

Stochastik

selbstorganisiert erlernen



Ursula Pirkel

Umschlag Vorderseite (Innen) (unbedruckt)

Hier können Sie noch Vorlagen einfügen

Oberstudienrätin Ursula Pirkel
Stochastik
selbstorganisiert lernen



Kapitel

Grundbegriffe

Einführung in die Stochastik

Kapitel 1

Grundbegriffe 7

Kapitel 2

Baumdiagramme und mehrstufige Zufallsversuche 13

Kapitel 3

Vierfeldertafel 23

Kapitel 4

Kombinatorische Abzählverfahren 35

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Kapitel 5

Einführung in den Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit 47

Kapitel 6

Definition der Wahrscheinlichkeitsverteilung 61

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Kapitel 7

Erwartungswert 63

Kapitel 8

Varianz und Kovarianz 69

Kapitel 9

Normalverteilung 75

Hypothesentests

Kapitel 10

Zweiseitiger Signifikanztest 97

Kapitel 11

Einseitiger Signifikanztest – Fehler beim Testen 109

Kapitel 12

Vertrauensintervall 135

..... 139

Kapitel 14

Anwendung der Normalverteilung 149

Gesamt: Selbstorganisiert erlernen (Bestellnummer 02-032-278)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Oberstudienrätin Ursula F. H.

Stochastik

selbstorganisiert erlernen

Mathematik

Bestellnummer 02-032-278



Vorwort 5

Einführung in die Stochastik

Kapitel 1
Grundbegriffe 7

Kapitel 2
Baumdiagramme und mehrstufige Zufallsexperimente 13

Kapitel 3
Vierfeldertafel 23

Kapitel 4
Kombinatorik und Absoluter Wert 35

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Kapitel 5
Definition und Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit 47

Kapitel 6
Definition der Wahrscheinlichkeitsverteilung 61

Wahrscheinlichkeitsverteilung

Kapitel 7
Erwartungswert 63

Kapitel 8
Varianz und Standardabweichung 69

Kapitel 9
Binomialverteilung 75

Kapitel 10
Zentraler Grenzwertsatz und Zentraler Signifikanztest 97

Kapitel 11
Einseitiger Signifikanztest – Fehler beim Testen 109

Kapitel 12
Vertrauensintervall 135

Kapitel 13
Approximationen zur Normalverteilung 139

Kapitel 14
Anwendung der Normalverteilung 149

Alle Rechte vorbehalten. All rights reserved.
Nachdruck, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
die sich aus §§ 53 ff. UrhG nicht gestattet.

Lehrerselbstverlag
Solingen, Germany 2014
www.f-druck.de

Vorwort

Wie schon in den bereits erschienenen Arbeitsbüchern zum Thema Integralrechnung und Lineare Algebra beruht die Erarbeitung der Zusammenhänge auch im Themenbereich Stochastik auf selbstorganisierten Lernformen. Die Lernenden werden anhand von geeigneten Aufgaben- und Fragestellungen an den Stoff herangeführt, indem Erläuterungen sowie Erklärungen frei formuliert oder entsprechende Lückentexte ausgefüllt und Berechnungen selbst durchgeführt bzw. ergänzt werden. Durch das Lesen und Erfassen der Texte in allen Details, das Formulieren von Erläuterungen und das schrittweise Beschreiben von Lösungswegen werden daher nicht nur fachsystematischen auch Kompetenzen im Umgang mit der Fachterminologie erworben. Für einen mittleren bis hohen sprachlichen Anteil der Arbeitsbuchaufgaben ist der Erwerb dieser Kompetenzen vorgesehen.

Zielgruppe

Die selbstorganisierte Arbeit wird hier anhand der Erarbeitung mathematischer Zusammenhänge, zu dem die Lernenden sich schrittweise auch komplexere Zusammenhänge zu vertiefen, was in einer Gesellschaft, in der lebenslanges Lernen einen immer wichtigeren Stellenwert einnimmt, eine wachsende Bedeutung erhält. Der Erwerb dieser Kompetenzen stellt ferner eine grundlegende Notwendigkeit für die erfolgreiche Bewältigung des späteren Studiums dar. Somit ist dieses Arbeitsbuch sowohl für Schülerinnen und Schüler einer gymnasialen Oberstufe geeignet, sondern auch für Studienanfänger mit Fachhochschulreife, die diesen Themenbereich im Rahmen des Mathematikunterrichts der Schule nicht behandelt haben, jedoch einen Studiengang wählen, in dem Kenntnisse im Bereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung vorausgesetzt werden. Die Aufgaben des Lernfortschritts selbst üben können ab September 2014 in der 11. Klasse der gymnasialen Oberstufe durchgeführt werden.

Handhabung des Arbeitsbuchs

Die Inhalte des Arbeitsbuchs stellen die grundlegenden Zusammenhänge zu einzelnen Themengebieten der Stochastik zur Verfügung und sind damit als Basis für die Bewältigung der Aufgabenstellungen der Abiturprüfung zu sehen. Im Folgenden werden komplexere Aufgabenstellungen und die zugehörigen Lösungswege methodische Konzepte, die für die Bearbeitung der Aufgaben und Schüler mit Zusatzaufgaben zur Stochastik mit dem Themenbereich Stochastik gut zurecht kommen, zumal hinsichtlich der Handhabung von Rechenkalkülen fehlende Kenntnisse hier nur eine untergeordnete Rolle spielen.

Dieses Buch ist für Lernende mit und ohne Vorkenntnisse in der Wahrscheinlichkeitsrechnung geeignet. Es enthält grundlegende Begriffe und Arbeitsmethoden, die bei

in den Bildungsstandards der Sekundarstufe I verankert sind, im ersten Kapitel wiederholt und vertieft werden. Verweise auf die Grundlagen, Erklärungen und erweiternde Betrachtungen zu einzelnen Themenbereichen können an den entsprechenden Stellen am Ende eines Kapitels vertieft werden. Anregungen und Verbesserungswünsche werden gerne entgegengenommen und können an der oben angegebenen Adresse service@lehrerselbstverlag.de zugesandt werden.

Die einzelnen Kapitel des Arbeitsbuchs aufeinander aufbauen und Querverweise auf Inhalte aus vorangegangenen Kapiteln enthalten sind, es ist notwendig, dass die einzelnen Themen in der angegebenen Reihenfolge bearbeitet werden, wobei ergänzende oder erweiternde Betrachtungen stets optional sind.

Kapitel 1 bis 3

Im Kapitel 1 werden zunächst Begriffe und Definitionen zur Verfügung gestellt und elementare Arbeitsweisen, wie beispielsweise der Umgang mit Baumdiagrammen, wiederholt und vertieft. Zusätzlich, insbesondere jedoch im Hinblick auf den allgemeinen Additionssatz und die spätere Verwendung bei der Behandlung von bedingten Wahrscheinlichkeiten, erfolgt hier anhand von Vierfeldertafeln eine ausführliche Betrachtung abhängiger und unabhängiger Zufallsversuche.

Kapitel 4

Die Betrachtungen zu kombinatorischen Abzählverfahren sind nur auf elementare Problemstellungen beschränkt. Vertiefende und komplexe Aufgabenstellungen können ergänzend eingefügt werden. Eine Herleitung für die formelmäßige Betrachtung des ungeordneten Ziehens ohne Zurücklegen, was in den Unterlagen auch als „Lottoproblem“ bezeichnet wird, erfolgt über ein anschauliches Beispiel unter Einbeziehung des Pascalschen Dreiecks. Der Vertiefung der Komplexifizierung des Pascalschen Dreiecks an dieser Stelle der Unterlagen kommt eine vorbereitende Aufgabe zur Binomialverteilung in Kapitel 9 zu.

Die Komplexifizierung der Aufgabenstellungen zu bedingten Wahrscheinlichkeiten stellt eine Herausforderung für die Lernenden. Im ersten Teil der Unterlagen wird ein Schwerpunkt auf die Bearbeitung der Aufgabentexte gelegt, indem die Textaufgaben auf Standardformulierungen zurückgeführt werden. Die Lösung der Aufgaben erfolgt dann über das Vorgehen der beiden möglichen Baumdiagramme und die zugehörigen Vierfeldertafeln, die bereits aus Kapitel 1 bekannt sind. Vertiefend werden dann der Satz von Bayes und Vierfeldertafeln ergänzt.

Kapitel 6 bis 8

In den Kapiteln 6 bis 8 werden die Wahrscheinlichkeitsverteilungen werden, die in der Wahrscheinlichkeitsrechnung Zusammenhänge zwischen den Zufallsvariablen gezogen, wobei für die Berechnung des Erwartungs-

wertes und der Standardabweichung eine tabellarische Form verwendet wird, mit der für diesen Aufgabentyp eine Systematisierung des Lösungswegs erreicht wird.

Kapitel 9

Nachdem der Begriff der Wahrscheinlichkeitsverteilung verankert ist, nimmt die Binomialverteilung nun eine zentrale Rolle ein. Anhand des schon bekannten Pascalschen Dreiecks wird die Formel von Bernoulli beispielorientiert hergeleitet, wobei der Bezug zur Bezeichnung Binomialverteilung für die Lernenden anschaulich ersichtlich wird. Der Schwerpunkt dieses Kapitels liegt dann in der Handhabung entsprechender Tabellen. Auch kann hier die Verwendung von Taschenrechnern einfließen.

Da Erwartungswerte und Sigma-Umgebungen bei einer Binomialverteilung beim Testen von Hypothesen eine hervorgehobene Rolle spielen, wird dieser Abschnitt ausführlich behandelt. Anhand von exemplarisch ausgewählten Verteilungen wird zugleich das Aussehen eines Säulendiagramms einer Binomialverteilung in Abhängigkeit von n und p verdeutlicht. Außerdem wird für mehrere Verteilungen die Bedeutung der Sigma-Umgebungen erarbeitet.

Kapitel 10

Der Einsatz in den meisten von uns Hypothesen erfordert in
 einem Unterricht aber eine zweiseitige, stets direkt im
 Anschluss an die Bearbeitung der Signale Umgebung über
 das Schülerversuch. Im Rahmen der gegebenen Aufga
 benstellung nimmt jeder Lerner je aus dem gleichen
 Behälter eine Schprobe von Körnern. Ich verwende hier
 eine Mischung aus Linsen und Sonnenblumenkernen.
 Langjährige Beobachtungen des Versuchs zeigen, dass bei
 dieser Mischung bei jeder Lerngruppe Stichproben ent
 stehen, die im Bereich des Erwartungswertes liegen, aber
 auch jedes Mal Stichproben auftreten, die außerhalb der
 3 σ -Bereichs liegen. (Fall
 wird, können die
 lenbeispiel
 Perso

Die Bewertung des Tests erfolgt zunächst über die Annahme der Sigma-Umgebungen und endet schließlich in der Behandlung zweiseitiger Tests mit Fehlerbetrachtung. Schwerpunkt bei der Behandlung von Annahme- und Ablehnungsbereichen sind die Dichtekurven von Binomial- und Normalverteilung. Es ist zu betonen, dass die Gütefunktion gewählt werden, dass der kleinste Wert im Ablehnungsbereich angegeben

Kapitel 11

Aufbauend auf die zweiteilige Tests werden nun, anhand eines Beispiels aus der Medizin, die einzelnen Tests behandelt. Um die Komplexität der Aufgabestellung zu reduzieren und für die Studierenden ein zunehmend einheitliche Lösungssystematisierung anzustellen, wird auf einen tabellarisch dargestellten Lösungsweg hingearbeitet. Hierbei steht jeder Schritt der Realisierung von Annahme- und Ablehnungsbereichen mithilfe von Hüllkurven der Binomialverteilung im Mittelpunkt. Erfahrungen haben gezeigt, dass Lernende, welche die hier vorgeschlagene vorgegebene Vorgehensweise anwenden und Bereiche für den Alpha- und Betafehler markieren, die Bestimmung der Grenzen der Ablehnungsbereiche sich leicht bewerkstelligen.

Ferner stellt die strukturelle Ausformulierung der Nullhypothese und der Alternativhypothese im Kopf der Tabelle eine wesentliche Hilfe bei der Formulierung der beiden Fehler und deren Konsequenzen dar. Anhand der vorgegebenen Formulierungshinweise „Obwohl ...“, wird irrtümlich angenommen, dass „Wenn man Bezug auf die im Kopf der Tabelle angegebenen Hypothesen nehmen und so eine für beliebige Testsituationen systematisch erfassbare Fehleranalyse vornehmen. In der Praxis hat es sich gezeigt, dass die Lernenden, nachdem sie mithilfe der systematischen Vorgehensweise anhand der Tabelle die Zusammenhänge beim Testen erfasst haben, die Aufgabenstellung auch ohne Tabelle richtig bearbeiten.“

Betrachtungen der Abhängigkeit der Fehler vom Stichprobenumfang und den Wahrscheinlichkeiten der beiden Hypothesen sowie die Behandlung von Operationscharakteristiken können als erweiternde Aufgabenstellung interpretiert werden.

