = -ax^2 + 4a$ bestimmt werden und die Fensterfläche soll insgesamt 16 m^2 betragen.

Überlegungen zur Aufgabenstellung:

Sie haben wahrscheinlich noch keine oder nur wenige Erfahrungen mit Funktionen, die einen Parameter enthalten, gesammelt. Daher sollten nun zunächst verdeutlicht werden, was der Parameter bewirkt. Dazu sind in der folgenden Abbildung die Parabeln zu den Parametern $a = 1$, $a = 2$ und $a = 0,5$ eingezeichnet. Ordnen Sie den Parabeln die Nummer des Graphen zu und beschreiben Sie Ihre Überlegungen.

- Die Funktion $r_a(x) = -ax^2 + 4a$ ist für
- | | |
|---------------|----------------------------|
| (1) $a = 1$ | $r_1(x) = -x^2 + 4$ |
| (2) $a = 2$ | $r_2(x) = -2x^2 + 8$ |
| (3) $a = 0,5$ | $r_{0,5}(x) = -0,5x^2 + 2$ |



Bestimmen Sie, welche Auswirkung der Parameter a auf die Fläche des Fensters hat und markieren Sie die Fläche, welche von $r_1(x)$ bestimmt wird.

Vorschlag für die Aufgabenstellung

Da aufgrund des gekrümmten Randes nicht direkt abzulesen ist, für welches a die Fensterfläche den vorgegebenen Wert von 16 m^2 annimmt. Die Vorgehensweise zur Ermittlung des richtigen Parameters soll nun schrittweise erfolgen:

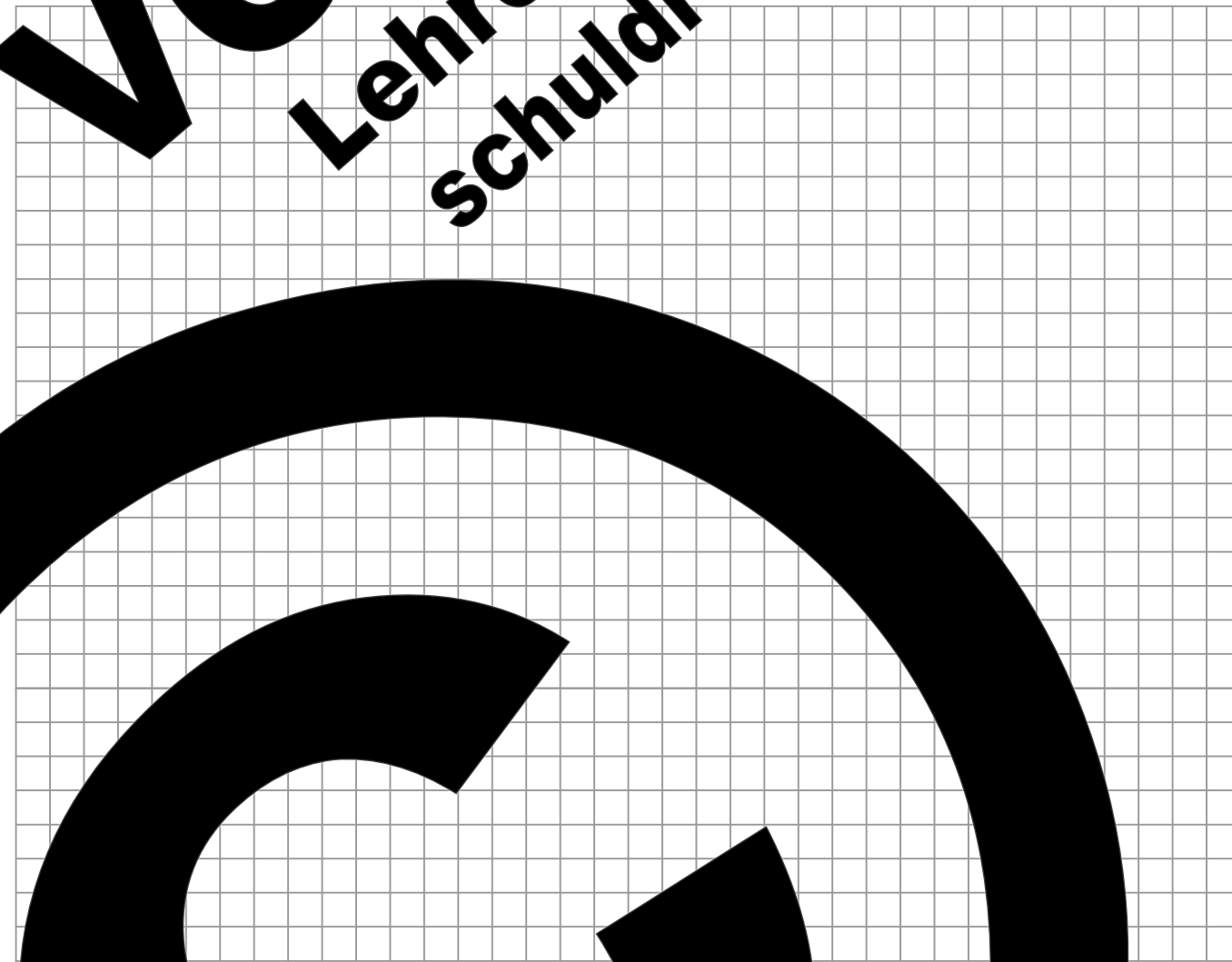
Schritt 1: Ansatz

Erläutern Sie, welche Bedeutung der folgende Ansatz hat:

$$A_{-2}(2) = 2A_0(2) \Rightarrow A_0(2) = 8 \Rightarrow \int_0^2 r_a(x) dx = 8$$

Schritt 2: Einsetzen der Funktion in den Ansatz

$$\int_0^2 (-a^2 x^2 + 4) dx = 8$$

Schritt 3: Berechnen des Integrals und Auflösen der entstehenden Gleichung nach a. (Kontrollergang mit a = 1,5)**Beispiel 2:**

In der rechten Spalte wird die ausführliche Lösung der folgenden Aufgabe dargestellt und in der linken Spalte soll unter Verwendung mathematischer Terminologie erläutert werden, welche Berechnungen und Umformungen jeweils durchgeführt werden.

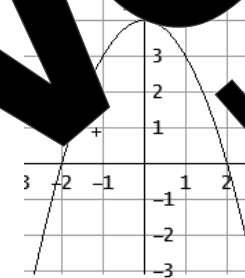
Aufgabenstellung:

Berechnen Sie den Parameter a mit $a \in \mathbb{R}$, wenn die Parabel $f_a(x) = -a^2 x^2 + 4$ mit der x-Achse eine Fläche von 8 FE einschließt.

Überlegungen zum Verständnis der Aufgabenstellung und einer Strategie für den Lösungsweg.**1. Anfertigen einer Skizze**

Um sich ein Bild von der Aufgabenstellung und der zu berechnenden Fläche machen zu können, ist es immer ratsam, die Fläche anzusehen. Da der Graph der Funktion aufgrund des Parameters unterschiedlich aussieht, wählt man einen günstigen bzw. einfachen Wert, um eine Skizze anfertigen zu können. Die Funktion ist hier für den Wert $a = 1$ gezeichnet worden.

Skizze für $f_1(x) = -x^2 + 4$. Begründen Sie, warum man für eine Skizze der Funktion den Parameter $a = 1$ wählt:



Erläutern Sie, welche Veränderung sich am Verlauf der Funktion ergibt, wenn man einen anderen Wert für a wählt:

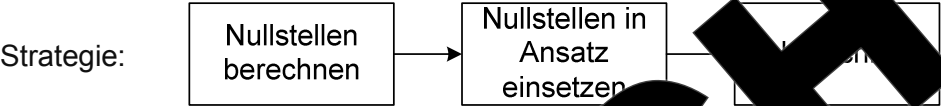
Überprüfen des Ansatzes für die Flächenberechnung**Ansatz:**

$$\int_0^N r(x) dx = 4$$

Erläutern Sie die Überlegungen, die dem Ansatz zugrunde liegen und hier insbesondere, warum man nicht 2 sondern 4 als Grenzwert wählt:

3. Entwickeln einer Lösungsstrategie

Wenn Ihre Überlegungen zum Ansatz richtig sind, haben Sie erkannt, dass die Fläche aus Symmetriegründen zwischen der unteren Grenze $x = 0$ und der Nullstelle der Funktion als obere Grenze berechnet. Damit muss man für die Flächenberechnung die Nullstelle x_1 berechnen:



Nullstellen: $f_a(x) = 0$
 $-a^2x^2 + 4 = 0$

Berechnen Sie die Nullstellen x_1 von $f(x)$ für die allgemeine Funktion $f(x)$ durch Lösen der Gleichung und zeigen Sie durch Einsetzen, dass man hier als Lösung $x_{1,2} = \pm \frac{2}{a}$ erhält.

Flächenberechnung: Ergänzen Sie den Ansatz für die Flächenberechnung und die Rechenschritte:

$\int_0^{\frac{2}{a}} (-a^2x^2 + 4) dx = 4$

Berechnung von a

$\left[-\frac{a^2}{3}x^3 + 4x \right]_0^{\frac{2}{a}} = 4$
 $-\frac{8}{3a} + \frac{8}{a} = 4$

Übungsaufgaben für diese Aufgabe sind in vielen Quellen zu finden. Bitte beachten Sie bei der Bearbeitung, dass Sie sich für die Kurvenuntersuchung (hier muss man alle Untersuchungsschritte machen) einen Überblick über den Verlauf der Funktion verschaffen müssen. Wählen Sie einen Parameter für diese Skizze.

Ergänzen Sie:

Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Integralrechnung
selbstorganisiert erlernen



Kapitel

Rekonstruktion von Funktionen

Einführung in die Integralrechnung

Kapitel 1 – Rand- und Flächeninhaltsfunktion	7
Kapitel 2 – Von der Flächeninhaltsfunktion zur Stammfunktion	16
Kapitel 3 – Berechnung von Flächen mit der Stammfunktion	25
Kapitel 4 – Flächen unter Kurven	49
Kapitel 5 – Rechenregeln für Integrale	63
Anwendung der Integralrechnung	
Kapitel 6 – Kontextbezogene Bedeutung von Flächen	71
Kapitel 7 – Parameternaufgaben	77
Kapitel 8 – Rekonstruktion von Funktionen	81
Kapitel 9 – Volumenberechnung	87
Kapitel 10 – Uneigentliche Integrale	89
Vertiefung der Integralrechnung	
Kapitel 11 – Lineare Substitution	91
Kapitel 12 – Allgemeine Substitutionsverfahren	99
Kapitel 13 – Partielle Integration und Produktintegration	103
Kapitel 14 – Beispiele zur Integration bei e-Funktionen	107
Kapitel 15 – Logarithmische Integration	111

Gesamte Verantwortung für den Inhalt der Inhalte liegt bei dem jeweiligen Verfasser. (02-030-251)

Alle Rechte vorbehalten. / All rights reserved.

Druck, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte, aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

LehrerselbstVerlag

Lehrerselbstverlag GmbH, Koblenz (Germany)

www.lehrerselbstverlag.de

www.f-druck.de

Kapitel 8: Rekonstruktion von Funktionen

Bisher haben Sie hinsichtlich der Integralrechnung Aufgaben bearbeitet, bei denen ein Parameter im Funktionsterm enthalten war. Nun wird diese Aufgabenstellung so erweitert, dass kein Koeffizient bekannt ist.

Auch bei diesem Aufgabentyp, den Sie bereits aus der Klasse kennen, kann man ähnlich wie bei der Untersuchung von Kurven oft systematisch vorgehen. Man analysiert den gegebenen Aufgabentext schrittweise analysiert. Die Vorgehensweise soll an einem komplexen rein formalen Beispiel ohne Anwendungsbezug dargestellt werden.

1. Zuordnen eines Funktionstyps

Man muss aus der Aufgabenstellung zunächst herausarbeiten, um welchen Typ von Funktion es sich handelt und dann für diese Funktion die allgemeine Gleichung notieren. In Folgenden sind die Ansätze für die häufigsten Funktionstypen aufgelistet.

Ganzrationale Funktion 1. Grades (Parabel)
ohne Symmetrie
 $f(x) = ax^2 + bx + c$
mit Achsensymmetrie
 $f(x) = ax^2 + b$

Ganzrationale Funktion 3. Grades
ohne Symmetrie
 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
mit Punktsymmetrie
 $f(x) = ax^3 + bx$

Ganzrationale Funktion 4. Grades (Parabel)
mit Achsensymmetrie
 $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$
mit Punktsymmetrie
 $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$

2. Bedingungsanalyse

Nun muss die Aufgabenstellung herausarbeiten bzw. analysieren, welche Bedingungen für den Verlauf der Funktion gegeben sind. Die Informationen sind häufig in Form von Punkten gegeben, bei denen die Funktion bestimmte Werte annimmt. Neu kommt jetzt hinzu, dass sich eine Bedingung auf eine Ableitung bezieht.

Es wird ein Lösungsverfahren, bei dem gegebene Bedingungen in die allgemeine Funktionsformel eingesetzt werden, an einem konkreten Beispiel gezeigt. Der Lösungsweg lässt sich weitgehend auf andere Aufgaben übertragen.

Bitte notieren Sie sich die einzelnen Schritte des Verfahrens.

Aufgabenstellung

Gesucht ist eine ganzrationale Funktion dritten Grades, die durch den Ursprung verläuft und in der gleichen Stelle wie die Funktion $k(x) = x^2 - 2x + 1$ einen Extremwert hat. Es soll sich der Wendepunkt. Die Funktion schließt mit der Geraden $x = 2$ und der y-Achse im vierten Quadranten eine Fläche von 12 FE ein.

1. Schritt

Allgemeiner Funktionsterm:	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
----------------------------	-------------------------------

2. Schritt

Analysieren der 1. Bedingung:	Funktion verläuft durch den Ursprung $O(0/0)$
Mathematisches Ansprechen der Bedingung:	$f(0) = 0$
Einsetzen der Werte:	$a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 0$ $d = 0$
1. Zwischenergebnis für Funktionsterm:	$f_1(x) = ax^3 + bx^2 + cx$

3. Schritt

Analysieren der 2. Bedingung:	Wendepunkt bei $x = 2$
Mathematisches Ansprechen:	$f''(2) = 0$ mit $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ $f''(x) = 6ax + 2b$
Einsetzen der Werte:	$6a \cdot 2 + 2b = 0$ $12a + 2b = 0$ $b = -6a$

2. Zwischenergebnis für Funktionsterm:	$f_2(x) = ax^3 - 6ax^2 + cx$ $f_2'(x) = 3ax^2 - 12ax + c$
--	--

4. Schritt

Analysieren der 3. Bedingung:	Die x-Koordinate für den Extremwert der gesuchten Funktion $f(x)$ stimmt mit der x-Koordinate des Extremwertes der Funktion $k(x)$ überein. Also muss die x-Koordinate des Extremwertes von $k(x)$ in einer Nebenbedingung ermittelt werden: $k(x) = x^2 - 2x + 1$ $k'(x) = 2x - 2$ $2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$ Extremwert: $k'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$ Damit hat die Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = 1$ einen Extremwert.
Einsetzen der Werte:	mit $f'(x) = 3ax^2 - 12ax + c$ $3a \cdot 1^2 - 12a \cdot 1 + c = 0$ $3a - 12a + c = 0$ $-9a + c = 0$ $c = 9a$
3. Zwischenergebnis für Funktionsterm:	$f(x) = ax^3 - 6ax^2 + 9ax$

5. Schritt

Den letzten Koeffizienten a bestimmt man nun über die Flächenbedingung. Wenn noch ein Parameter vorhanden ist, geht man hier wie bei der Parameteraufgabe in Kapitel 7 vor.

Analysieren der 4. Bedingung:	Die Fläche liegt zwischen den Grenzen 0 und 2 im vierten Quadranten unterhalb der x-Achse.
Mathematischer Ansatz der Bedingung:	$f(2) = -12$
Einsetzen der Werte:	Man muss darauf achten, ob die Fläche oberhalb oder unterhalb der x-Achse liegt. Bei Flächen oberhalb der x-Achse wird der Betrag mit positivem und bei Flächen unterhalb der x-Achse mit negativem Vorzeichen eingesetzt. $\int_0^2 (x^3 - 6ax^2 + 9ax) dx = -12$ $\left[\frac{1}{4}x^4 - 2ax^3 + \frac{9}{2}ax^2 \right]_0^2 = -12$ $4 - 16a + 18a = -12$ $2a = -16$ $a = -8$
Endergebnis:	$f(x) = x^4 - 48x^3 + 72x^2 - 18x$

Der Koeffizient a wird mit der Flächenbedingung zahlenmäßig bestimmt und in das dritte Zwischenergebnis eingesetzt. Daraus ergibt sich das Endergebnis.

Strukturdiagramm zur Lösung von Rekonstruktionsaufgaben

Die Abfolge der einzelnen Lösungsschritte bei der Rekonstruktion von Funktionen kann den Rechenaufwand erheblich beeinflussen. Es ist daher sinnvoll, mit dem Diagramm vorgeschlagenen Abfolge von Arbeitsschritten vorzugehen und jeweils mit dem Zwischenergebnis zu arbeiten, in denen die Anzahl der unbekannten Koeffizienten schrittweise geringer wird, was zu einer schnelleren Lösung führt.



de Übungen:

Raum für Rechnungen und Notizen



Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Integralrechnung
selbstorganisiert erlernen



Kapitel

Volumenintegrale



Einführung in die Integralrechnung

Kapitel 1 – Rand- und Flächeninhaltsfunktion	7
Kapitel 2 – Von der Flächeninhaltsfunktion zur Stammfunktion	16
Kapitel 3 – Berechnung von Flächen mit der Stammfunktion	25
Kapitel 4 – Flächen unter Kurven	49
Kapitel 5 – Rechenregeln für Integrale	63
Anwendung der Integralrechnung	
Kapitel 6 – Kontextbezogene Bedeutung von Flächen	71
Kapitel 7 – Parametrisierung	77
Kapitel 8 – Rekonstruktion von Funktionen	81
Kapitel 9 – Volumenintegrale	87
Kapitel 10 – Uneigentliche Integrale	89
Vertiefung der Integralrechnung	
Kapitel 11 – Lineare Substitution	91
Kapitel 12 – Allgemeine Substitutionsverfahren	99
Kapitel 13 – Partielle Integration und Produktintegration	103
Kapitel 14 – Beispiele zur Integration bei e-Funktionen	107
Kapitel 15 – Logarithmische Integration	111

Gesamte Darstellung der Integralrechnung selbstorganisiert erlernen (02-030-251)

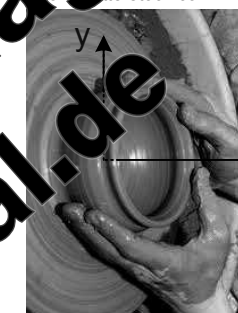
Alle Rechte vorbehalten. All rights reserved.
Dieses Werk, auch auszugsweise, vorbehalten der Rechte,
aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.
LehrerselbstVerlag
LehrerselbstVerlag GmbH, Koblenz (Germany)
Lehrerselbstverlag.de
www.f-druck.de

Kapitel 9: Volumenintegrale

Schaut man einem Kunsthandwerker beim Töpfern auf der Töpferscheibe zu, erkennt man, dass hier rotationssymmetrische Gegenstände entstehen. Das Volumen dieser Gegenstände kann man mithilfe der Integralrechnung ermitteln.