Kapitel 12

Für Testsituationen, die mit den zur Verfügung gestellten Tabellen zur Binomialverteilung nicht bearbeitet werden können, kommt für näherungsweise zu bestimmende Lösungen die Normalverteilung zum Tragen. Dazu werden die Normalisierungsverfahren selbst und anschließend von weiteren grundlegenden Testsituationen mit der Tabelle zur Normalverteilung erarbeitet. Außerdem, wie die Bestimmung des Stichprobenumfangs bei gegebenen Fehlern oder die Betrachtung von Intervallen haben hier eine vertiefende bzw. ergänzende Funktion.

Dank

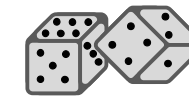
Für Anregungen zur inhaltlichen und formalen Gestaltung danke ich meinem Mentor Gerald Pirkel, meiner langjährigen Freundin und Oberstudienrätin Renate Benz-Heinbücher und dem Dr. Torsten-Karl Stempel von der Hochschule

Kapitel 1: Grundbegriffe

Aufgabe 1.1

Lesen Sie den folgenden Text und formulieren bzw. veranschaulichen Sie – so weit es Ihnen möglich ist – was man unter den aufgeführten Fachbegriffen versteht.

Wie in jedem anderen Gebiet der Mathematik, hat man sich auch in der Stochastik bzw. Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Verwendung einer kleinen Zahl von Begriffen geeinigt. Im Folgenden werden grundlegende Fachbegriffe am Beispiel des Würfels erläutert.



Wirft man einen Würfel, weiß man zwar, dass die Zahlen 1 bis 6 fallen können, da man jedoch nicht vorhersehen kann, welche dieser Zahlen fällt, spricht man von einem **Zufallsversuch**.

Fällt beim Würfeln zufällig die 6, so nennt man das als **Ergebnis** des Zufallsversuchs, die Menge aller Ergebnisse, hier also die Zahlen 1 bis 6, wird im Allgemeinen als **Ergebnismenge** S bezeichnet.

Ist es beim Würfeln noch ein Spiel, ist es wichtiger, dass die geworfene Zahl eine gerade Zahl ist, dann spricht man nicht vom Ergebnis des Ziehversuchs, sondern man sagt, dass das **Ereignis** „gerade Zahl“ eingetreten ist, wenn eine der Zahlen der Menge $A = \{2, 4, 6\}$ fällt. Das **Ereignis** ist nicht eingetreten, wenn eine ungeraden Zahl aus der Menge $B = \{1, 3, 5\}$ gefallen ist. Alle Teilmengen der Ergebnismenge S , wie die Mengen A und B sowie beispielsweise auch die Menge der durch 3 teilbaren Zahlen $C = \{3, 6\}$ werden als **Ereignisse** bezeichnet.

Wenn sich die Ereignisse, wie die geraden Zahlen der Menge A und die ungeraden Zahlen der Menge B, gegenseitig ausschließen, jedoch gemeinsam die gesamte Ergebnismenge S bilden, so bezeichnet man A und B bzw. B und A als Ereignis und **Gegenereignis**. Man verwendet in diesem Fall auch teilweise Ereignis $\bar{A}$ und Gegenereignis $\bar{A}$ bzw. Ereignis B und Gegenereignis $\bar{B}$.

Zufalls-
experiment:

Ergo

Ergebnismenge S:

Ereignis E:

his $\bar{E}$:

Gegenereignis zu A (Augenzahl ≥ 4) {

Aufgabe 1.2

Der Begriff Wahrscheinlichkeit

Bearbeiten Sie die Aufgaben mithilfe der folgenden Definition und Angaben zur Schreibweise und zum Berechnen von Wahrscheinlichkeiten.

Definition Laplace-Versuch

Wenn man mit einem idealen Würfel spielt, weiß man, dass die Wahrscheinlichkeit, eine 1 zu würfeln genauso groß ist wie beispielsweise für eine 4 oder jedes andere Ergebnis der Ergebnismenge, d.h. jedes Ergebnis hat die gleiche Wahrscheinlichkeit. Die Wahrscheinlichkeiten kann man hier aus der Geometrie des Würfels erschließen. Man bezeichnet Zufallsversuche, bei denen diese Merkmale e zutreffen als **Laplace-Versuche**.

Schreibweise für Wahrscheinlichkeiten

- Kleines **p** für die Wahrscheinlichkeit für ein **Ergebn**.
- Die Wahrscheinlichkeit für ein **Ereignis** kann wie für das Beispiel „Würfeln einer geraden Zahl“ in der Schreibweise $P(E)$ durch ein großes **P** mit einer ergänzenden Information, um welches Ereignis es sich handelt, dargestellt werden.

Berechnen von Wahrscheinlichkeiten

Berechnen der Wahrscheinlichkeit **p** eines **Ergebnisses** bei einem Laplace-Versuch:

$$p = \frac{\text{Anzahl der günstigen Möglichkeiten}}{\text{Anzahl aller Möglichkeiten}}$$

Berechnen der Wahrscheinlichkeit **P(E)** eines **Ereignisses** bei einem Laplace-Versuch:

$$P(E) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Möglichkeiten für E}}{\text{Anzahl aller Möglichkeiten}}$$

Berechnen von $P(A \cap B)$ eines Ereignisses **A** und **B** bei einem Laplace-Versuch.

Neben dem bisher betrachteten Würfeln gibt es eine Reihe anderer Zufallsversuche, die einem Laplace-Versuch zugeordnet werden können. Geben Sie jeweils an, ob es sich um einen Laplace-Versuch handelt, und ermitteln Sie, wenn möglich, die gesuchten Wahrscheinlichkeiten für das Ergebnis **p** des Zufallsversuchs und die Wahrscheinlichkeit **P(E)** für das jeweils angegebene Ereignis **E**.

	Laplace-Versuch	Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis p	Wahrscheinlichkeit für das Ereignis P(E)
Idem, aber mit zwei Würfeln	ja ☐ nein ☐	p =	



Zufallsversuch	Laplace-Versuch	Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis p	Wahrscheinlichkeit für das Ereignis P(E)
Roulette einmal drehen (37 Felder)	ja ☐ nein ☐	p =	P(rot) =
Eine Karte aus einem Skatspiel ziehen (32 Karten)	ja ☐ nein ☐		P(Bube) =
Glücksrad mit gleichen Sektoren einmal drehen	ja ☐ nein ☐	p =	P(teilbar durch 3) =
Glücksrad mit ungleichen Sektoren einmal drehen	ja ☐ nein ☐	p =	P(Zahl > 4) =
Ziehen einer Kugel aus einer Urne mit 10 Kugeln, 5 schwarz und 5 weiß	ja ☐ nein ☐	p =	P(schwarz) =
Ziehen einer Kugel aus einer Urne mit 10 Kugeln, 5 schwarz und 5 weiß	ja ☐ nein ☐	p =	P(schwarz) =

Weitere Laplace-Versuche:

Aufgabe 1.3

Wertebereich bei Wahrscheinlichkeiten

Ermitteln Sie den Wertebereich der Wahrscheinlichkeiten, geben Sie die Wahrscheinlichkeiten an und begründen Sie die Merksätze:

- a) P(eine der Zahlen 1 bis 3 fällt) = —
- b) P(eine der Zahlen 1 bis 4 fällt) = —
- c) P(eine der Zahlen 1 bis 5 fällt) = —
- d) P(eine der Zahlen 1 bis 6 fällt) = —
- e) P(eine der Zahlen 1 bis 7 fällt) = —
- f) P(eine der Zahlen 1 bis 8 fällt) = —
- g) P(keine 7 fällt) = — (sicheres Ereignis)

Welche Aussagen über die Wahrscheinlichkeiten beim Würfeln kann man schließen:

Welcher größte Wert, den die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis **E** annehmen kann, wenn **E** ein mögliches Ergebnis ist? $P(E) =$ —

Welcher kleinste Wert, den die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis **E** annehmen kann, wenn **E** ein mögliches Ergebnis ist? $P(E) =$ —

Für den Wert der Wahrscheinlichkeit $P(E)$ eines Ereignisses gilt:
 $0 \leq P(E) \leq 1$

Beim Würfeln sind die Ereignisse E : „die geworfene Zahl ist durch 3 teilbar“ und $\bar{E}$: „die geworfene Zahl ist nicht durch 3 teilbar“ Ereignis und Gegenereignis.

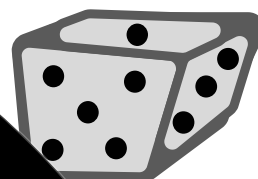
Begründen Sie mit diesem Beispiel, dass gilt: $P(E) + P(\bar{E}) = 1$

Bei einem Element ist die Summe aus dem Ereignis E und dem Gegenereignis $\bar{E}$ immer 1.
 $P(E) + P(\bar{E}) = 1$
Wichtig für viele Anwendungen ist dieser Zusammenhang in der Form:
 $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$

Aufgabe 1.4

Die empirische Wahrscheinlichkeit – Gesetz der großen Zahlen

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine bestimmte Augenzahl bei einem Würfeln ausfallen kann, ist $p = \frac{1}{6}$. Sie fällt.



Da hier keine Fläche angegeben ist, kann die Wahrscheinlichkeit, mit der eine bestimmte Augenzahl ausfallen kann, nicht bestimmt werden. Die Fläche, die für die Möglichkeit einer bestimmten Augenzahl angegeben ist, ist die Fläche, die für die Möglichkeit einer bestimmten Augenzahl angegeben ist.

Ein idealer Würfel wurde in 17 voneinander unabhängigen Zufallsversuchen oft, geworfen. Das entstandene Zahlenfeld ist in den Tabellen dargestellt und in Excel als Diagramm ausgewertet.

a) Erläutern Sie anhand der Tabellen, was man bei einem Zufallsversuch mit der absoluten Häufigkeit $H(i)$ und der relativen Häufigkeit $h(i)$ versteht, und geben Sie die Formel an, mit der die relativen Häufigkeiten $h(i)$ berechnet werden. Bezeichnungen: Nummer des Zufallsversuchs, Anzahl der Würfe: n

Tabelle absolute Häufigkeiten $H(i)$

Nr	n	H(1)	H(2)	H(3)	H(4)	H(5)	H(6)
1	10	2	0	2	0	5	1
2	20	0	4	3	1	7	3
3	30	4	6	4	2	10	4
4	40	7	7	6	4	10	6
5	50	8	9	6	4	14	6
6	60	10	12	8	5	14	11
7	70	10	14	10	6	13	13
8	80	12	17	10	8	14	14
9	90	13	17	12	11	24	13
10	100	14	18	14	11	24	13
11	200	26	33	20	17	47	33
12	300	37	47	31	26	68	47
13	400	46	57	47	31	96	62
14	500	57	67	57	40	103	75
15	600	67	95	67	53	85	85
16	700	75	105	67	67	144	111
17	900	96	122	82	82	160	141

Tabelle relative Häufigkeiten $h(i)$

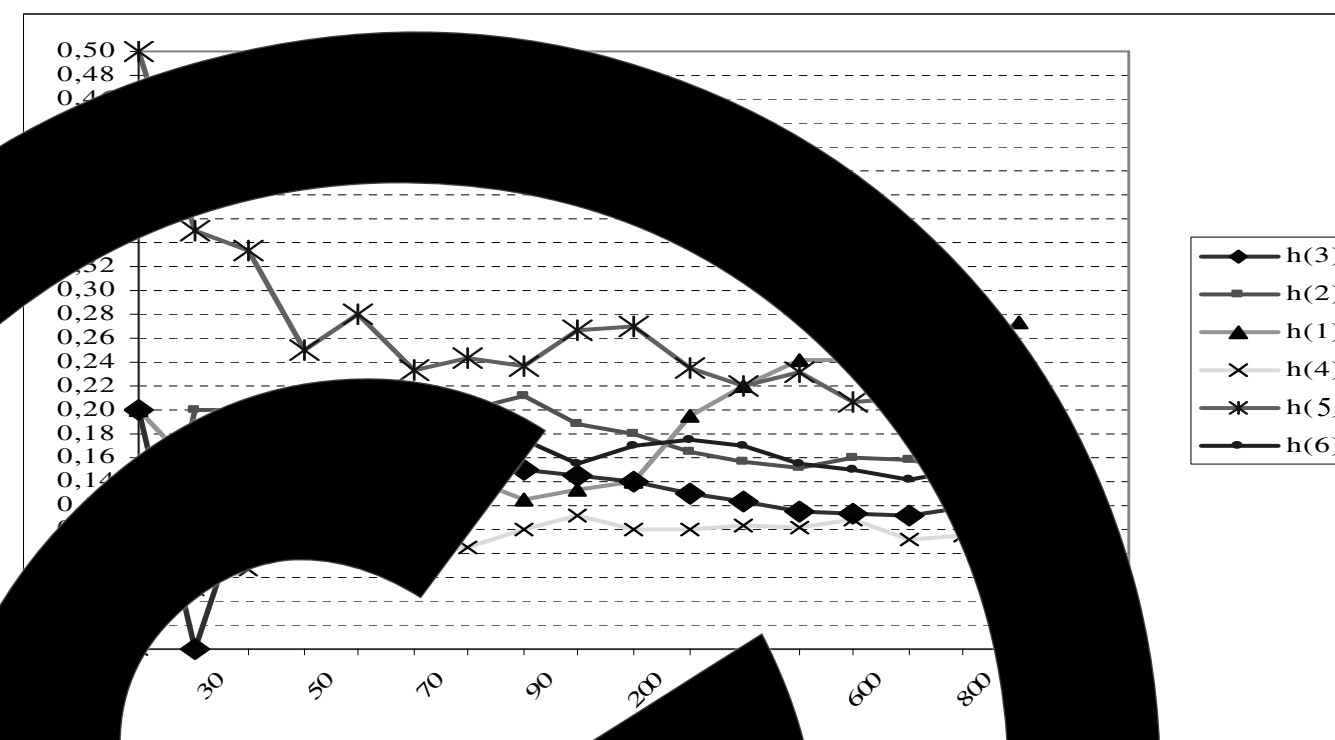
Nr	n	h(1)	h(2)	h(3)	h(4)	h(5)	h(6)
1	10	0,20	0,00	0,20	0,00	0,50	0,10
2	20	0,00	0,20	0,15	0,05	0,35	0,15
3	30	0,13	0,20	0,13	0,07	0,33	0,13
4	40	0,18	0,18	0,15	0,10	0,25	0,15
5	50	0,16	0,18	0,12	0,08	0,28	0,18
6	60	0,17	0,20	0,13	0,08	0,23	0,18
7	70	0,14	0,20	0,14	0,10	0,24	0,19
8	80	0,15	0,21	0,13	0,10	0,24	0,18
9	90	0,14	0,19	0,13	0,11	0,27	0,16
10	100	0,14	0,18	0,14	0,10	0,27	0,17
11	200	0,13	0,17	0,10	0,10	0,24	0,18
12	300	0,12	0,16	0,10	0,10	0,22	0,17
13	400	0,12	0,15	0,12	0,10	0,23	0,16
14	500	0,11	0,16	0,12	0,11	0,21	0,15
15	600	0,11	0,16	0,11	0,09	0,21	0,14
16	700	0,11	0,15	0,10	0,10	0,21	0,15
17	900	0,11	0,14	0,09	0,10	0,20	0,14