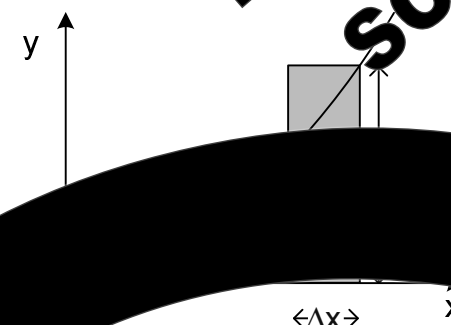
Für Berechnungen ist es einfach, wenn sich ein Rotationskörper um die x-Achse dreht. Dazu dreht man den Gegenstand nebenan vorstellt, in Gedanken um 90°.



Die Formel zur Volumenberechnung eines solchen Rotationskörpers wird durch Gegenüberstellung mit der Methode der Integralformel erläutert. Bearbeiten Sie dabei zuerst die linke Spalte und übertragen Sie die Ergebnisse und Überlegungen auf die rechte Spalte.

Flächen unter einer Kurve

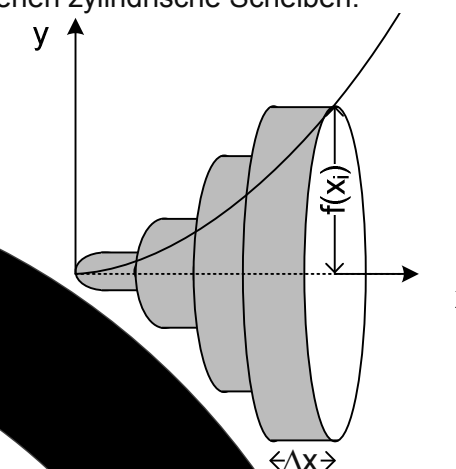
In Kapitel 4 wurde die formelhafte Beziehung für das Integral mithilfe von Riemannsummen auf Flächen unter Kurven hergeleitet.



Die Fläche eines Rechtecks mit der Breite Δx und der Höhe $f(x_i)$ berechnet sich nach $A = f(x_i) \Delta x$.

Rotationsvolumen

Lässt man die rechteckigen Balken der Abbildung in der linken Spalte um die x-Achse rotieren, so entstehen zylindrische Scheiben:



Das Volumen eines solchen Rotationskörpers lässt sich, wie Sie in der Sekundarstufe wissen, mit der Formel $V = \pi r^2 h$ berechnen. Überlegen Sie nun, warum man die i-te Zylinder der Abbildung mit folgender Formel berechnen kann:

$$V_i =$$

Ergänzen Sie: Der Ausdruck $\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$ gibt die

_____ aller abgebildeten

Balken an. Lässt man Δx immer _____

werden, so werden die Balken immer schmäler.

Die Fläche unter dem Graphen von f wird durch _____

die Summe der _____ angenäht. Je _____

schmäler die Balken werden, desto _____

_____ ist die Näherung. Strebt die

Breite der Rechtecke gegen _____, so

verwendet man _____ der Fläche

folgendes Integral:

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

Ergänzen Sie: Der Ausdruck $\sum_{i=1}^n \pi [f(x_i)]^2 \Delta x$ gibt

die _____ abgebildeten

Zylinderschichten an. Lässt man Δx immer kleiner

werden, so werden die _____ der

Zylinderschichten immer kleiner und das gesuchte

Volumen _____

angenähert. Strebt die Höhe der Zylinder gegen

Null, so verwendet man _____ zur

Flächenbetrachtung für das Aufsummieren

unendlich vieler extrem schmaler

_____ das

Integralzeichen und schreibt:

$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Beispiele und Übungsaufgaben sind teilweise einer Vielzahl von Quellen entnommen werden.

Ergänzen Sie:

Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Integralrechnung selbstorganisiert erlernen



Kapitel

Uneigentliche Integrale

Einführung in die Integralrechnung

Kapitel 1 – Rand- und Flächeninhaltsfunktion	7
Kapitel 2 – Von der Flächeninhaltsfunktion zur Stammfunktion	16
Kapitel 3 – Berechnung von Flächen mit der Stammfunktion	25
Kapitel 4 – Flächen unter Kurven	49
Kapitel 5 – Rechenregeln für Integrale	63

Anwendung der Integralrechnung

Kapitel 6 – Kontextbezogene Bedeutung von Flächen	71
Kapitel 7 – Parametrauflösung	77
Kapitel 8 – Rekonstruktion von Funktionen	81
Kapitel 9 – Volumenberechnung	87
Kapitel 10 – Uneigentliche Integrale	89
Kapitel 11 – Einführung in die Integralrechnung	91
Kapitel 12 – Allgemeine Substitutionsverfahren	99
Kapitel 13 – Partielle Integration und Produktintegration	103
Kapitel 14 – Beispiele zur Integration bei e-Funktionen	107
Kapitel 15 – Logarithmische Integration	111

Gesamte Verantwortung für die Inhalte liegt bei der Lehrperson, die die Inhalte selbstorganisiert erlernen (02-030-251)

Staat

Alle Rechte vorbehalten. All rights reserved.

Druck, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte, aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

SelbstVerlag

tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germany)

Lehrerselbstverlag.de

www.f-druck.de

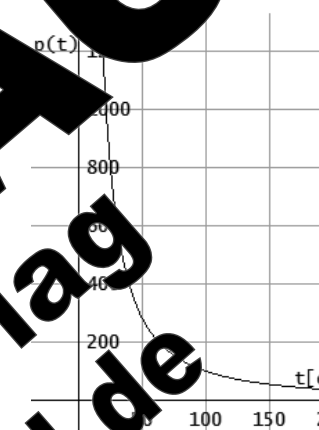
Kapitel 10: Uneigentliche Integrale

Bei Modeprodukten, die nach einer Werbephase einen Renner auf dem Markt darstellen und eine hohe Verkaufsrate haben, nimmt das Käuferinteresse meist sehr schnell ab. Aus den Verkaufsdaten ab dem ersten bis zum fünfzigsten Verkaufstag für ein solches Produkt wird die

Funktion $p(t) = \frac{100000}{\sqrt{t^3}}$ ermittelt. Einheit für $p(t)$: [Anzahl]

Das Diagramm nebenan zeigt den Verlauf der Funktion

Aus diesen Daten soll nun für die Planung der Produktion berechnet werden, wie viele Teile davon insgesamt gekauft werden können.

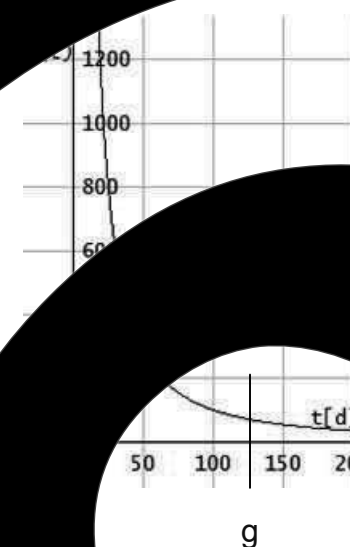


a) Erläutern Sie, warum die Fläche zwischen der Funktion und der Achse der Anzahl der insgesamt verkauften Teile entspricht

b) Begründen Sie, warum man bei der Berechnung der Fläche für die untere Grenze a den Wert $x = 1$ setzen kann, jedoch keine obere Grenze existiert.

c) Berechnen Sie die Fläche zwischen Funktion und x-Achse berechnen, die bis ins Unendliche ausdehnt.

Erläutern Sie in der nebenstehenden Abbildung die grundlegenden Schritte zum Satz bei der Flächenberechnung.



(1) $A_1(g) = \int_1^g \frac{100000}{\sqrt{t^3}} dt$

(2) $A_1(g) = 100000 \int_1^g \frac{1}{t^2} dt$

(3) $A_1(g) = 100000 \int_1^g t \, dt$

(4) $A_1(g) = 100000 \left[\quad \right]_1^g$

(5) $A_1(g) = 100000 \left[-\frac{2}{\sqrt{t}} \right]_1^g$

(6) $A_1(g) = 100000 \left(-\frac{2}{\sqrt{g}} - \left(\quad \right) \right)$

(7) $A_1(\infty) = \lim_{g \rightarrow \infty} A_1(g)$

(8) $A_1(\infty) = \lim_{g \rightarrow \infty} 100000 \left(\quad \right)$

(9) $A_1(\infty) = 100000 \left(\quad \right)$

Zusammenfassung

Bei einer Flächenberechnung mithilfe der Integralrechnung die Integrationsgrenzen nicht berechnen werden, da eine Funktion beliebig oft Nullstellen hat, sondern sich der x-Achse nur annähert, fügt man an einer beliebigen Stelle eine Grenze g ein. Man berechnet unter Verwendung der unbekannten Grenze g zunächst das bestimmte Integral der Funktion und führt anschließend eine Grenzwertberechnung durch. Ergibt sich dabei für den Grenzwert ein endlicher Wert, so wird das Integral als **uneigentliches Integral** bezeichnet.

d) Berechnen Sie die Lücken im Text aus:

(1) $A_1(g) = \int_1^g \frac{100000}{\sqrt{t^3}} dt$

$A_4(\infty) = \lim_{g \rightarrow \infty} \quad =$

Das **uneigentliche Integral** existiert, da die Fläche den endlichen Wert $(\quad) = \quad$ FE hat.

(2) $A_4(g) = \int_1^g \frac{100000}{\sqrt{t^3}} dt$

$\lim_{g \rightarrow \infty} \quad \rightarrow \quad$

Das **uneigentliche Integral** existiert nicht, da die Fläche den unendlichen Wert hat.

Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Integralrechnung
selbstorganisiert erlernen

$\int f(x) dx$

Kapitel

Lineare Substitution

Einführung in die Integralrechnung

Kapitel 1 – Rand- und Flächeninhaltsfunktion	7
Kapitel 2 – Von der Flächeninhaltsfunktion zur Stammfunktion	16
Kapitel 3 – Berechnung von Flächen mit der Stammfunktion	25
Kapitel 4 – Flächen unter Kurven	49
Kapitel 5 – Rechenregeln für Integrale	63
Anwendung der Integralrechnung	
Kapitel 6 – Kontextbezogene Bedeutung von Flächen	71
Kapitel 7 – Parametrauflösung	77
Kapitel 8 – Rekonstruktion von Funktionen	81
Kapitel 9 – Volumenberechnung	87
Kapitel 10 – Ungleichungen und Integrale	89
Weiterführung der Integralrechnung	
Kapitel 11 – Lineare Substitution	91
Kapitel 12 – Allgemeine Substitutionsverfahren	99
Kapitel 13 – Partielle Integration und Produktintegration	103
Kapitel 14 – Beispiele zur Integration bei e-Funktionen	107
Kapitel 15 – Logarithmische Integration	111

Gesamte Darstellung der Integralrechnung selbstorganisiert erlernen (02-030-251)

Alle Rechte vorbehalten. All rights reserved.

Druck, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,

aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet

LehrerselbstVerlag

Lehrerselbstverlag GmbH, Koblenz (Germany)

www.lehrerselbstverlag.de

www.f-druck.de

Kapitel 11: Lineare Substitution

1. Wiederholung Zusammenhang Stammfunktion – Randfunktion – Ableitungsfunktion

Aufgabe 11.1

Verdeutlichen Sie sich am Beispiel der gegebenen Funktion $f(x) = 12x^3 + 3x^2$ die Zusammenhänge zwischen Randfunktion $f(x)$, Stammfunktion $F(x)$ und Ableitungsfunktion $f'(x)$. Füllen Sie dazu die Lücken im Text aus. Auf das Hinzufügen der Integrationskonstante soll hier zur Vereinfachung verzichtet werden.



2. Lineare Substitution

Beim Lernen der Kettenregel haben Sie bereits die innere und äußere Funktion kennen gelernt. Diese Begriffe spielen nun auch bei der hier behandelten Integrationsregel eine Rolle. Es werden Funktionen behandelt, bei denen die Funktion $u(x)$ eine lineare Funktion ist, also die Form $u(x) = ax + b$ hat.

In der nun folgenden Aufgabe sollen grundlegende Zusammenhänge zwischen der Randfunktion $f(x)$ und der zugehörigen Ableitungsfunktion $f'(x)$ für Funktionen verschiedener Klassen mit der inneren Funktion wiederholt werden.

Aufgabe 11.2

Ableitung von Funktionen mit linearer innerer Funktion

Geben Sie für die folgenden Funktionen $f(x)$ die innere Funktion $u(x)$ und die äußere Funktion $v(u)$ an und bestimmen Sie jeweils die Ableitungsfunktion wie im Beispiel a):

Funktion	innere Funktion $u(x) = ax + b$	äußere Funktion $v(u) = \dots$	Ableitungsfunktion
a) $r(x) = (ax + b)^3$	$u'(x) = a$	$v(u) = (u)^3$ $v'(u) = 3(u)^2 = 3(ax + b)^2$	$r'(x) = a \cdot 3(ax + b)^2$
b) $s(x) = (ax + b)^4$	$u'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$	$v(u) = \underline{\hspace{2cm}}$ $v'(u) = \underline{\hspace{2cm}}$	$s'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$
c) $t(x) = \sqrt{ax + b}$	$u'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$	$v(u) = \underline{\hspace{2cm}}$ $v'(u) = \underline{\hspace{2cm}}$	$t'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$
d) $w(x) = \sin(ax + b)$	$u'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$	$v(u) = \underline{\hspace{2cm}}$ $v'(u) = \underline{\hspace{2cm}}$	$w'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

Ergänzen

Die Funktion $f(x) = (ax + b)^n$ lässt sich als Produkt von zwei Funktionen darstellen. Die erste Funktion $v(ax + b)$ enthält aus der inneren Funktion $u(x) = ax + b$ den Faktor $\underline{\hspace{2cm}}$ und als zweiten Faktor die Funktion $\underline{\hspace{2cm}}$.
Die Ableitung $f'(x)$ ergibt sich dann nach der Produktregel zu $f'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$, also $v'(ax + b)$.

Man kann das Ergebnis daher in der Form $f'(x) = a \cdot v'(ax + b)$ darstellen.

Aufgabe 11.3

Integration von Funktionen mit linearer innerer Funktion

Mit dem Ergebnis aus der Ableitung von Funktionen mit linearen Verkettungen und der Hilfe bereits bekannter Stammfunktionen soll nun anhand der Beispiele aus Aufgabe 11.2 eine allgemeine Regel für die Integration dieser Funktionen geschlossen werden. Bearbeiten Sie dazu auf der nächsten Seite das Beispiel $r(x) = (ax + b)^3$ und gehen Sie anschließend bei den anderen Funktionen genauso vor. Beginnen Sie bereits mit Ihrer ersten Vermutung zu einer Stammfunktion richtig liegt und prüfen Sie das Ergebnis durch die Ableitung einer zweiten Vermutung.

Funktion	Formulieren und Prüfen einer Vermutung für die Stammfunktion	Stammfunktion
$f(x) = x^3$		$F(x) = \frac{1}{4}x^4$
$r(x) = (ax + b)^3$	Vermutung 1: $R(x) = \frac{1}{4}(ax + b)^4$ Prüfen: $R'(x) = \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot (ax + b)^3 \cdot a = a(ax + b)^3 \neq r(x)$ Ergebnis: Die Vermutung 1 ist falsch. Vermutung 2: $R(x) = \frac{1}{a \cdot 4}(ax + b)^4$ $R'(x) = \frac{1}{a \cdot 4} \cdot 4 \cdot (ax + b)^3 \cdot a = (ax + b)^3 = r(x)$ Ergebnis: Die Vermutung 2 ist richtig.	$R(x) = \frac{1}{4a}(ax + b)^4$

Da die Ableitung durch die innere Funktion entstanden ist, muss der Faktor a durch die innere Funktion korrigiert werden.

Funktion	Formulieren und Prüfen einer Vermutung für die Stammfunktion	Stammfunktion
$f(x) = x^4$		$F(x) = \underline{\hspace{2cm}}$
$s(x) = (ax + b)^4$	Vermutung 1: $S(x) = \frac{1}{5}(ax + b)^5$ Prüfen: $S'(x) = \frac{1}{5} \cdot 5 \cdot (ax + b)^4 \cdot a = a(ax + b)^4 \neq s(x)$ Ergebnis: Die Vermutung 1 ist falsch. Vermutung 2: $S(x) = \frac{1}{a \cdot 5}(ax + b)^5$ $S'(x) = \frac{1}{a \cdot 5} \cdot 5 \cdot (ax + b)^4 \cdot a = (ax + b)^4 = s(x)$ Ergebnis: Die Vermutung 2 ist richtig.	$S(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

Funktion	Formulieren und Prüfen einer Vermutung für die Stammfunktion	Stammfunktion
$f(x) = \sqrt{x}$		
$t(x) = \sqrt{ax+b}$	Vermutung 1: _____ Prüfen: _____ Die Vermutung ist _____	$T(x) =$ _____
$f(x) = \sin$		$F(x) =$ _____
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{ax+b}}$	Vermutung 1: _____ Prüfen: _____ Die Vermutung ist _____	$W(x) =$ _____

Bei den Funktionen, bei denen die innere Funktion die Form $t(x) = \sqrt{ax+b}$ hat, kann man die Stammfunktion integrieren, indem man die $\sqrt{ax+b}$ Funktion integriert und diese mit der Ableitung der $\sqrt{ax+b}$ Funktion also durch _____ dividiert.

Lineare Substitutionsregel:

$$\int f(ax+b) \cdot \frac{1}{a} dx = \frac{1}{a} \int f(u) du \quad \text{mit} \quad u = ax+b \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R} \text{ und } a \neq 0$$

Übungen:

3. Ergänzung zur unbestimmten Integration über das ausführliche lineare Substitutionsverfahren

Wenn die Funktionen komplizierter werden, ist es günstig, mit dem ausführlichen Substitutionsverfahren zu arbeiten. Dieses Verfahren wird hier zunächst an zwei Beispielen erklärt, kann aber auch bei Funktionen angewandt werden, deren innere Funktion nicht linear ist.

Beispiel 1:

Der Ausdruck in der Klammer, also die innere Funktion, wird durch u ersetzt.

Die innere Funktion wird nach u abgeleitet. Anstatt u schreiben man hier $\frac{du}{dx}$.