absolute Häufigkeit: $H(i)$

relative Häufigkeit: $h(i)$

Formel: $h(i) = \frac{H(i)}{n}$

b) Erläutern Sie die Bedeutung des Diagramms.



- c) Beurteilen Sie, ob die 800 Würfe ausreichen, um eine Aussage zur Wahrscheinlichkeit mit machen zu können, mit der die Flächen 1 bis 6 bei dem vorliegenden nicht idealen Würfel angestreut werden. Erläutern Sie dabei auch, wie man an einem Diagramm für die relativen Häufigkeiten ablesen könnte, ob man von der Wahrscheinlichkeit, für das Auftreten des Ereignisses, berechnen kann.

Das Gesetz der großen Zahlen

Wenn Sie für Aufgabe 1b) die richtige Formel ermittelt haben, ist Ihnen sicherlich aufgefallen, dass die Berechnung der relativen Häufigkeit $h(E)$ für ein Ereignis E der Definition der Wahrscheinlichkeit sehr ähnlich ist. Für eine große Anzahl von Durchführungen des Zufallsversuchs nehmen die Abweichungen der Werte für die relative Häufigkeit ab. Wenn sich der Wert stabilisiert, kann man den für die absolute Häufigkeit $h(E)$ ermittelten Wert als Wahrscheinlichkeit $P(E)$ annehmen. Man spricht dann von einer empirischen Wahrscheinlichkeit. Folgendes gilt:

$$h(E) = \frac{\text{absolute Häufigkeit des Ereignisses } E}{\text{Anzahl aller Zufallsversuche } n}$$

$$h(E) = \frac{H(E)}{n} \quad \text{für } n \rightarrow \infty \text{ gilt: } P(E) \cong h(E)$$

Ergänzen Sie:

Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Stochastik

selbstorganisiert lernen



Kapitel 1

Baumdiagramme und
Ereignisse bei Zufallsversuchen



Einführung in die Stochastik

Kapitel 1

Grundbegriffe	7
---------------------	---

Kapitel 2

Baumdiagramme und mehrstufige Zufallsversuche	13
---	----

Kapitel 3

Vierfeldertafel	23
-----------------------	----

Kapitel 4

Kombinatorische Abzählverfahren	35
---------------------------------------	----

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Kapitel 5

Einführung in den Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit	47
--	----

Kapitel 6

Definition der Wahrscheinlichkeitsverteilung	61
--	----

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Kapitel 7

Erwartungswert	63
----------------------	----

Kapitel 8

Varianz und Kovarianz	69
-----------------------------	----

Kapitel 9

Normalverteilung	75
------------------------	----

Hypothesentests

Kapitel 10

Zweiseitiger Signifikanztest	97
------------------------------------	----

Kapitel 11

Einseitiger Signifikanztest – Fisher beim Testen	109
--	-----

Kapitel 12

Vertrauensintervall	135
---------------------------	-----

Die Betrachtungen zur Normalverteilung

Kapitel 14

Anwendung der Normalverteilung	149
--------------------------------------	-----

Gesamt: Selbstorganisiert erlernen (Bestenfalls 278)

Seite

Alle Rechte vorbehalten. All rights reserved.

Druck, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet

SelbstVerlag

tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germany)

Lehrerselbstverlag.de

www.f-druck.de

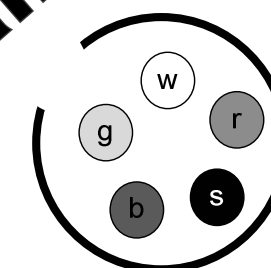
Kapitel 2: Baumdiagramme und mehrstufige Zufallsversuche

Bei den bisherigen Betrachtungen wurden Zufallsversuche untersucht, bei denen beispielsweise nur die Wahrscheinlichkeit ermittelt hat, wenn ein Würfel einmal gewürfelt oder die einzige Kugel aus einer Urne gezogen wurde. Man bezeichnet diese Zufallsversuche als **einstufige Versuche**.

Zufallsversuche können jedoch auch mehrmals durchgeführt werden, aus mehreren Stufen bestehen. Man bezeichnet diese Zufallsversuche als **mehrstufige Versuche**. Für die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten ist dann die Verwendung von Baumdiagrammen hilfreich. Ausgehend von den Kenntnissen zu Baumdiagrammen, die Sie bereits in der Sekundarstufe I erworben haben, werden hier die grundlegenden Regeln wiederholt und

Dazu wird zunächst ein einfacher Zufallsversuch zugrunde gelegt, bei dem aus einer Urne zwei Kugeln gezogen werden. Es wird dabei untersucht, ob eine gezogene Kugel vor dem nächsten Ziehen zurückgelegt wird oder nicht. Man spricht dann zwischen mehrmaligen Ziehungen ohne Zurücklegen

In der rechts abgebildeten Urne befinden sich jeweils eine weiße, eine schwarze, eine rote und eine grüne Kugel. Es sollen zwei Kugeln gezogen werden.



Aufgabe 1

Aus der Urne wird beim ersten Zug die blaue Kugel gezogen. Geben Sie den Inhalt der Urne beim zweiten Ziehen an, wenn

- zurückgelegt gezogen wird: _____
- ohne Zurücklegen gezogen wird: _____
- Vervollständigen Sie: _____

Beim Ziehen ohne Zurücklegen ändert sich der Inhalt der Urne nicht. Daher ergeben sich bei beiden Ziehungen die gleiche Wahrscheinlichkeit, eine Kugel in einer jeweiligen

Farbe zu ziehen. Beim Ziehen ohne Zurücklegen verändert sich der Inhalt der Urne. Daher ergeben sich bei der ersten und bei der zweiten Ziehung _____ die Wahrscheinlichkeit, eine Kugel in der jeweiligen Farbe zu ziehen.

Aufgabe

Aus der Urne werden zwei Kugeln gezogen. Zeichnen Sie vollständige Baumdiagramme mit allen Ergebnissen beim Ziehen von zwei Kugeln mit und ohne Zurücklegen aus der oben abgebildeten Urne an. Die Wahrscheinlichkeit für eine Kombination xy aus zwei gezogenen Kugeln wird angegeben, wobei x immer die zuerst gezogene Kugel und y immer die zweite gezogene Kugel bezeichnet. D.h., wenn zuerst eine weiße und dann schwarz gezogen wird gilt: $P(\text{weiß, schwarz})$. Ergänzen Sie sich das Baumdiagramm und die Wahrscheinlichkeiten hinsichtlich der Ziehungen mit und ohne Zurücklegen.

Abb. 2.1 Baumdiagramm für Ziehen mit Zurücklegen

Abb. 2.2 Baumdiagramm für Ziehen ohne Zurücklegen

Erste Stufe des Baumdiagramms für das Ziehen der ersten Kugel

Zweite Stufe des Baumdiagramms für das Ziehen der zweiten Kugel



Wenn man die Reihenfolge, in der die Kugeln gezogen werden, beachtet, gibt es **gleichwahrscheinliche** Ereignisse.

Wenn man die Reihenfolge, in der die Kugeln gezogen werden, beachtet, gibt es **gleichwahrscheinliche** Ereignisse.

Wendet man die Additionssatzung von Wahrscheinlichkeiten an, ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit, eine bestimmte Kugelkombination xy zu ziehen, folgende Werte:

Ziehen mit Zurücklegen: $P(xy) = \frac{1}{5} = 0, \underline{\quad}$

Ziehen ohne Zurücklegen: $P(xy) = \frac{1}{20} = 0, \underline{\quad}$

Aufgabe 2.3

Einfache Additionsregel

Mithilfe der ausführlichen Baumdiagramme und der Kenntnis, dass die Kombination xy beim Ziehen mit Zurücklegen die Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{25} = 0, \underline{\quad}$ hat und beim Ziehen ohne Zurücklegen die Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{20} = 0,05$ hat, sollen nun Berechnungen für die Aufgabenstellung mit Baumdiagrammen erarbeitet werden. Übertragen Sie die Vorgehensweise der Beispiele 1 und 2 auf die Aufgabenstellung, und ergänzen Sie dann den Text für die Aufgabenstellung.

Beispiel 1

Bestimmung der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses: „Unter den zwei gezogenen Kugeln befindet sich mindestens eine rote Kugel“, abgeleitet durch Abzählen im Baumdiagramm.

Ziehen mit Zurücklegen

Aus dem Baumdiagramm kann man durch Abzählen entnehmen, dass von 25 Möglichkeiten es 8 gibt, eine rote Kugel zu erhalten.

$$P(\text{mit rot}) = P(wr) + P(sr) + P(rw) + P(rs) + P(rr) + P(rb) + P(rg) + P(br) + P(gr) = \frac{8}{25} = 0,32$$

Ziehen ohne Zurücklegen

Aus dem Baumdiagramm kann man durch Abzählen entnehmen, dass es 8 von 20 Möglichkeiten gibt, eine rote Kugel zu erhalten. Damit ergibt sich:

$$P(\text{mit rot}) = P(wr) + P(sr) + P(rw) + P(rs) + P(rb) + P(rg) + P(br) + P(gr) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} = 0,4$$

Beispiel 2

Bestimmung der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses: „Es werden beim zweimaligen Ziehen zwei gleichfarbige Kugeln gezogen“.

Ziehen mit Zurücklegen

Durch Abzählen ergibt sich:

$$P(\text{gleichfarbig}) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5} = 0,2$$

Ziehen ohne Zurücklegen

Durch Abzählen ergibt sich:

$$P(\text{gleichfarbig}) = 0 \quad (\text{unmögliches Ereignis})$$

Aufgabenstellung

Zeigen Sie analog zu den Beispielen, dass sich für die Wahrscheinlichkeit, unter den zwei gezogenen Kugeln genau eine rote oder eine blaue Kugel zu erhalten, die Werte 0,48 und 0,6 ergeben, wenn man **mit** Zurücklegen zieht. Unter den zwei gezogenen Kugeln befindet sich genau eine rote oder eine blaue Kugel.

Ziehen mit Zurücklegen

$$P(\text{genau eine bunte}) =$$

Ziehen ohne Zurücklegen

$$P(\text{genau eine bunte}) =$$

Ergänzen Sie anhand der Erkenntnisse aus den Beispielen und der Aufgabe der Punkt für die folgende Regel:

Einfache Additionsregel

Besteht ein Ereignis E aus mehreren einzelnen disjunkten Ereignissen e_i mit $E = \{e_1, e_2, e_3, \dots\}$,

dann kann die Wahrscheinlichkeit $P(E)$ als Summe der einzelnen Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse E_i berechnet werden.

$$P(E) = P(e_1) + P(e_2) + P(e_3)$$

*die einzelnen Ereignisse e_i haben nur unterschiedliche Elemente

Aufgabe 2.4

Reduzierte Baumdiagramme können Ziehen zurück

Das Zeichnen eines vollständigen Baums mit allen Ereignissen und Ergebnissen, wie in den Abbildungen 2.1 und 2.2, erfordert oft umfangreiche Baumdiagramme, bei denen das Heraussuchen bzw. Abzählen der interessierenden (aber auch ungünstigen) Ereignisse aufwändig ist. Es sollen daher nun effektivere Methoden für das Arbeiten mit Baumdiagrammen entwickelt werden. Als Beispiel dient das schon aus Aufgabe 2.3 (Beispiel 1) bekannte Ereignis: „Man erhält beim zweimaligen Ziehen mindestens eine rote Kugel.“ (so kurz P (mit rot)).