Inhalt der Klammer und dx werden ersetzt bzw. substituiert.

Wenn möglich, vereinfachen, dann integrieren.

Substitution

Auflösen nach dx .

Ergebn substituieren und Integrationskonstante anfügen.

Beispiel 1: $F(x) = \int (1-2x)^3 dx$

Substitution: $u = 1-2x$

$\frac{du}{dx} = -2$

$dx = -\frac{1}{2} du$

Wenn möglich, vereinfachen, dann integrieren:

$F(x) = \int u^3 \cdot (-\frac{1}{2}) du$

$F(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} u^4$

$F(x) = -\frac{1}{8} (1-2x)^4 + C$

Beispiel 2:

Beispiel 2 wird gezeigt, wie man einfache gebrochen rationale Funktionen, also Funktionen, bei denen x im Nenner steht, mithilfe der Substitutionsregel integrieren kann. Erläutern Sie die einzelnen Schritte:

$$F(x) = \int \frac{1}{(1+3x)^2} dx$$

Substitution

$$u = 1+3x$$

$$\frac{du}{dx} = 3$$

$$F(x) = \int u^{-2} \frac{1}{3} du$$

$$F(x) = \frac{1}{3} \int u^{-2} du$$

$$F(x) =$$

$$\frac{1}{3(1+3x)} + C$$

4. Ergänzung zur bestimmten Integration über das ausführliche lineare Substitutionsverfahren

Es gibt verschiedenen Möglichkeiten beim ausführlichen linearen Substitutionsverfahren mit den Integrationsgrenzen umzugehen. Hier wird für die Funktion $t(x) = \sqrt{2x+1}$ (vgl. Aufgabe 11.3) nur die Methode beschrieben, bei der die Grenzen beibehalten und einfach in der Substitution eingesetzt werden.

Ergänzen Sie die Rechnungen:

$$T(x) = \int_0^4 \sqrt{2x+1} \, dx$$

Die Grenzen 0 und 4 sind nur für die Variable x gültig. Das wird nach der Substitution berücksichtigt, indem für jeden Ausdruck, in dem x vorkommt, explizit die neue Grenze $u = 0$ und $u = 4$ angegeben wird.

$$u = \sqrt{2x+1} \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} \quad dx = \sqrt{2x+1} \, du$$

$$P(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} (2x+1)^{3/2} \right]_0^4 = \frac{1}{3} \approx 8,67FE$$

Nach der Rücksubstitution werden die Grenzen wie gewohnt angegeben und eingesetzt.

Ü11.1 Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int \sin(ax+b) \, dx$ (Ergebnis vgl. Aufgabe 11.3) und das

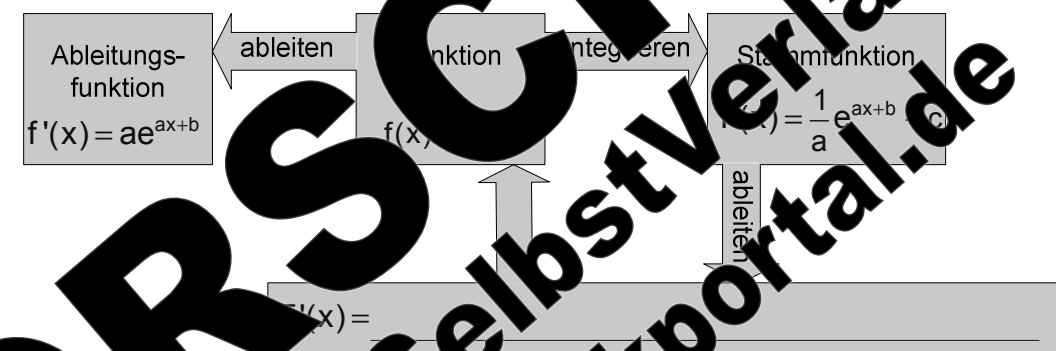
bestimmte Integral $\int_0^\pi \cos(-0,5x) \, dx = 4FE$.

5. Lineare Substitution bei der e-Funktion

Sie wissen bereits, dass man die Stammfunktion bei linear verketteten Funktionen mithilfe der linearen Substitution ermitteln kann. Um diese Regel auf die e-Funktion anzuwenden, soll hier die im Kasten Stammfunktion angegebene Funktion $F(x)$ durch Ableiten verifiziert werden.

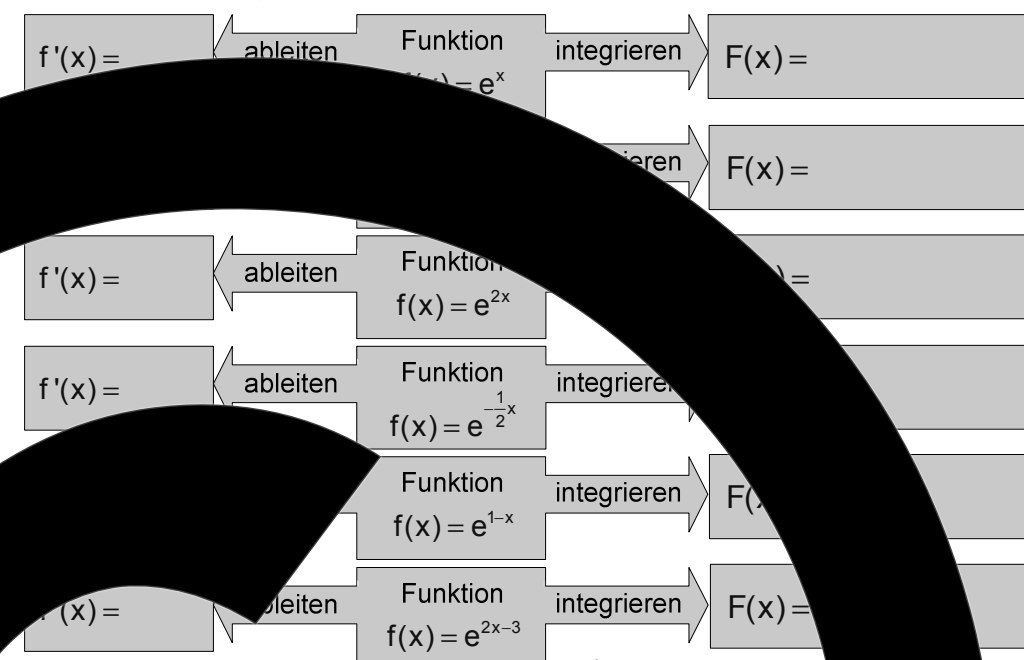
Aufgabe 11.4

Leiten Sie die angegebene Stammfunktion ab und formulieren Sie einen Merksatz für die Bildung der Stammfunktion bei diesem Typ von e-Funktionen.



Aufgabe 11.5

Geben Sie jeweils die Ableitungs- und Stammfunktion an:



Ende Übungen:

Raum für Rechnungen und Notizen



Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Integralrechnung
selbstorganisiert erlernen



Kapitel

Allgemeines Substitutionsverfahren



Kapitel 1 – Rand- und Flächeninhaltsfunktion	7
Kapitel 2 – Von der Flächeninhaltsfunktion zur Stammfunktion	16
Kapitel 3 – Berechnung von Flächen mit der Stammfunktion	25
Kapitel 4 – Flächen unter Kurven	49
Kapitel 5 – Rechenregeln für Integrale	63

Anwendung der Integralrechnung

Kapitel 6 – Kontextbezogene Bedeutung von Flächen	71
Kapitel 7 – Parametrisierung	77
Kapitel 8 – Rekonstruktion von Funktionen	81
Kapitel 9 – Volumenberechnung	87
Kapitel 10 – Ungleichungen	89
Kapitel 11 – Lineare Substitution	91
Kapitel 12 – Allgemeines Substitutionsverfahren	99
Kapitel 13 – Partielle Integration und Produktintegration	103
Kapitel 14 – Beispiele zur Integration bei e-Funktionen	107
Kapitel 15 – Logarithmische Integration	111

Gesamte Verantwortung für die Inhalte liegt bei der Person, die diese Inhalte selbstorganisiert erlernen (02-030-251)

Alle Rechte vorbehalten. All rights reserved.
 Nachdruck, auch auszugsweise, vorbehalten. Nachdruck, auch auszugsweise, vorbehalten.
 aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.
 SelbstVerlag
 F. Druck & Freunde GmbH, Koblenz (Germany)
 Lehrerselbstverlag.de
 www.f-druck.de

Kapitel 12: Allgemeines Substitutionsverfahren

Wie Sie im Kapitel "Lineare Substitution" bereits erkannt haben, wird das allgemeine Substitutionsverfahren bei Funktionen eingesetzt, bei denen man zum Ableiten die Kettenregel anwendet. Wie bei der linearen Substitution wird meist auch bei komplizierteren Funktionen eine innere Funktion substituiert. Im Rahmen dieser Unterlagen sollen häufig auftretende Standardmethoden bei der Substitution behandelt werden.

1. Standardverfahren bei der Integration durch Substitution

Die standardmäßige Vorgehensweise bei der Integration durch Substitution soll anhand der folgenden Funktionen beispielhaft verdeutlicht werden. Das Substitutionsverfahren kann vor allem dann angewendet werden, wenn im Funktionsform die Ableitung einer inneren Funktion $u(x)$ als Faktor vorkommt.

$$u(x) = 2 - 3x^2$$

$$m(x) = -10x(2 - 3x^2)^4$$

$$u'(x) = -6x$$

$$m(x) = -10x(2 - 3x^2)^4$$

$$m(x) = -10x(2 - 3x^2)^4$$

$$m(x) = -10x(2 - 3x^2)^4$$

$$m(x) = -10x(2 - 3x^2)^4$$

$$m(x) = -10x(2 - 3x^2)^4$$

$$m(x) = -10x(2 - 3x^2)^4$$

$$m(x) = -10x(2 - 3x^2)^4$$

$$m(x) = -10x(2 - 3x^2)^4$$

$$m(x) = -10x(2 - 3x^2)^4$$

$$m(x) = -10x(2 - 3x^2)^4$$

$$m(x) = -10x(2 - 3x^2)^4$$

$$m(x) = -10x(2 - 3x^2)^4$$

$$m(x) = -10x(2 - 3x^2)^4$$

$$m(x) = -10x(2 - 3x^2)^4$$

$$m(x) = -10x(2 - 3x^2)^4$$

$$m(x) = -10x(2 - 3x^2)^4$$

$$u'(x) = -6x$$

$$u'(x) = -6x$$

$$u'(x) = -6x$$

$$u'(x) = -6x$$

$$u'(x) = -6x$$

$$u'(x) = -6x$$

$$u'(x) = -6x$$

$$u'(x) = -6x$$

$$u'(x) = -6x$$

$$u'(x) = -6x$$

$$u'(x) = -6x$$

$$u'(x) = -6x$$

$$u'(x) = -6x$$

$$u'(x) = -6x$$

$$u'(x) = -6x$$

$$u'(x) = -6x$$

$$u'(x) = -6x$$

$$u'(x) = -6x$$

$$u'(x) = -6x$$

$$u'(x) = -6x$$

$$u'(x) = 2x$$

$$u'(x) = 2x$$

$$u'(x) = 2x$$

$$u'(x) = 2x$$

$$u'(x) = 2x$$

$$u'(x) = 2x$$

$$u'(x) = 2x$$

$$u'(x) = 2x$$

$$u'(x) = 2x$$

$$u'(x) = 2x$$

$$u'(x) = 2x$$

$$u'(x) = 2x$$

$$u'(x) = 2x$$

$$u'(x) = 2x$$

$$u'(x) = 2x$$

$$u'(x) = 2x$$

$$u'(x) = 2x$$

$$u'(x) = 2x$$

$$u'(x) = 2x$$

$$u'(x) = 2x$$

Aufgabe 12.1

Erläutern Sie für die folgenden Funktionen jeweils erfolgten Rechnungen bzw. ergänzen Sie fehlende Rechnungen.

$$\int -10x(2 - 3x^2)^4 dx$$

$$\text{Substitution: } u = 2 - 3x^2$$

$$\frac{du}{dx} = -6x$$

$$= \frac{5}{3} \frac{1}{5} u^5$$

$$= \frac{1}{3} (2 - 3x^2)^5 + c$$

Substitution

Wird substituiert

x muss sich vollständig kürzen lassen.

b) Unbestimmte Integration der Funktion $n(x)$ durch Substitution

$$N(x) = \int \frac{4x}{(x^2 + 8)^2} dx$$

Auch hier wird die
innere Funktion

$$\text{Substitution: } u = x^2 + 8$$

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

$$dx = \frac{du}{2x}$$

$$N(u) = \int \frac{4x}{u^2} \frac{du}{2x} = 2 \int \frac{1}{u^2} du = -\frac{2}{u}$$

$$N(x) = \frac{-2}{x^2 + 8} + c$$

c) Bestimmte Integration der Funktion $p(x)$ durch Substitution

Es gibt verschiedene Möglichkeiten bei der Integration durch Substitution mit den Integrationsgrenzen umzugehen. Hier wird nur die Methode beschrieben, bei der die Grenzen beibehalten und erst nach der Rücksubstitution eingesetzt werden.

Lösen Sie die Rechnungen:

$$P(x) = \int_0^{0,5} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\text{Substitution: } u = 1 - x^2$$

Die Grenzen 0 und 0,5 sind nur für
die Variable x gültig. Das wird nach
der Substitution berücksichtigt,
indem für jeden Ausdruck, in dem u
vorkommt, u explizit für die Grenzen
0 und 0,5 notiert wird.

$$dx = -\frac{du}{2x}$$

$$P(x) = \int_{x=0}^{x=0,5} \frac{x}{\sqrt{u}} \frac{du}{-2x} = -\frac{1}{2} \int_{x=0}^{x=0,5} \frac{1}{\sqrt{u}} du = -\frac{1}{2} \int_{x=0}^{x=0,5} u^{-\frac{1}{2}} du =$$

$$P(x) = \left[-\sqrt{1-x^2} \right]_{x=0}^{x=0,5} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Einsetzen
muss
notiert

Bei der Substitution werden
die Grenzen u angewohnt
angegeben und eingesetzt.

d) Bestimmte Integration der Funktion $q(x)$ durch Substitution

$$A_0(0,5\pi) = \int_0^{0,5\pi} \sin^2(x) \cos(x) dx = \int_0^{0,5\pi} (\sin(x))^2 \cos(x) dx$$

$$\text{Substitution: } u = \sin(x)$$

$$\frac{du}{dx} = \cos(x)$$

$$dx = \frac{du}{\cos(x)}$$

hier kann $\cos(x)$,
die Ableitung der
inneren Funktion $\sin(x)$,
als Faktor im
Nenner vor.

$\cos(x)$ kann
man kürzen.

$$A_0(0,5\pi) = \int_{x=0}^{x=0,5\pi} u^2 \cos(x) \frac{du}{\cos(x)} = \int_{x=0}^{x=0,5\pi} u^2 du$$

$$A_0(0,5\pi) = \left[\frac{1}{3} u^3 \right]_{x=0}^{x=0,5\pi} = \frac{1}{3} (\sin^3(0,5\pi) - \sin^3(0)) = \frac{1}{3}$$

2. Komplexes Substitutionsverfahren zur Hilfe des Tafelwerks lösen

Die Integration der Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}$ ist kompliziert, muss aber nicht in allen Details durchgeführt werden, da in Tafelwerken bzw. Formelsammlungen die Stammfunktion hierzu angegeben ist. Umformungsschritte werden jedoch notwendig, wenn die Funktion nicht genau in dieser Form angegeben ist, sondern $f(x)$ in der Form $f(x) = \frac{1}{a^2 x^2 + 1}$. Anhand dieses Beispiels sollen die grundlegenden Überlegungen für den Lösungsweg dargestellt werden. Dieser Lösungsweg kann dann auf ähnliche Integrale übertragen werden.

$$f_t(x) = \frac{1}{t^2 x^2 + 1} = \frac{1}{t^2 (x^2 + \frac{1}{t^2})} = \frac{1}{t^2} \cdot \frac{1}{x^2 + \frac{1}{t^2}}$$

Der Ausdruck muss algebraisch so
umgeformt werden, dass der Bruch
dem Ausdruck $\frac{1}{x^2 + a^2}$ im
Tafelwerk entspricht. Hier wird für
 $a = \frac{1}{t}$ eingesetzt.

$$f_t(x) = \frac{1}{t^2} (t \arctan(tx)) + c = \frac{\arctan(tx)}{t} + c$$

Der Ausdruck ist als Stammfunktion der
Funktion $\frac{1}{x^2 + a^2}$ angegeben. Man muss nun
das $\frac{1}{t^2}$ durch $\frac{1}{t}$ ersetzen und wenn möglich vereinfachen.

Ü12.1 Ermitteln Sie die Stammfunktion von $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-k^2x^2}}$ auf dem entsprechenden Weg.



Erlauben Sie sich die Lösungen: _____

Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Integralrechnung
selbstorganisiert erlernen



Kapitel

Partielle Integration &
Produktintegration



Einführung in die Integralrechnung

Kapitel 1 – Rand- und Flächeninhaltsfunktion	7
Kapitel 2 – Von der Flächeninhaltsfunktion zur Stammfunktion	16
Kapitel 3 – Berechnung von Flächen mit der Stammfunktion	25
Kapitel 4 – Flächen unter Kurven	49
Kapitel 5 – Rechenregeln für Integrale	63
Anwendung der Integralrechnung	
Kapitel 6 – Kontextbezogene Bedeutung von Flächen	71
Kapitel 7 – Parametrisierung	77
Kapitel 8 – Rekonstruktion von Funktionen	81
Kapitel 9 – Volumenberechnung	87
Kapitel 10 – Ungleichungen und Integrale	89
Weiterführung der Integralrechnung	
Kapitel 11 – Lineare Substitution	91
Kapitel 12 – Allgemeine Substitutionsverfahren	99
Kapitel 13 – Partielle Integration und Produktintegration	103
Kapitel 14 – Beispiele zur Integration bei e-Funktionen	107
Kapitel 15 – Logarithmische Integration	111

Gesamte Arbeit ist als Lernhilfe konzipiert und soll die eigenständige, selbstorganisierte Erlernung der Inhalte fördern. (02-030-251)

Seite 1

Alle Rechte vorbehalten. All rights reserved.

Druck, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte, aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

LehrerselbstVerlag

LehrerselbstVerlag GmbH, Koblenz (Germany)

www.lehrerselbstverlag.de

www.f-druck.de

Kapitel 13: Partielle Integration oder Produktintegration

1. Voraussetzung für die Anwendung der Formel

Voraussetzung für diese Integrationsvariante ist, dass sich die zu integrierende Funktion $\int f(x)dx$ aus einem Produkt von zwei Funktionen zusammensetzt.

Beispiel: $f(x) = 4x \sin(x) = \underbrace{4x}_{1. \text{ Faktor}} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{2. \text{ Faktor}}$

Ein Faktor ist die Funktion $4x$.
Der andere Faktor die Funktion $\sin(x)$.