Bestimmen Sie dazu zunächst noch einmal mit der oben verwendeten Abzählmethode anhand des umfänglichen Baumes in Abb. 2.1 für das Ziehen mit Zurücklegen die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse. Geben Sie das Ergebnis jeweils als Bruch an.

Abkürzung für rotgezogen: r und Abkürzung für das Gegenereignis nicht rot gezogen: $\bar{r}$

– Beide Kugeln sind rot $P(rr)$: $P(rr) = \frac{1}{3}$

- Die erste K...

Wie ist rot $P(\bar{r} \bar{r})$: $P(\bar{r} \bar{r}) = \text{---}$

Die Wahrscheinlichkeiten für die vier Ereignisse sollen nun auf einem Baumdiagramm mit einem reduzierten Baumdiagramm dargestellt werden. Hierfür sind die für die Aufgabenstellung benötigten Ergebnisse rot r und nicht rot $\bar{r}$ erscheinend.

Anstatt jede einzelne Ziehung zu zeichnen, fasst man mehrere zusammen. Somit führt man nicht zu einem Ergebnis, sondern auch zu einer Aussage.

Das Wahrscheinlichkeits-Asten berücksichtigt man dann, indem man an einen Ast die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignis bei der Ziehung, hier die Wahrscheinlichkeiten für $\bar{r}$ oder r schreibt.

Für die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten des hier betrachteten Ereignisses $P(\text{mit} \mid \text{mit})$ ist das folgende Baumdiagramm an. Ergänzen Sie die fehlenden Werte bei den Wahrscheinlichkeiten.

In beiden Stufen
des Zufallsversuchs
wird nun nur noch
zwischen den
Ereignissen rot und
nicht rot
unterschieden.

Die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse $P(rr)$, $P(r\bar{r})$, $P(\bar{r}r)$ und $P(\bar{r}\bar{r})$ erhält man, indem man die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse r bzw. $\bar{r}$ entlang der zugehörigen Stufen, d.h. entlang des Pfades, miteinander multipliziert.

Die Wahrscheinlichkeit, eine rote Kugel zu ziehen ist in beiden Stufen $\frac{1}{5}$ und keine rote Kugel zu ziehen in beiden Stufen $\frac{4}{5}$.

Die Summe der Wahrscheinlichkeiten an den Ästen einer Verzweigung ist immer 1.

Die Summe der Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse aller Pfade hier also
 $P(rr) + P(r\bar{r}) + P(\bar{r}r) + P(\bar{r}\bar{r})$
 ist immer 1.

Berechnung der gesuchten Wahrscheinlichkeit für das Ereignis P(mit rot):

Wed 1 9

$$P(\text{not rot}) = 1 - P(\bar{r}\bar{r}) = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$$

Erläutern Sie, welche Regeln für die Berechnung von P (mit rot markierten) auf dem Weg verwendet wurden:

Aufgabe 2.5

Reduzierte Baumdiagramme beim Ziehen ohne Zurücklegen

Beim Ziehen ohne Zurücklegen ergibt sich für das Ereignis E: „Man erhält beim zweimaligen Ziehen mindestens eine rote Kugel“, das folgende reduzierte Baumdiagramm.

Da nach dem ersten Ziehen keine rote Kugel mehr vorhanden ist, fehlt der Ast rot in der zweiten Stufe des Baums und es gilt: $P(rr) = 0$. Nicht rot zu ziehen ist damit das sichere Ereignis.

$\frac{1}{5}$

$\frac{4}{5}$

$\frac{3}{4}$

$\frac{2}{3}$

$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{1}$

$\frac{1}{1}$

$\frac{1}{1}$

$\frac{1}{1}$

$\frac{1}{1}$

$\frac{1}{1}$

$\frac{1}{1}$

$\frac{1}{1}$

$\frac{1}{1}$

$\frac{1}{1}$

$\frac{1}{1}$

$\frac{1}{1}$

- a) Begründen Sie, wie sich die Wahrscheinlichkeiten an den Ästen der zweiten Stufe des Baumdiagramms von den Wahrscheinlichkeiten der ersten Stufe unterscheiden.

- b) Zeigen Sie, dass die Summe der Wahrscheinlichkeiten in jeder Verzweigung den Wert 1 annimmt.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E durch die Addition der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Pfade. Zeigen Sie, dass sich für die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Pfade die Werte $\frac{1}{5}$, $\frac{4}{5}$ und $\frac{4}{20} = \frac{1}{5}$ ergeben, und tragen Sie die Werte in die entsprechenden Stellen in der Abbildung ein.

- d) Erläutern Sie durch eine kurze Begründung, wie man aus den Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse an den Ästen die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E berechnen kann.

Aufgabe 2.6

Pfadmultiplikationsregel

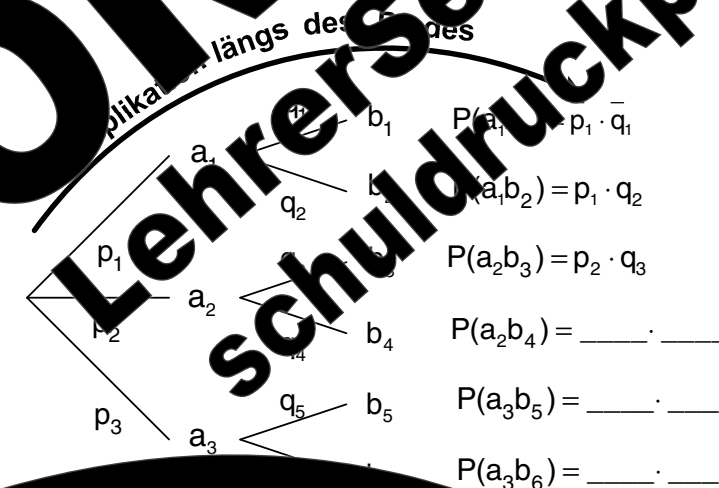
Ergänzen Sie den folgenden Satz anhand der Betrachtungen von Aufgabe 2.5 mit einer gültigen Regel:

Pfadmultiplikationsregel
Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses bei einem zweistufigen Zufallsexperiment berechnet man durch _____ der Einzelwahrscheinlichkeiten längs des Pfades, der zu dem gesuchten Ereignis führt.

Aufgabe 2.7

Zusammenfassung Aufgaben mit Baumdiagrammen

Ergänzen Sie anhand des abgebildeten Baumdiagramms die folgenden Texte:



Addition von Ereignissen

$$P(E) = P(a_1, b_1) + \dots$$

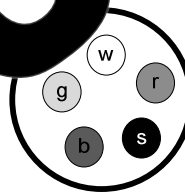
Die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse $P(a_i, b_j)$ werden durch die Multiplikation der Einzelwahrscheinlichkeiten entlang eines Pfades berechnet.

- Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $P(E)$, das sich aus Ereignissen $P(a_i, b_j)$ bilden lässt, wird durch die Addition der zu E passenden Wahrscheinlichkeiten berechnet.
- Die Summe aller Wahrscheinlichkeiten an den Ästen einer Verzweigung ist immer 1.

Die Summe aller Ereignisse $P(a_i, b_j)$ ist immer 1.

Aufgabe 2.7

Bestimmen anhand der bereits bekannten Urne (s. rechts) für das Ziehen mit und ohne Zurücklegen die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E, mindestens eine weiße Kugel zu erhalten, indem Sie Ihre Kenntnisse über reduzierte Baumdiagramme, die Pfadmultiplikationsregel und einfache Additionsregel anwenden. Ergänzen Sie die Angaben im Baumdiagramm, und vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit denen in Aufgabe 2.3.



Verwendete Abkürzungen: bunt b und nicht bunt $\bar{b}$

Ziehen mit Zurücklegen:

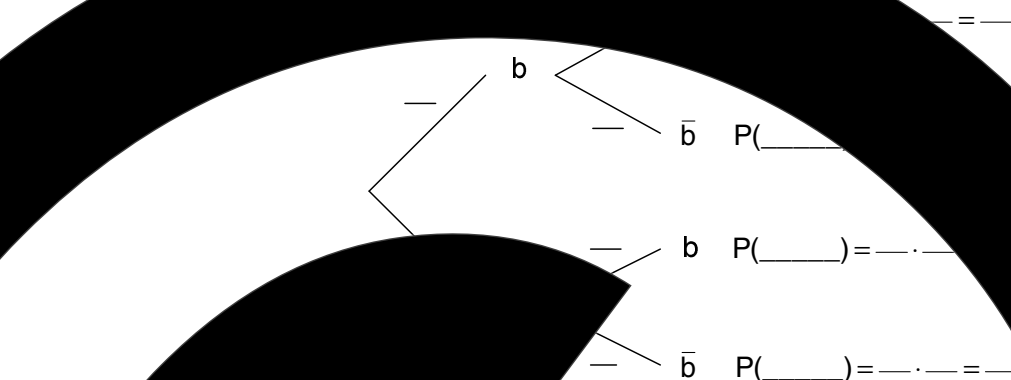


Weg für die Berechnung von $P(E)$:

Weg 1: $P(E) = P(bb) + P(b\bar{b}) + P(\bar{b}b) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$

Weg 2: $P(E) = 1 - P(\bar{E}) = 1 - P(\bar{b}\bar{b}) = 1 - \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{16}{25}$

Ziehen ohne Zurücklegen:



Zweite Berechnung von $P(E)$:

$P(E) = P(b) + P(\bar{b}) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$

$P(\bar{E}) = 1 - P(E) = 1 - 1 = 0$

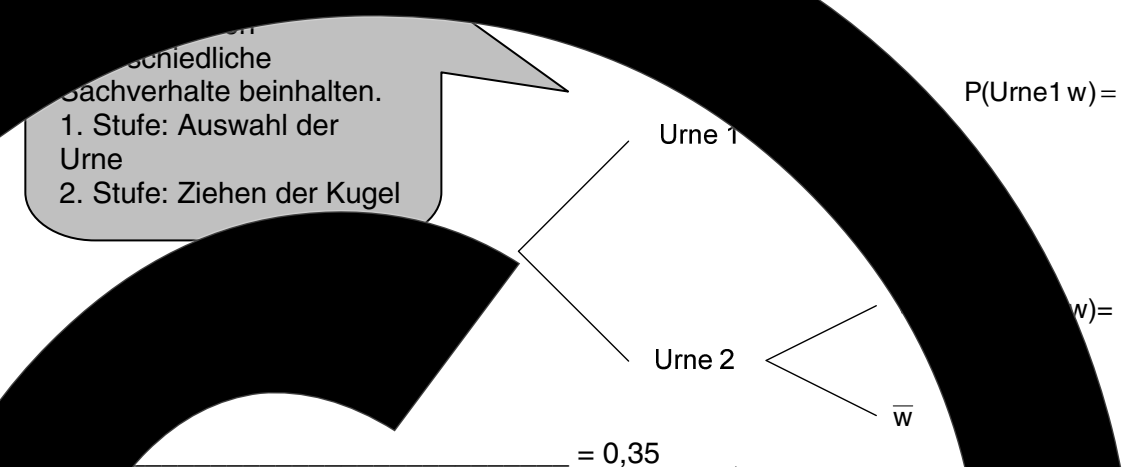
Aufgabe 2.8

Ergänzen Sie die Wahrscheinlichkeiten an den Ästen der Baumdiagramme, und bestätigen Sie durch Rechnung die angegebenen Ergebnisse.

- a) Aus der bereits bekannten Urne soll so lange ohne Zurücklegen gezogen werden, bis die schwarze Kugel gezogen wird. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen des zugehörigen Baumdiagramms und bestätigen Sie die Wahrscheinlichkeiten der angegebenen Ereignisse.



- b) Zusätzlich zur ersten Urne gibt es eine zweite Urne, in der eine weiße und eine schwarze Kugel liegt. Es wird zuerst eine der beiden Urnen ausgewählt und dann aus dieser ausgewählten Urne eine Kugel entnommen. Bestätigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, eine weiße Kugel zu ziehen, 35% beträgt. Ergänzen Sie das zugehörige Baumdiagramm die fehlenden Wahrscheinlichkeiten.



Ende Übungen: _____

Raum für Notizen:



Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Stochastik

selbstorganisiert lernen



Kapitel

Vierfeldertafel



Einführung in die Stochastik

Kapitel 1

Grundbegriffe 7

Kapitel 2

Baumdiagramme und mehrstufige Zufallsversuche 13

Kapitel 3

Vierfeldertafel 23

Kapitel 4

Kombinatorische Abzählverfahren 35

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Kapitel 5

Einführung in den Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit 47

Kapitel 6

Definition der Wahrscheinlichkeitsverteilung 61

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Kapitel 7

Erwartungswert 63

Kapitel 8

Variation und Kovariation 69

Kapitel 9

Normalverteilung 75

Hypothesentests

Kapitel 10

Zweiseitiger Signifikanztest 97

Kapitel 11

Einseitiger Signifikanztest – Fisher beim Testen 109

Kapitel 12

Vertrauensintervall 135

Die Betrachtungen zur Normalverteilung

Kapitel 14

Anwendung der Normalverteilung 149

Gesamtheit selbstorganisiert erlernen (Bestenfalls 278)

Copyright vorbehalten. All rights reserved.

Druck, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,

aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet

SelbstVerlag

Druck & Freunde GmbH, Koblenz (Germany)

Lehrerselbstverlag.de

www.f-druck.de

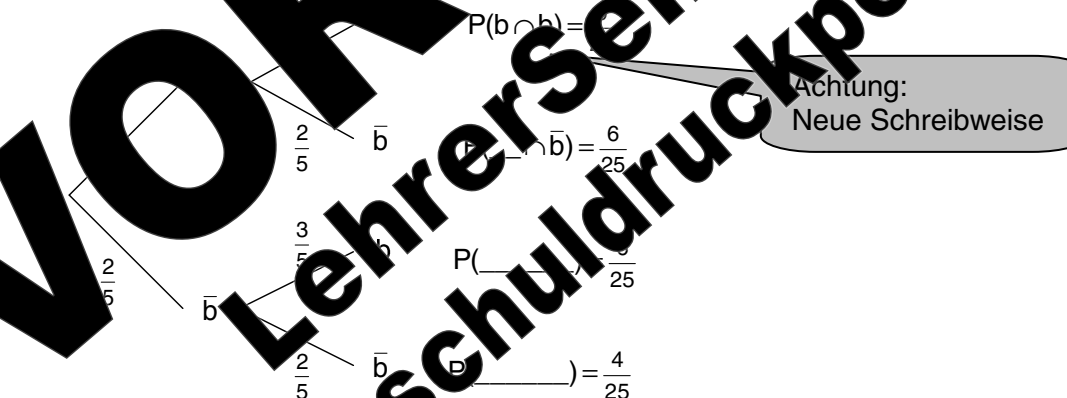
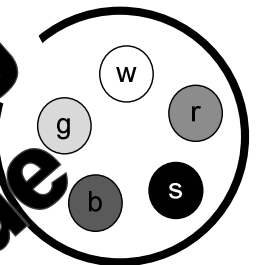
Kapitel 3: Vierfeldertafel

Als Alternative zu Baumdiagrammen kann man bei geeigneten Zufallsversuchen ein Baumdiagramm durch eine sogenannte **Vierfeldertafel** ersetzen. Die Verwendung der Vierfeldertafel ist bei der Behandlung von bedingten Wahrscheinlichkeiten (s. Kapitel 5) sehr hilfreich.

Aufgabe 3.1

a) **Struktur der Vierfeldertafel bei stochastisch unabhängigen Zufallsversuchen, wie beim Ziehen mit Zurücklegen**

Aus der durch Kapitel 2 bekannten Urne werden zwei Kugeln mit Zurücklegen gezogen und das Ereignis „Es sind mindestens zwei bunte Kugeln gezogen“ erneut betrachtet werden. Das zugehörige Baumdiagramm haben Sie bereits in Aufgabe 2.7 erstellt. Die Schreibweise für die Ereignisse soll allerdings auf eine etwas vereinfachte Weise weitergeführt werden. Wenn das Ereignis „Zwei bunte Kugeln gezogen“ eintritt, ist ja rot und blau gezogen worden. Das wird durch die Schreibweise $b \cap b$ gekennzeichnet, wobei das Zeichen „ $\cap$ “ bedeutet „und“. Ergänzen Sie fehlende Angaben in den angegebenen Ereignissen.



Die folgende Abbildung zeigt eine Vierfeldertafel für diese Aufgabenstellung. Verdeutlichen Sie sich, dass die Wahrscheinlichkeiten, welche man an die Äste des Baumdiagramms schreibt, in den hellgrauen äußeren Feldern der Vierfeldertafel erscheinen und die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse in den inneren Feldern eingetragen werden.

		Zweite Ziehung	
Erste Ziehung	b	$\frac{9}{25}$	$\frac{15}{25} = \frac{3}{5}$
	$\bar{b}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{10}{25} = \frac{2}{5}$
		$\frac{15}{25} = \frac{3}{5}$	$\frac{10}{25} = \frac{2}{5}$

Verdeutlichen Sie die folgenden Zusammenhänge bei der Vierfeldertafel:

Die Summe zweier Werte in den inneren Feldern ergibt immer den Wert der entsprechenden Zeile bzw. Spalte in den äußeren Feldern.

Die Summe der Werte in der äußeren Zeile bzw. Spalte ergeben immer den Wert 1.

Die inneren Werte lassen sich durch Multiplikation der beiden Werte der äußeren Felder in der jeweiligen Zeile und Spalte ermitteln. Diese Schreibweise ist allerdings nur dann ein Zufallsversuch, bei dem die Kugeln mit Zurücklegen gezogen werden. Es ist beim Ziehen mit Zurücklegen erfüllt.

Aufgabe 3.2

a) Ergänzen Sie im folgenden Überblick für den Zusammenhang von Baumdiagramm und Vierfeldertafel bei einem **stochastisch unabhängigen** Zufallsversuch die fehlenden Angaben.

$P(A)$

$P(B)$

$P(\bar{A})$

$P(\bar{B})$

$P(A \cap B)$

$P(A \cap \bar{B})$

$P(\bar{A} \cap B)$

$P(\bar{A} \cap \bar{B})$

$P(A)$

$P(\bar{A})$

$P(B)$

$P(\bar{B})$

$P(A \cap B)$

$P(A \cap \bar{B})$

$P(\bar{A} \cap B)$

$P(\bar{A} \cap \bar{B})$

$P(A)$

$P(\bar{A})$

$P(B)$

$P(\bar{B})$

$P(A \cap B)$

$P(A \cap \bar{B})$

$P(\bar{A} \cap B)$

$P(\bar{A} \cap \bar{B})$

$P(A)$

$P(\bar{A})$

$P(B)$

$P(\bar{B})$

b) Strukturieren Sie die Zufallsversuche, wie beim Ziehen ohne Zurücklegen aus einer Urne mit 20 Kugeln, die 6 rot und 14 blau sind. Ergänzen Sie die fehlenden Angaben, und erläutern Sie, woran man im Baumdiagramm erkennt, dass ein Zufallsversuch ohne Zurücklegen erfolgt ist.

$\frac{3}{5}$

$\frac{2}{5}$

$\frac{2}{4}$

$\frac{3}{4}$

$\frac{3}{5}$

$\frac{2}{5}$

$\frac{2}{4}$

$\frac{3}{4}$

$P(\text{rot}) = \frac{6}{20}$

$P(\text{blau}) = \frac{14}{20}$

$P(\text{rot} \cap \text{rot}) = \frac{6}{20} \cdot \frac{5}{19}$

$P(\text{rot} \cap \text{blau}) = \frac{6}{20} \cdot \frac{14}{19}$

$P(\text{blau} \cap \text{rot}) = \frac{14}{20} \cdot \frac{6}{19}$

$P(\text{blau} \cap \text{blau}) = \frac{14}{20} \cdot \frac{13}{19}$

Vierfeldertafel:

Da beim Ziehen ohne Zurücklegen die Wahrscheinlichkeiten der zweiten Stufe eines Versuches von dem Ausgang der Ziehung in der ersten Stufe abhängen, bezeichnet man einen Zufallsversuch mit dieser Eigenschaft als **abhängige** bzw. **stochastisch abhängige** Zufallsversuch. Verdeutlichen Sie sich die Auswirkungen der Abhängigkeit auf die Zusammenhänge bei der Vierfeldertafel:

	b zweite Ziehung	b erste Ziehung	b dritte Ziehung
b erste Ziehung	$\frac{6}{20}$	$\frac{12}{20}$	$\frac{12}{20}$
$\bar{b}$ erste Ziehung	$\frac{6}{20}$	$\frac{8}{20}$	$\frac{12}{20}$
	$\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$	$\frac{8}{20} = \frac{2}{5}$	1

- Die vertikale und horizontale Summe der Wahrscheinlichkeiten in den inneren Feldern ergibt immer den Wert, entspricht den Zeilen bzw. Spalte in den äußeren Feldern.
- Die Summe aller äußeren Zeilen bzw. Spalten ergibt immer 1.
- Die Wahrscheinlichkeiten für die erste Stufe des Baumes werden an den entsprechenden Stellen in den äußeren Feldern angegeben.
- Die Wahrscheinlichkeiten für die zweite Stufe des Baumes kann man der Vierfeldertafel nicht direkt entnehmen, da die äußeren Felder entnommen werden.
- Die Wahrscheinlichkeiten der inneren Felder lassen sich **nicht** durch Multiplikation der beiden zugehörigen Werte der äußeren Felder in der gleichen Zeile und Spalte ermitteln.

Aufgabe 3.3

In einer Vierfeldertafel sind die Wahrscheinlichkeiten für einen stochastisch unabhängigen und einen stochastisch abhängigen Zufallsversuch angegeben. Fassen Sie die Gemeinsamkeiten und Unterschiede zusammen. Ergänzen Sie die folgenden Texte ergänzen:

Bei einem stochastisch unabhängigen Zufallsversuch sind die in den äußeren Feldern angegebenen Wahrscheinlichkeiten den Werten der inneren Feldern gleich, während bei einem stochastisch abhängigen Zufallsversuch nur die Wahrscheinlichkeiten der inneren Felder durch Multiplikation der zugehörigen Baumdiagramm-Werte in den Feldern der Vierfeldertafel ermittelbar sind.

b) Ergänzen Sie die fehlenden Angaben und erläutern Sie, wie man die Wahrscheinlichkeiten der äußeren Felder durch entsprechende Summen aus den Werten der inneren Feldern ermitteln kann.

- c) Bei einem stochastisch unabhängigen Zufallsversuch kann man die Werte für die Wahrscheinlichkeiten der inneren Felder durch entsprechende Multiplikation der Wahrscheinlichkeiten der äußeren Felder ermitteln. Das ist bei einem stochastisch unabhängigen Zufallsversuch _____.
- d) Die Summe der Wahrscheinlichkeiten in der Zeile und in der Spalte der inneren Felder ergeben bei einem _____ und einem _____ Zufallsversuch bei jeder Vierfeldertafel den Wert 1.
- e) Die Summe der Werte für die Wahrscheinlichkeiten aller inneren Felder ergibt _____.

Übungen

3.1 Prüfung auf stochastische Unabhängigkeit bzw. Abhängigkeit bei der Vierfeldertafel

- a) Begründen Sie, dass es eine Regel gibt, dass die folgende Vierfeldertafel zu einem stochastisch unabhängigen Zufallsversuch gehört.

	Merkmal B	Merkmal $\bar{B}$	
Merkmal A	0,15	0,25	0,4
Merkmal $\bar{A}$	0,15	0,45	0,6
	0,3	0,7	1

b) Begründen Sie, dass die folgende Vierfeldertafel zu einem stochastisch unabhängigen Zufallsversuch gehört.

	Merkmal D	Merkmal $\bar{D}$	
Merkmal C	0,08	0,12	0,2
Merkmal $\bar{C}$	0,32	0,48	0,8
	0,4	0,6	1

- Ü3.2 Aus einer Urne mit 2 roten und 4 schwarzen Kugeln werden zwei Kugeln gezogen. Die Kugeln werden mit Zurücklegen gezogen. Erstellen Sie ein Baumdiagramm. Übertragen Sie die Werte für Wahrscheinlichkeiten und Ereignisse an die entsprechenden Stellen der Vierfeldertafel, und prüfen Sie, ob die Regeln für die Addition und die Multiplikation bei der Vierfeldertafel erfüllt sind.

Baumdiagramm:

Vierfeldertafel:

Die Regeln für die Addition sind _____

Die Regeln für die Multiplikation sind _____

Ü3.3 Bei einem Glücksspiel gibt es eine Urne mit 2 schwarzen und drei weißen Kugeln. Es soll ermittelt werden, wie die Mischung aus schwarzen und weißen Kugeln bei einer zweiten Urne aussehen muss, damit die Wahrscheinlichkeit zwei schwarze Kugeln zu ziehen bei 10% liegt, wenn aus jeder Urne ein Kugel gezogen wird.

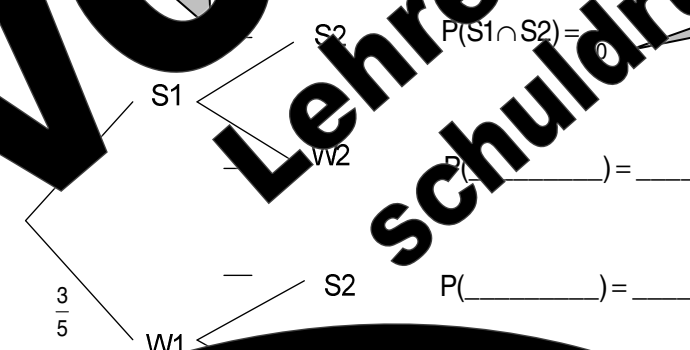
Abkürzungen: S1 schwarze Kugel aus Urne 1, W1 weiße Kugel aus Urne 1
S2 schwarze Kugel aus Urne 2, W2 weiße Kugel aus Urne 2

a) Begründen Sie, warum es sich bei diesem Spiel um einen stochastisch unabhängigen Zufallsversuch handelt, obwohl es sich um einen Versuch mit Zurücklegen handelt.

b) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten aller Ereignisse mithilfe eines Baumdiagramms:

Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „zwei schwarze Kugeln“ ist bekannt.

Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist bekannt



Hilfe:

Die fehlenden Wahrscheinlichkeiten in der zweiten Stufe des Baumes lassen sich durch Rückrechnen aus der angegebenen Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „zwei schwarze Kugeln“ und den Pfadwahrscheinlichkeiten in der ersten Stufe berechnen. Ergänzen Sie die fehlenden Wahrscheinlichkeiten in der zweiten Stufe und zeigen Sie, dass es in Urne 2 eine schwarze und vier weiße Kugeln geben muss.

Alternativ zum Baumdiagramm kann die Lösung auch mit einer Vierfeldertafel ermittelt werden. Berechnen Sie die Felder, ohne auf die Ergebnisse des Baumdiagramms zurückzugreifen, und vergleichen Sie anschließend die Wahrscheinlichkeiten.

	S2	
S1		$\frac{2}{5}$
W1		1

Hilfe:

Da es sich um einen unabhängigen Zufallsversuch handelt, kann man die Additions- und Multiplikationsregel beim Ausfüllen der Vierfeldertafel anwenden. Beispielsweise kann $P(S2)$ mit dem Satz $\frac{2}{5} \cdot P(S2) = \frac{1}{10}$ berechnet werden, was ergibt $P(S2) = \frac{1}{10} \cdot \frac{5}{2} = \frac{1}{4}$.

Ü3.4 Ein Falschspieler wirft gleichzeitig eine ideale und eine gefälschte Münze. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zeigt die gefälschte Münze Wappen an, wenn das Ereignis „Beide Münzen zeigen Zahl“ eine Wahrscheinlichkeit von 30% hat. Berechnen Sie die gesuchte Wahrscheinlichkeit zunächst mit einer Vierfeldertafel, und überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit einem Baumdiagramm.

Ein Falschspieler wirft gleichzeitig zwei Würfel geworfen. Ein Spieler verliert, wenn mindestens eine 1 fällt. Wie muss der Falschspieler einen der beiden Würfel fälschen, wenn er mit einer Wahrscheinlichkeit von 75% gewinnen will? Lösen Sie die Aufgabe mithilfe einer Vierfeldertafel und vergleichsweise mit einem Baumdiagramm.

Aufgabe 3.5

Die Vierfeldertafel mit absoluten Werten

Es gibt häufig Aufgabenstellungen, bei denen keine Angaben zu den Wahrscheinlichkeiten eines Merkmals gegeben sind, sondern absolute Zahlen vorgegeben werden. Auch in diesem Fall kann man mit Vierfeldertafeln arbeiten.

Zahlenbeispiel:
An einer Schule mit 720 Mädchen und 480 Jungen sind während einer Grippeperiode 200 der Schüler und Schülerinnen erkrankt. Die Sekretärin hat 144 Krankmeldungen der Mädchen gezählt. Für eine Statistik soll untersucht werden, ob die Grippeerkrankung vom Geschlecht abhängt und wenn stochastisch abhängig ist.

Abkürzungen für die Vierfeldertafel: $M \cap K$ = Mädchen, die erkrankt sind, $\bar{M} \cap \bar{K}$ = nicht erkrankt

Info:
Aussehen der Vierfeldertafel für absolute Werte

	K	$\bar{K}$	
M	$M \cap K$	$M \cap \bar{K}$	Anzahl M
$\bar{M}$	$\bar{M} \cap K$	$\bar{M} \cap \bar{K}$	Anzahl $\bar{M}$
	Anzahl K	Anzahl $\bar{K}$	Gesamtzahl

Erläutern Sie im Kontext der Aufgabenstellung die Bedeutung von:

$M \cap K$: _____

$\bar{M} \cap \bar{K}$: _____

$M \cap K$: _____

$\bar{M} \cap \bar{K}$: _____

Schritt 1:
Aus dem gegebenen Text schließen.

	K	$\bar{K}$	
M	144		720
$\bar{M}$			
	240		

Schritt 2:
Durch Anwendung der Additionsregel fehlende Werte ermitteln.

Erläutern Sie, warum der Wert 240 in $M \cap K$ eingetragen wird.

Erläutern Sie, wie der Wert 240 ermittelt wird.

Schritt 3:
Ermitteln der Wahrscheinlichkeiten für die Felder der Vierfeldertafel

	K	$\bar{K}$	
M	0,12	0,48	
$\bar{M}$	0,08	0,32	0,4
	0,2	0,8	1

a) Erläutern Sie, wie die Werte für die Felder berechnet wurden.

b) Begründen Sie, warum man bei der Untersuchung auf stochastische Abhängigkeit die Werte der Vierfeldertafel als prozentuale Anteile (bzw. über Wahrscheinlichkeiten) angibt.

c) Begründen Sie anhand einer Rechnung, dass die Erkrankung an Grippe stochastisch unabhängig ist.

Rechnungen: _____

Aufgabe 3.6

Die Vierfeldertafel und der allgemeine Additionssatz

In Kapitel 2 haben Sie die einfache Additionsregel für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit von Ereignissen kennengelernt. Lesen Sie ggf. zur Wiederholung in Aufgabe 2.1 nach. Man unter dieser Regel versteht. Anhand des folgenden Beispiels soll gezeigt werden, dass die einfache Additionsregel nicht immer angewendet werden kann und zu einer **allgemeinen Additionsregel** erweitert werden muss.

Zahlenbeispiel:

In einer Glasbläserei entstehen bei der Fertigung zwei Fehler. Die Gläser können Luftschüsse oder Formfehler oder auch beide Fehler haben. Luftschüsse werden bei 10% der Gläser und Formfehler bei 8% der Gläser festgestellt. Die Fehler treten unabhängig voneinander auf. Ein fehlerbehaftetes Glas wird als Ausschuss aussortiert und eingeschmolzen. Es soll ermittelt werden, wie viel Prozent Ausschuss entsteht.

Abkürzungen: L: Luftschuss, $\bar{L}$: kein Luftschuss, F: Formfehler, $\bar{F}$: kein Formfehler

Die Lösung der Aufgabenstellung soll auf drei verschiedene Weisen ermittelt werden:

1. Lösung über das Baumdiagramm

Zeichnen Sie das Baumdiagramm aus, und zeigen Sie durch entsprechende Rechnung, dass 12,6% der Gläser einen Fehler haben und damit Ausschussware sind:

$$P(L \cap F) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$P(\underline{\hspace{2cm}}) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$P(\underline{\hspace{2cm}}) = \underline{\hspace{2cm}}$$

2. Lösung über die Vierfeldertafel.

Füllen Sie die Vierfeldertafel aus, und zeigen Sie, dass sich für P(Ausschuss), falls ein Wert von 12,6% ergibt.

	F	$\bar{F}$	
L			
$\bar{L}$			
	P(F)	P($\bar{F}$)	P(L)

3. Lösung über die einfache Additionsregel

$$P(\text{Ausschuss}) = P(L) + P(F) - P(L \cap F) = 0,10 + 0,08 - 0,054 = 0,126 = 12,6\%$$

Der Fehler ist da nur!

Die Lösung 3 entstand. Der Fehler kann mithilfe der Vierfeldertafel sehr anschaulich analysiert und gehoben werden. Dazu werden die am 2. Beispiel erfolgten Überlegungen mithilfe der Vierfeldertafel veranschaulicht dargestellt.

	F	$\bar{F}$	
L	$P(F \cap L)$	$P(\bar{F} \cap L)$	$P(L)$
$\bar{L}$	$P(F \cap \bar{L})$	$P(\bar{F} \cap \bar{L})$	$P(\bar{L})$
	P(F)	P($\bar{F}$)	P(L)

Lösung

$$P(\text{Ausschuss}) = P(L) + P(F) - P(L \cap F)$$

ergänzen Sie: Der Ausschussanteil setzt sich aus $\underline{\hspace{2cm}}$ Fehlern und aus $\underline{\hspace{2cm}}$ Gläsern mit einem der beiden Fehler zusammen und wird $\underline{\hspace{2cm}}$ berechnet.

Lösungsweg 3 in aller Kürze:

$$P(\text{Ausschuss}) = P(L) + P(F) - P(L \cap F) = 0,10 + 0,08 - 0,054 = 0,126 = 12,6\%$$

Man kann P(Ausschuss) aus der Summe von P(L) und P(F) berechnet werden, dass das

beider Fehler, nämlich $P(F \cap L)$ $\underline{\hspace{2cm}}$ Rechnung

bedeutet und das ist $\underline{\hspace{2cm}}$

Begründen Sie allgemein, dass der Ansatz: $P(\text{Ausschuss}) = P(L) + P(F) - P(F \cap L)$ das richtige Ergebnis liefert, und weisen Sie dies auch am Zahlenbeispiel der obigen Aufgabenstellung nach.

Begründung: _____

Nachweis am Zahlenbeispiel: $P(\text{Ausschuss}) = P(L) + P(F) - P(F \cap L) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8} = 62,5\%$

Verallgemeinerte Formel

Damit in unserem Zahlenbeispiel ein Glas zur Ausschussware erklärt es aus, dass mindestens einer der beiden Fehler auftritt. Alternativ formuliert kann man sagen: Es tritt ein Formfehler oder ein Lufteinschluss auf. Mathematisch wird die „Oderbeziehung“ mit dem Zeichen $\cup$ angegeben. Für zwei beliebige Ereignisse A und B bezeichnet weiter, es folgt: $P(A \text{ oder } B) = P(A \cup B)$

Für die allgemeine Additionsregel ergibt sich:

allgemeine Additionsregel

Für zwei Ereignisse A und B gilt: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Ra...

Erg...

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Stochastik

selbstorganisiert lernen



Kapitel

Kombinatorische Abzählverfahren



Einführung in die Stochastik

Kapitel 1

Grundbegriffe 7

Kapitel 2

Baumdiagramme und mehrstufige Zufallsversuche 13

Kapitel 3

Vierfeldertafel 23

Kapitel 4

Kombinatorische Abzählverfahren 35

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Kapitel 5

Einführung in den Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit 47

Kapitel 6

Definition der Wahrscheinlichkeitsverteilung 61

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Kapitel 7

Erwartungswert 63

Kapitel 8

Variation und Standardabweichung 69

Kapitel 9

Normalverteilung 75

Hypothesentests

Kapitel 10

Zweiseitiger Signifikanztest 97

Kapitel 11

Einseitiger Signifikanztest – Fehler beim Testen 109

Kapitel 12

Vertrauensintervall 135

Die Betrachtungen zur Normalverteilung

Kapitel 14

Anwendung der Normalverteilung 149

Gesamtheit selbstorganisiert erlernen (Bestenfalls 278)

Sie sind herzlich eingeladen, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,

aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet

SelbstVerlag

tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germany)

Lehrerselbstverlag.de

www.f-druck.de

www.f-druck.de

Kapitel 4: Kombinatorische Abzählverfahren

Wir haben bisher in erster Linie Zufallsversuche betrachtet, bei denen man die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses mithilfe von Baumdiagrammen, die aus wenigen Ästen und Stufen aus wenigen Bestandteilen, berechnen konnte. Ergeben sich bei einer Aufgabenstellung jedoch Baumdiagramme mit vielen Ästen und Stufen, können diese sehr umfangreich und unübersichtlich werden. Man kann in diesen Fällen auf rechnerische Möglichkeiten, welche als **kombinatorische Abzählverfahren** bezeichnet werden, zurückgreifen.

Aufgabe 4.1

Produktregel

Jemand möchte im Kreis Groß-Gerau eine Wunschnummer zulassen und wünscht sich ein Kennzeichen, das nach einer ersten Ziffer aus zwei weiteren Ziffern und zwei Buchstaben besteht. Die erste Ziffer ist eine beliebige Ziffer von 0 bis 9 und die beiden Buchstaben haben jeweils 26 Möglichkeiten, da es 26 Buchstaben im Alphabet gibt. Wie viele Kennzeichen sind möglich?

a) Für die Berechnung der Anzahl der Möglichkeiten, ein wunschgemäßes Kennzeichen zu erhalten, kann man sich bei dieser Aufgabenstellung auch ohne weitere Hilfe mit einem Baumdiagramm behelfen. Begründen Sie, warum das folgende Baumdiagramm und die Anzahl der Möglichkeiten an den Verzweigungen in der ersten Stufe genau 26 Kennzeichen mit einer Wunschnummer gibt, wobei Umlaute ausgeschlossen sind. Geben Sie eine weitere gesetzliche Einschränkung bei der Vergabe von Kennzeichenkombinationen an.