Sie wissen bereits, dass man eine Funktion aus dem Produkt zweier Funktionen zusammensetzen, also in der Form $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ vorliegen, für die Ableitung die Produktregel anwenden muss. Der Integrationsprozess von Funktionen dieses Typs liegt ebenfalls der Produktregel zugrunde.

2. Herleitung der Formel

Die Formel für die Ableitung wird mit der Verwendung $f'(x) = (u \cdot v)'$ in leicht veränderter Form notiert:

$$f'(x) = u'v + v'u$$

oder

$$(u \cdot v)' = u'v + v'u$$

schreibt man

Entweder nach $u'v$ oder nach $v'u$ auflösen. (vgl. Ü13.1)

$$v'u = (u \cdot v)' - u'v$$

Beide Seiten integrieren:

$$\int v'u \, dx = \int (u \cdot v)' \, dx - \int u'v \, dx$$

aus $f(x) = uv \Rightarrow f'(x) = (uv)'$
da $\int f'(x)dx = f(x)$
folgt: $\int (uv)' dx = uv$

$$\int v'u \, dx = u \cdot v - \int u'v \, dx$$

3. Hinweise zur Formel

Das Integral $\int v'u \, dx$ ist kompliziert, kann aber als Integral einer Funktion und einer anderen Funktion u dargestellt werden. Wie im folgenden Beispiel deutlich wird, entsteht durch die Wahl von u und v' zu diesem Produkt auf der rechten Seite der Formel ein Integral, das einfacher zu integrieren ist als das Ausgangsintegral.

kompliziertes Integral
aus der
Aufgabenstellung

$$\int v'u \, dx = u \cdot v - \int u'v \, dx$$

Integral, das
als in der
Aufgabenstellung
vorgegeben ist

4. Produktintegration am Beispiel $f(x) = 4x \sin(x)$

Wie Sie oben schon erkannt haben, besteht der Funktionsterm aus zwei Faktoren. Man muss festlegen, wie man die beiden Faktoren den Funktionen $u(x)$ oder $u'(x)$ bzw. $v(x)$ oder $v'(x)$ zuordnet. Man ordnet die Faktoren jedoch standardmäßig so zu, dass man den Faktor u ableitet, der sich beim Ableiten vereinfacht. In der folgenden Aufgaben werden beide Möglichkeiten der Zuordnung und das daraus resultierende Ergebnis für die Berechnung des Integrals verglichen.

$$f(x) = \int 4x \sin(x) dx$$

Auswahlmöglichkeit für die Zuordnung von u und v

Möglichkeit 1

$$\int \underbrace{4x}_{u'} \cdot \underbrace{\sin(x)}_v dx$$

$$u = \sin(x)$$

$$v = 4x$$

$$u' = \cos(x)$$

$$v' = 4$$

$$u'v = 4\cos(x)$$

$$u'v = -4\cos(x)$$

Der Ausdruck $u'v = 4\cos(x)$ ist komplizierter als das Ausgangsintegral, da sich der Faktor $4x$ nicht vereinfacht.

Möglichkeit 1 verwerfen

Der Ausdruck $u'v = -4\cos(x)$ ist einfacher als das Ausgangsintegral, da sich der Faktor $4x$ vereinfacht.

Möglichkeit 2 wählen

Führen der Integration durch
setzen in die Formel

$$\begin{aligned} \int 4x \sin(x) dx &= \int u'v dx \\ &= \int 4x \sin(x) dx = \int -4\cos(x) dx \\ &= -4 \int \cos(x) dx = -4 \sin(x) + c \\ F(x) &= -4 \sin(x) + c \end{aligned}$$

Übungen

Ü13.1 Begründen Sie anhand der Beispielaufgabe, dass die oben genannte Formel $\int v'u dx = u \cdot v - \int u'v dx$ und die Formel $\int u'v dx = u \cdot v - \int v'u dx$ gültig sind.



Ü13.2 Berechnen Sie mit Hilfe der partiellen Integration die Stammfunktion von $f(x) = 2x \cos(2+x)$.

$$f(x) = 2x \cos(2+x)$$

$$f(x) = \underbrace{2x}_u \cdot \underbrace{\cos(2+x)}_v$$

$$u = 2x$$

$$v = \cos(2+x)$$

$$u' = 2$$

$$v' = -\sin(2+x)$$

$$\int uv' dx = uv - \int u'v dx$$

$$\int 2x \cos(2+x) dx =$$

Ü13.3 Erläutern Sie in Stichworten die Bedeutung einzelnen Zeilen bzw. die erfolgten Umformungen und Berechnungen. Formulieren Sie, welche Besonderheit hier auftritt.

$$I) \quad F(x) = \int \sin^2(x) dx = \int \underbrace{\sin(x)}_u \cdot \underbrace{\sin(x)}_{v'} dx \quad (1)$$

$$(2) \quad \begin{array}{l} u = \sin(x) \quad v = \cos(x) \\ u' = \cos(x) \quad v' = -\sin(x) \end{array}$$

$$\int uv' dx = uv - \int u'v dx$$

$$\int \sin^2(x) dx = -\sin(x)\cos(x) - \int \cos(x)(-\cos(x)) dx$$

$$\int \sin^2(x) dx = -\sin(x)\cos(x) + \int \cos^2(x) dx$$

$$\int \sin^2(x) dx = -\sin(x)\cos(x) + \int (1 - \sin^2(x)) dx \quad (4)$$

$$\int \sin^2(x) dx = -\sin(x)\cos(x) + \int 1 dx - \int \sin^2(x) dx$$

$$2 \int \sin^2(x) dx = -\sin(x)\cos(x) + \int 1 dx \quad (5)$$

$$\int \sin^2(x) dx = -\frac{1}{2} \sin(x)\cos(x) + \frac{1}{2} \int 1 dx \quad (6)$$

$$\int \sin^2(x) dx = -\frac{1}{2} \sin(x)\cos(x) + \frac{1}{2} x + C \quad (7)$$

$$\int \sin^2(x) dx = -\frac{1}{2} \sin(x)\cos(x) + \frac{1}{2} x + C \quad (8)$$

$$\int \sin^2(x) dx = -\frac{1}{2} \sin(x)\cos(x) + \frac{1}{2} x + C \quad (9)$$

$$\int \sin^2(x) dx = -\frac{1}{2} \sin(x)\cos(x) + \frac{1}{2} x + C \quad (10)$$

$$\int \sin^2(x) dx = -\frac{1}{2} \sin(x)\cos(x) + \frac{1}{2} x + C \quad (11)$$

$$\int \sin^2(x) dx = -\frac{1}{2} \sin(x)\cos(x) + \frac{1}{2} x + C \quad (12)$$

$$\int \sin^2(x) dx = -\frac{1}{2} \sin(x)\cos(x) + \frac{1}{2} x + C \quad (13)$$

$$\int \sin^2(x) dx = -\frac{1}{2} \sin(x)\cos(x) + \frac{1}{2} x + C \quad (14)$$

$$\int \sin^2(x) dx = -\frac{1}{2} \sin(x)\cos(x) + \frac{1}{2} x + C \quad (15)$$

$$\int \sin^2(x) dx = -\frac{1}{2} \sin(x)\cos(x) + \frac{1}{2} x + C \quad (16)$$

$$\int \sin^2(x) dx = -\frac{1}{2} \sin(x)\cos(x) + \frac{1}{2} x + C \quad (17)$$

$$\int \sin^2(x) dx = -\frac{1}{2} \sin(x)\cos(x) + \frac{1}{2} x + C \quad (18)$$

$$\int \sin^2(x) dx = -\frac{1}{2} \sin(x)\cos(x) + \frac{1}{2} x + C \quad (19)$$

$$\int \sin^2(x) dx = -\frac{1}{2} \sin(x)\cos(x) + \frac{1}{2} x + C \quad (20)$$

$$\int \sin^2(x) dx = -\frac{1}{2} \sin(x)\cos(x) + \frac{1}{2} x + C \quad (21)$$

$$\int \sin^2(x) dx = -\frac{1}{2} \sin(x)\cos(x) + \frac{1}{2} x + C \quad (22)$$

$$\int \sin^2(x) dx = -\frac{1}{2} \sin(x)\cos(x) + \frac{1}{2} x + C \quad (23)$$

$$\int \sin^2(x) dx = -\frac{1}{2} \sin(x)\cos(x) + \frac{1}{2} x + C \quad (24)$$

$$\int \sin^2(x) dx = -\frac{1}{2} \sin(x)\cos(x) + \frac{1}{2} x + C \quad (25)$$

$$\int \sin^2(x) dx = -\frac{1}{2} \sin(x)\cos(x) + \frac{1}{2} x + C \quad (26)$$

$$\int \sin^2(x) dx = -\frac{1}{2} \sin(x)\cos(x) + \frac{1}{2} x + C \quad (27)$$

$$\int \sin^2(x) dx = -\frac{1}{2} \sin(x)\cos(x) + \frac{1}{2} x + C \quad (28)$$

$$\int \sin^2(x) dx = -\frac{1}{2} \sin(x)\cos(x) + \frac{1}{2} x + C \quad (29)$$

Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Integralrechnung selbstorganisiert erlernen