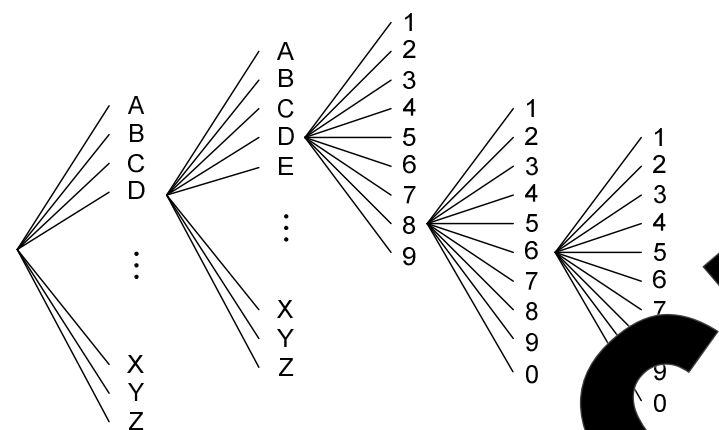
Stufe	Anzahl der Möglichkeiten am Ende jeder Verzweigung
1	
2	
3	
4	
5	

Begründen Sie, warum das folgende Baumdiagramm und die Anzahl der Möglichkeiten an den Verzweigungen in der ersten Stufe genau 26 Kennzeichen mit einer Wunschnummer gibt, wobei Umlaute ausgeschlossen sind. Geben Sie eine weitere gesetzliche Einschränkung bei der Vergabe von Kennzeichenkombinationen an.

b) Für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit, rein zufällig ein wunschgemäßes Kennzeichen wie oben zu erhalten, muss man die Anzahl der möglichen Kennzeichen bestimmen. Vereinfachend soll hier angenommen werden, dass Groß-Gerau nur Nummernschilder mit zwei Ziffern und zwei Buchstaben und drei Ziffern und zwei Buchstaben zulassen soll. Ermitteln Sie mithilfe des folgenden Baumdiagramms, warum man die Anzahl der Kennzeichen mit der Produktregel berechnen kann, indem Sie in der Tabelle für die Anzahl der Möglichkeiten an den Verzweigungen eintragen, warum nur ein Kennzeichen und nicht das gesamte Baumdiagramm dargestellt wird.

$$26 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 = 585000$$

Man kann, indem Sie in der Tabelle für die Anzahl der Möglichkeiten an den Verzweigungen eintragen, warum nur ein Kennzeichen und nicht das gesamte Baumdiagramm dargestellt wird.



Stufe	Anzahl der Möglichkeiten am Ende der Verzweigung
1.	4
2.	3
3.	2
4.	1
5.	1

Begründung und Erläuterung:

Berechnung der Wahrscheinlichkeit für das Wunschkennzeichen anhand der Definition der Wahrscheinlichkeit:

$$P(\text{Wunschzeichen}) = \frac{\text{Anzahl der Wunschzeichen}}{\text{Anzahl aller Kennzeichen}} = \frac{1}{24} = 4,17\%$$

Wenn Sie die Erläuterung nicht verstehen, wird ersichtlich, dass man die Anzahl aller Möglichkeiten in jeder Stufe multipliziert. Diese Berechnungsmethode wird in der Kombinatorik als Produktregel bezeichnet.

Ein Zufallsversuch bestehe aus k unabhängigen Stufen, wobei in der 1. Stufe n_1 , in der 2. Stufe n_2 , ..., in der k -ten Stufe n_k mögliche Ergebnisse gibt. Dann wird die Anzahl aller möglichen Ereignisse N des Produkts $N = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$ berechnet.

Die Produktregel zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten bei unabhängigen Ereignissen herangezogen werden. Es gibt zwei verschiedene Arten von Ereignissen:

- **Zurücklegen**: Bei diesen Ereignissen wird das Ergebnis in der nächsten Stufe berücksichtigt. Man bezeichnet diese Stichproben als **geordnete Stichproben**.
- **Ohne Zurücklegen**: Bei diesen Ereignissen wird das Ergebnis in der nächsten Stufe nicht berücksichtigt. Man bezeichnet diese Stichproben als **ungeordnete Stichproben**.

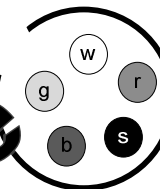
Aufgabe 4.2

Geordnete Stichproben mit Zurücklegen oder Variation

N Anzahl aller Möglichkeiten
 n Anzahl der Kugeln in einer Urne
 k Anzahl der Ziehungen

$$N = n^k$$

- a) Erläutern Sie beispielhaft anhand der bereits aus Kapitel 2 bekannten Urne die Rechenregel zur Ermittlung der Anzahl möglicher Ereignisse, wenn:
- 3 Kugeln mit Zurücklegen gezogen werden.
 - die Reihenfolge der Kugeln eine Rolle spielt, also beispielsweise die Reihenfolge wrs und rsw als verschiedene Ereignisse gewertet werden.



b) Ein Freund von Ihnen hat vier Ziffernräder mit den Ziffern 0 bis 9. Begründen Sie, warum die oben angegebene Regel bei dem Ziffernschloss zur Berechnung von allen Kombinationsmöglichkeiten angewendet werden kann und zeigen Sie, dass es im ungünstigsten Fall mehr als zweieinhalb Minuten dauert, eine veressene Zahlenkombination durch Probieren herauszufinden, wenn für jede falsche Einstellung eine Sekunde benötigt wird.

Aufgabe 4.3

Geordnete Stichproben ohne Zurücklegen oder Permutation

N Anzahl aller Möglichkeiten
 n Anzahl der Kugeln in einer Urne
 k Anzahl der Ziehungen

$$N = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)$$

Wenn $k = n$, dann gilt $k = n$

$$N = n(n-1)(n-2) \dots 1 \quad (\text{kurz: } n\text{-Fakultät})$$

Wenn Sie einen wissenschaftlichen Taschenrechner verwenden, können Sie die Anzahl der Möglichkeiten $n!$ mit einer entsprechenden Taste oder Tasteingabe berechnen.

a) Bestätigen Sie diese Regel zur Ermittlung der Anzahl aller möglichen Ereignisse im Spielhau... wenn aus der bekannten Urne (s. Aufg. 4.2) drei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen werden und die Reihenfolge der Kugeln eine Rolle spielt. Erläutern Sie auch, warum man die k-te Ziehung mithilfe der Summe $(n - k + 1)$ berechnet.

1. Ziehung: $n = 5$ Kugeln und damit $\dots$ Möglichkeiten
2. Ziehung: $n - 1 = n - 2 + 1 = 5 - 1 = \dots$ Kugeln mit $\dots$ Möglichkeiten
3. Ziehung: $n - \dots = n - 3 + 1 = 5 - 2 = \dots$ Kugeln und damit $\dots$ Möglichkeiten

Insgesamt gibt es also $N = \dots = 60$ möglichen Kombinationen.

Erläuterung:

b) Wenn man aus einer Urne zieht gilt: $n = \dots = \dots ! = 120$

c) Begründen Sie, warum die Formeln $N = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$ bzw. $N = n!$ bei der folgenden Aufgabe angewendet werden können und berechnen Sie jeweils die Anzahl der unterschiedlichen Kombinationsmöglichkeiten.

Ein Möbelhersteller bietet für ein Regalsystem 10 verschiedene Module an. Zeigen Sie durch Rechnung, dass sich mehr als 150 000 Varianten für die Zusammenstellung der Regalwand ergeben, wenn man im Laden 6 Module kauft bzw. mehr als 3 500 000 unterschiedliche Regalwände aufstellen kann, wenn man alle Module einmal gekauft wird. Zeigen Sie auch, dass man $\dots$ Regalwände zusammenstellen kann.

Wie viele Möglichkeiten hat man, wenn man im Möbelmarkt $\dots$

(2) Auswahl 10 Module im Möbelmarkt $N = \dots$

(3) Variationen $N = \dots$

Ergänzen Sie:

Aufgabe 4.4

Ungeordnete Stichprobe ohne Zurücklegen oder unvollständige Permutation

Beim Lotto werden aus einer Urne mit 49 Kugeln mithilfe des Ziehungsgeräts 6 Kugeln ohne Zurücklegen entnommen, wobei die Reihenfolge, in der die Kugeln gezogen werden, keine Rolle spielt, ob man gewinnt oder verliert. Stichproben, bei denen es, wie im Lotto, nicht auf eine bestimmte Reihenfolge bei der Ziehung ankommt, werden als **ungeordnete Stichproben** bezeichnet. Die Formel, mit der man die Anzahl der Kombinationsmöglichkeiten berechnen kann, soll anhand der folgenden Aufgabenstellungen veranschaulicht werden.

Aufgabenstellung:

Aus einer Urne mit n bunten Kugeln werden k Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Die Anzahl der unterschiedlichen Möglichkeiten, k ungeordnete Kugeln zu entnehmen, soll mit N bezeichnet werden. Ergänzen Sie die fehlenden Angaben in der folgenden Tabelle.

Anmerkung zum Verständnis der Überlegungen:

Um das Zustandekommen der Formel zu verstehen zu können, ist es notwendig zu akzeptieren, dass es neben den Möglichkeiten, k oder mehrere Kugeln aus einer Urne zu entnehmen, auch immer **eine** Möglichkeit gibt, **keine** Kugel, also $k = 0$ Kugeln zu ziehen. Das entspricht der **einen** Möglichkeit, nichts zu tun. Diese Möglichkeit besteht selbst bei einer leeren Urne, also für eine Urne mit $n = 0$ Kugeln.

1. In der Urne befinden sich $n = 0$ Kugeln

keine Kugel ziehen: $k = 0$	Es gibt eine Möglichkeit N nichts zu tun: $\Rightarrow N = 1$
-----------------------------	--

2. In der Urne befindet sich eine rote Kugel also $n = 1$ Kugeln

keine Kugel ziehen $k = \dots$	Es gibt eine Möglichkeit N nichts zu tun: $\Rightarrow N = 1$
eine Kugel ziehen $k = \dots$	eine Möglichkeit eine Kugel zu ziehen: $\Rightarrow N = 1$

3. In der Urne befinden sich eine rote (r) und eine grüne (g) Kugel also $n = 2$ Kugeln.

keine Kugel ziehen $k = \dots$	Es gibt eine Möglichkeit N nichts zu tun: $\Rightarrow N = \dots$
eine Kugel ziehen $k = \dots$	Es gibt $\dots$ verschiedene Möglichkeiten eine rote oder grüne Kugel zu ziehen: $\Rightarrow N = \dots$
zwei Kugeln ziehen $k = \dots$	Da zwischen rg und gr ein Unterschied vorliegt, sind dies zwei unterschiedliche Möglichkeiten, die eine Möglichkeit, wenn r und g gezogen werden: $\Rightarrow N = \dots$

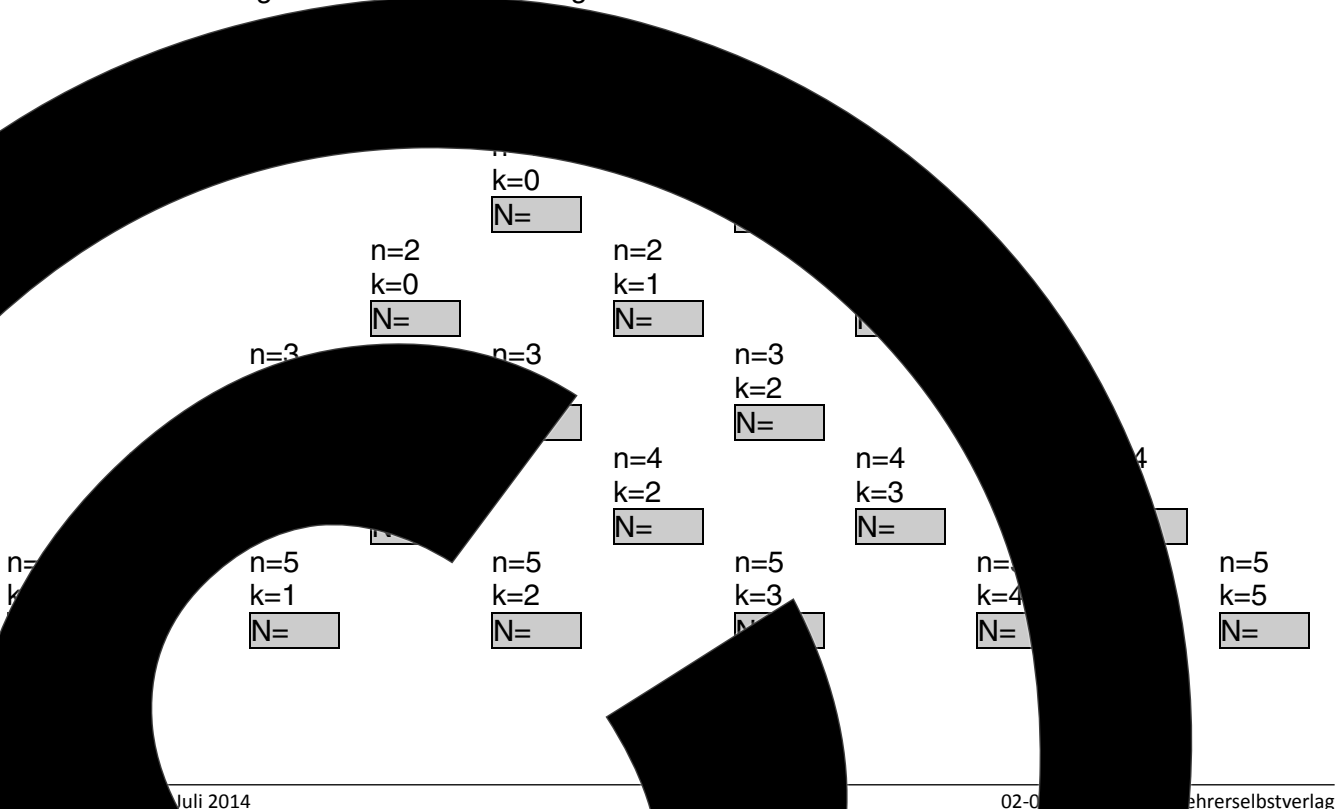
4. In der Urne befinden sich eine rote (r), eine grüne (g) und eine blaue (b) Kugel, n=3 Kugeln.