Kapitel

Beispiele zur Integralrechnung
e-Funktionen

Kapitel 1 – Rand- und Flächeninhaltsfunktion	7
Kapitel 2 – Von der Flächeninhaltsfunktion zur Stammfunktion	16
Kapitel 3 – Berechnung von Flächen mit der Stammfunktion	25
Kapitel 4 – Flächen unter Kurven	49
Kapitel 5 – Rechenregeln für Integrale	63
Anwendung der Integralrechnung	
Kapitel 6 – Kontextbezogene Bedeutung von Flächen	71
Kapitel 7 – Parametrauflösung	77
Kapitel 8 – Rekonstruktion von Funktionen	81
Kapitel 9 – Volumenberechnung	87
Kapitel 10 – Ungleichungen und Integrale	89
Weiterführung der Integralrechnung	
Kapitel 11 – Lineare Substitution	91
Kapitel 12 – Allgemeines Substitutionsverfahren	99
Kapitel 13 – Partielle Integration und Produktintegration	103
Kapitel 14 – Beispiele zur Integration bei e-Funktionen	107
Kapitel 15 – Logarithmische Integration	111

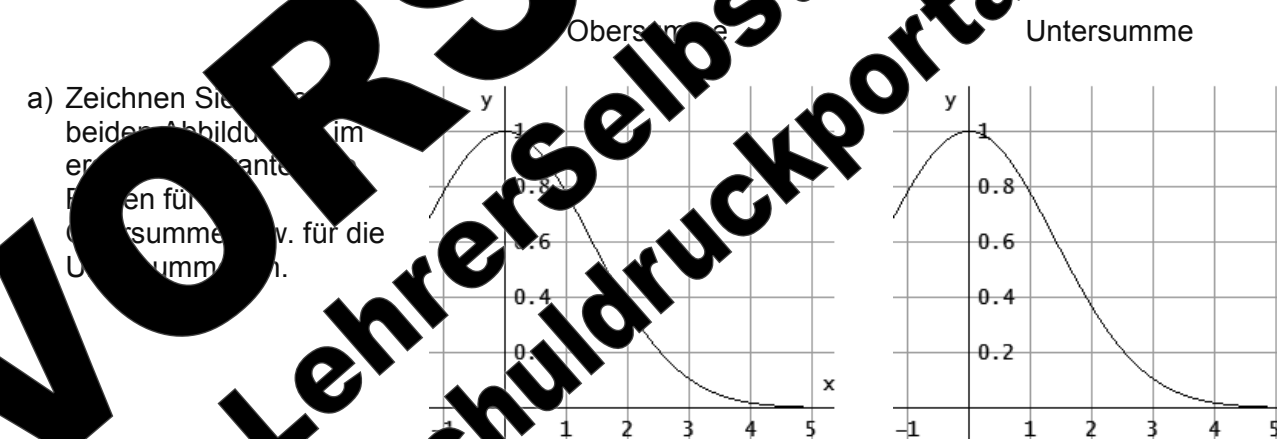
Kapitel 14: Beispiele zur Integration von e-Funktionen

1. Numerische Integration

Für e-Funktionen wie $f(x) = e^{-x^2}$ existiert keine Stammfunktion. Daher kann man das Substitutionsverfahren und die partielle Integration nicht anwenden. Für sie kann man hier jedoch mit numerischen Verfahren wie der Mittelwertbildung aus Ober- und Untersumme oder dem Trapezverfahren approximiert werden.

Aufgabe 14.1

Ermitteln Sie einen Näherungswert für die Fläche, welche die Funktion $f(x) = e^{-x^2}$ im Intervall $[0;4]$ mit der x-Achse einschließt. Runden Sie die Fläche auf eine Stellenbreite von $\Delta x = 0,1$ mithilfe von Ober- und Untersumme ab. (Kontrollergabe: $A \approx 1,76$ FE)



b) Ermitteln Sie die folgenden Funktionswerte und berechnen Sie den Näherungswert für die Fläche A.

$$f(0) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f(1) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f(2) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f(3) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f(4) = \underline{\hspace{2cm}}$$

Obersumme

Untersumme

Näherungswert für die Fläche: $A \approx \underline{\hspace{2cm}}$

Skizzieren Sie, wie man den Näherungswert für A verbessern kann:

2. Die Produktintegration bei e-Funktionen mit linearer innerer Funktion

e-Funktionen mit einer linearen Funktion $u(x)$ im Exponenten und einer Funktion $v(x)$ in dem x^n vorkommt, werden mithilfe der Produktintegration integriert.

Aufgabe 14.2

Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = 3xe^{-\frac{1}{2}x}$ mit der x-Achse einen endlichen Flächeninhalt von 12 FE einschließt.

Zeigen Sie dazu durch Ergänzung des Rechenwegs, dass $f(x)$ die angegebene Stammfunktion besitzt und fügen Sie in der Abbildung eine beliebigere Grenze g ein (vgl. uneigentliche Integrale im Kapitel 10).

Ermittlung der Stammfunktion:

$$\int 3xe^{-\frac{1}{2}x} dx$$

$$u = 3x$$

$$u' = \underline{\hspace{2cm}} \quad v' = e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$\text{Formel: } \int uv' dx = uv - \int u'v dx$$

$$\int 3xe^{-\frac{1}{2}x} dx = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$F(x) = -6e^{-\frac{1}{2}x}(x+2) + c$$

Berechnung des Flächeninhalts:

$$A_0(g) = \int_0^g f(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$$

U

3. Ergänzende Betrachtung zur nichtlinearen Substitution bei e-Funktionen

Für e-Funktionen der Form $f(x) = ax^{n-1}e^{bx^n}$ bietet sich das Substitutionsverfahren an, da im Vorfaktor die Ableitung des Exponenten enthalten ist.

Aufgabe 14.3

Zeigen Sie, dass die Fläche, welche die Funktion

$$f(x) = xe^{-2x^2}$$

im ersten Quadranten mit der x-Achse einschließt, einen endlichen Flächeninhalt von $\frac{1}{4}$ FE hat.

Ergänzen Sie die Abbildung um eine beliebigere Grenze g (vgl. uneigentliche Integrale im Kapitel 10) sowie im Vorschlag für die Berechnung fehlende Berechnungen und A

$$A_0(g) = \int_0^g xe^{-2x^2} dx$$

$$\text{Substitution: } u = -2x^2$$

$$\frac{du}{dx} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$A_0(g) = \left[\underline{\hspace{2cm}} \right]_0^g = -\frac{1}{4}(e^{-g^2} - 1)$$

$$A_0(\infty) = \lim_{g \rightarrow \infty} -\frac{1}{4}(e^{-g^2} - 1) = \underline{\hspace{2cm}}$$

de Übungen:

Raum für Rechnungen und Notizen



Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Integralrechnung
selbstorganisiert erlernen



Kapitel

Logarithmische Integri...



Einführung in die Integralrechnung

Kapitel 1 – Rand- und Flächeninhaltsfunktion	7
Kapitel 2 – Von der Flächeninhaltsfunktion zur Stammfunktion	16
Kapitel 3 – Berechnung von Flächen mit der Stammfunktion	25
Kapitel 4 – Flächen unter Kurven	49
Kapitel 5 – Rechenregeln für Integrale	63

Anwendung der Integralrechnung

Kapitel 6 – Kontextbezogene Bedeutung von Flächen	71
Kapitel 7 – Parametrisierung	77
Kapitel 8 – Rekonstruktion von Funktionen	81
Kapitel 9 – Volumenberechnung	87
Kapitel 10 – Ungleichungen und Integrale	89

Weiterführung der Integralrechnung

Kapitel 11 – Lineare Substitution	91
Kapitel 12 – Allgemeine Substitutionsverfahren	99
Kapitel 13 – Partielle Integration und Produktintegration	103
Kapitel 14 – Beispiele zur Integration bei e-Funktionen	107
Kapitel 15 – Logarithmische Integration	111

Gesamte Verantwortung für den Inhalt der Inhalte liegt bei dem Verfasser. (2-030-251)

Alle Rechte vorbehalten.

Alle Rechte vorbehalten. All rights reserved.

Alle Rechte vorbehalten, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte, aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

LehrerselbstVerlag

LehrerselbstVerlag & Freunde GmbH, Koblenz (Germany)

www.lehrerselbstverlag.de

www.f-druck.de

Kapitel 15: Logarithmische Integration

Besonders einfach ist die Integration durch Substitution, wenn die Funktion in die Form $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ umgeformt werden kann. Ergänzen Sie:

Beispiel:

$$f(x) = \frac{1}{1+4x} \quad \text{Substitution} \quad u = 1+4x$$

$$F(x) = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C = \ln|1+4x| + C$$

Die Substitution führt zum Ausdruck $\int \frac{1}{u} du$, was nach der Integration $\ln|u|$ ergibt.

$$F(x) = \frac{1}{4} \ln|1+4x| + C$$

Betragsstriche können entfallen, wenn der Ausdruck positiv ist.

Ergänzen Sie zum Merksatz:

Alle Funktionen, welche in die Form $f(x) = k \frac{u'(x)}{u(x)}$ umgeformt werden können, auf das Integral $k \int \frac{u'(x)}{u(x)} dx$ führen, kann man das ausführliche Integrationsverfahren umgehen und die Stammfunktion sofort mit der Formel $F(x) = \ln|u(x)| + C$ ermitteln.

Ü15.1

Integrieren Sie an. Achten Sie auf Betragsstriche:

a) $f(x) = \frac{3}{x-1}$

$F(x) =$

b) $f(x) = \frac{1}{\sin(x)}$

$F(x) =$

c) $f(x) = \frac{x}{9x^2+1}$

$F(x) =$

d) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

$F(x) =$

f) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

$F(x) =$

Ende Übungen:

**Umschlag
Rückseite
(Innen)**

(unbedruckt)

Hier können Sie noch Vorlagen einfügen