Beachten Sie bei der Bestimmung der Anzahl unterschiedlicher Kombinationen, dass zwischen Kugelkombinationen wie rg und gr nicht unterschieden wird. Jedes Ereignis somit nur als eine Kombinationsmöglichkeit gewertet werden.

keine Kugel ziehen	k = ____	⇒ N = ____
eine Kugel ziehen	k = ____	⇒ N = ____
zwei Kugeln ziehen	k = ____	⇒ N = ____
drei Kugeln ziehen	k = ____	⇒ N = ____

5. Ergänzen Sie zunächst im folgenden Schema an den entsprechenden Stellen die in Aufgabenteil 1. bis 4. erhaltenen Werte für N ein.

Wie Ihnen vielleicht schon bekannt ist, bilden die Werte von N das sogenannte Pascalsche Dreieck. Informieren Sie sich in geeigneter Weise, wie das Schema für n=4 und n= 5 fortgesetzt wird, und bestimmen Sie diese Werte ohne Verwendung weiterer Betrachtungen von Ziehungen aus Urnen bzw. ohne Erstellung von weiteren Baumdiagrammen.



6. Verallgemeinerungen

Die Werte von N werden auch als **Binomialkoeffizienten** bezeichnet. Hierfür kann man die Schreibweise $\binom{n}{k}$ (sprich: „n über k“). Damit ergeben sich bei n=5 beispielsweise die oben berechneten Werte:

$$n=5, k=0 \Rightarrow \binom{5}{0} = 1 \quad n=5, k=1 \Rightarrow \binom{5}{1} = 5 \quad n=5, k=2 \Rightarrow \binom{5}{2} = 10 \quad n=5, k=3 \Rightarrow \binom{5}{3} = 10 \quad n=5, k=4 \Rightarrow \binom{5}{4} = 5 \quad n=5, k=5 \Rightarrow \binom{5}{5} = 1$$

Rechnerische Ermittlung der Binomialkoeffizienten

Die Werte für die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ können auf drei verschiedene Arten ermittelt werden.

- Mithilfe des Pascalschen Dreiecks
- Mithilfe des Cr-Buttons* des Taschenrechners, Bsp.: $\binom{5}{2}$ Eingabe: 5 $\boxed{nCr}$ 2 ergibt 10
- Mithilfe der Formel $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ Bsp.: $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5 \cdot 2}{1} = 10$

*Englisch: Combinations

7. Berechnen Sie mit dem Taschenrechner, wie viele Möglichkeiten, eine Mischung aus 5 verschiedenen Saftsorten zu wählen, wenn die Reihenfolge der Auswahl keine Rolle spielt.

$$\binom{5}{k} = \underline{\hspace{2cm}}$$

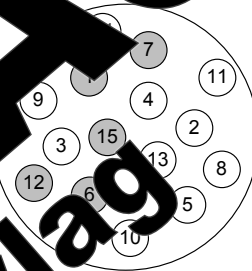
8. In einem Getränkemarkt gibt es 8 verschiedene Sorten Fruchtsaft. Eine Kundin kauft vier Flaschen. Berechnen Sie, wie viele Möglichkeiten, eine Mischung aus 4 verschiedenen Saftsorten zusammenzustellen, wenn jede Sorte nur eine Flasche gekauft werden kann.

Die Übungen: _____

Aufgabe 4.5

Anwendung der ungeordneten Stichprobe ohne Zurücklegen auf das Lottoproblem

Wir betrachten zunächst die abgebildete Urne, in der sich $n = 15$ unterschiedliche Kugeln befinden, von denen 5 grau gefärbt ($n_{\text{grau}} = 5$) und 10 weiß sind ($n_{\text{weiß}} = 10$). Berechnet werden soll die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter $k = 5$ gezogenen Kugeln 3 graue ($k_{\text{grau}} = 3$) und 2 weiße ($k_{\text{weiß}} = 2$) Kugeln befinden.



Die folgende Vorgehensweise beruht auf der Definition der Wahrscheinlichkeit sowie dem Produktsatz bei kombinatorischen Abzählverfahren. Er zeigt eine sinnvolle Möglichkeit bei Aufgabenstellungen dieses Typs vorzugehen. Verdeutlichen Sie sich die Vorgehensweise, und wenden Sie das Verfahren anschließend auf das Glücksspiel Lotto 6 aus 49 an.

Die Ziehungen von grauen und weißen Kugeln können als jeweils getrennte und voneinander unabhängige Vorgänge betrachtet werden.

Anzahl der Möglichkeiten aus 5 grauen Kugeln 3 graue zu ziehen.

Anzahl der Möglichkeiten aus 10 weißen Kugeln 2 weiße zu ziehen.

$$P(3\text{grau}) = \frac{\binom{5}{3} \cdot \binom{10}{2}}{\binom{15}{5}} = \frac{10 \cdot 45}{3003} = 0,14985 \approx 15\%$$

Anzahl der Möglichkeiten aus 15 Kugeln 5 Merkmale grau und 2 weiß aufzuteilen.

$$n_{\text{gesamt}} = 15 \begin{cases} n_{\text{grau}} = 5 \\ n_{\text{weiß}} = 10 \end{cases}$$

$$k_{\text{gesamt}} = 5 \begin{cases} k_{\text{grau}} = 3 \\ k_{\text{weiß}} = 2 \end{cases}$$

Anzahl der Ziehungen in die Merkmale grau und weiß ziehen aufzuteilen.

allen Möglichkeiten ziehen

Berechnung der Wahrscheinlichkeiten beim Lotto ohne Berücksichtigung der Zusatzzahl

Wenn man die Vorgehensweise auf die wöchentliche Ziehung der Lottozahlen anwendet, kann man wie folgt vorgehen. Aus den 49 Kugeln werden 6 gezogen. Diese 6 Kugeln hat man, wie in der Urne oben als grau markiert. Hat man auf dem Tippschein grau markierte Kugeln angekreuzt, entspricht das dem Ziehen einer grauen Kugel aus der Urne oben.

a) Wahrscheinlichkeit für 6 Richtige, also der Ziehung von 6 in Gedanken grau markierten Kugeln

$$n_{\text{gesamt}} = \begin{cases} n_{\text{grau}} = 6 \\ n_{\text{weiß}} = 43 \end{cases}$$

$$k_{\text{gesamt}} = \begin{cases} k_{\text{grau}} = 6 \\ k_{\text{weiß}} = 0 \end{cases}$$

$$P(6\text{ Richtige}) = \frac{\binom{6}{6} \cdot \binom{43}{0}}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{14\text{ Mio}} \approx 0,00007\%$$

b) Wahrscheinlichkeit für 5 Richtige, also der Ziehung von 5 in Gedanken grau markierten Kugeln

$$n_{\text{gesamt}} = \begin{cases} n_{\text{grau}} = 6 \\ n_{\text{weiß}} = 43 \end{cases}$$

$$k_{\text{gesamt}} = \begin{cases} k_{\text{grau}} = 5 \\ k_{\text{weiß}} = 1 \end{cases}$$

$$P(5\text{ Richtige}) = \frac{\binom{6}{5} \cdot \binom{43}{1}}{\binom{49}{6}} = \frac{6}{14\text{ Mio}} \approx 0,002\%$$

c) Wahrscheinlichkeit für 4 Richtige, also der Ziehung von 4 in Gedanken grau markierten Kugeln

$$n_{\text{gesamt}} = \begin{cases} n_{\text{grau}} = 6 \\ n_{\text{weiß}} = 43 \end{cases}$$

$$k_{\text{gesamt}} = \begin{cases} k_{\text{grau}} = 4 \\ k_{\text{weiß}} = 2 \end{cases}$$

$$P(4\text{ Richtige}) = \frac{\binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} \approx 0,1\%$$

d) Wahrscheinlichkeit für 3 Richtige, also der Ziehung von 3 in Gedanken grau markierten Kugeln

$$n_{\text{gesamt}} = \begin{cases} n_{\text{grau}} = 6 \\ n_{\text{weiß}} = 43 \end{cases}$$

$$k_{\text{gesamt}} = \begin{cases} k_{\text{grau}} = 3 \\ k_{\text{weiß}} = 3 \end{cases}$$

$$P(3\text{ Richtige}) = \frac{\binom{6}{3} \cdot \binom{43}{3}}{\binom{49}{6}} \approx 1,8\%$$

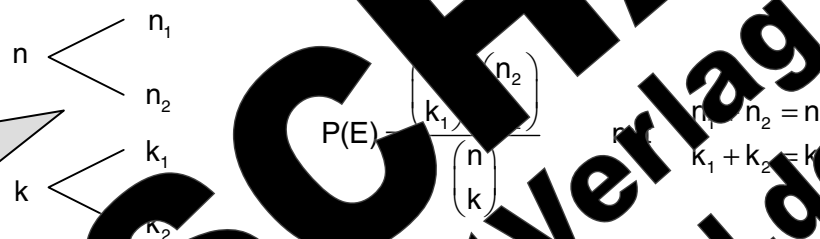
Verfeinerung des Lottoproblems

Wenn Sie den Ansatz für das „Lottoproblem“ angewendet haben, werden Sie feststellen, dass das Verfahren einleuchtet und auf Problemstellungen führt, die auf den ersten Blick zwar wenig mit dem Glücksspiel von Lottozahlen zu tun haben, jedoch einen klaren Weg bezeichnen, den man befolgen kann.

In einem Behälter befindet sich eine begrenzte Anzahl n von beliebigen Gegenständen, die man in zwei Gruppen einteilen kann, wobei es keine Rolle spielt, ob die Gegenstände mit dem jeweiligen Merkmal voneinander unterschieden werden können. Man entnimmt k dieser Gegenstände und berechnet die Wahrscheinlichkeit, wie viele Teile mit Merkmal 1 bzw. 2 in der Stichprobe enthalten sind.

Verallgemeinerter Ansatz:

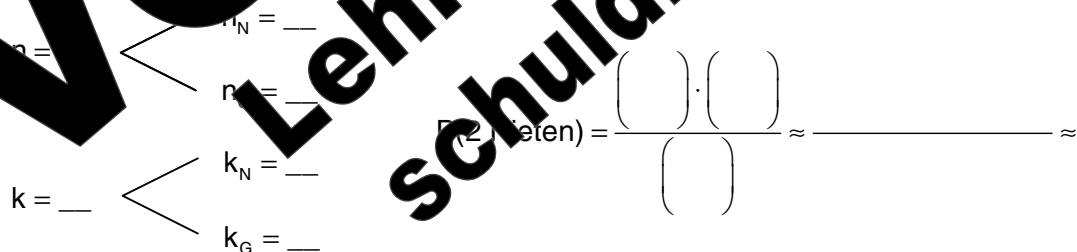
Aufteilen der Gesamtanzahl n bzw. aufteilen der Ziehungen k in die jeweilige Anzahl mit Merkmal 1 und 2.



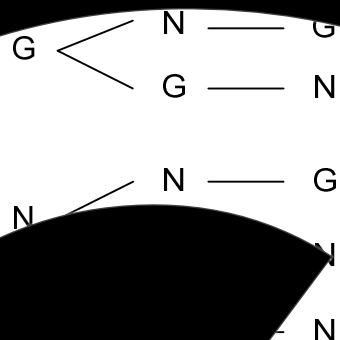
a) Wenden Sie diesen Ansatz auf folgende Aufgabe an, und überprüfen Sie Ihr Ergebnis mithilfe eines Baumdiagramms (Beachten Sie dabei, dass es sich um Ziehen ohne Zurücklegen handelt).

In einer Lostrommel befinden sich 20 Lose: 4 Gewinne und 16 Nieten. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, unter 5 gezogenen Lose 2 genau 2 Gewinne zu erhalten, bei 15% liegt.

Abkürzungen: Gewinn G, Nieten N



Baumdiagramm:



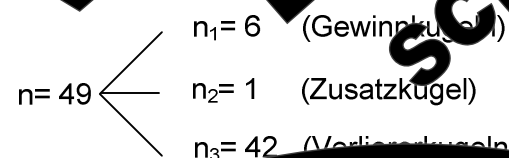
b) Vergleichen Sie den Rechenaufwand der beiden Wege, und beurteilen Sie die Möglichkeit, die Wahrscheinlichkeit, bei 8 gekauften Lose 5 Nieten zu erhalten, über ein Baumdiagramm zu ermitteln.

Ergänzende Übungen:

Aufgabe 6

Freizeit: Betrachtungen für Urnen mit mehr als zwei Merkmalen

Beim Lotto wird bei der Ziehung der Zusatzzahl mit ein, so hat man in der Trommel Kugeln mit drei Merkmalen: Gewinnkugel, Zusatzkugel und Verliererkugel. In diesem Fall kann man das Schema wie folgt erweitern:



$$P(A) = \frac{\binom{n_1}{k_1} \cdot \binom{n_2}{k_2} \cdot \binom{n_3}{k_3}}{\binom{n}{k}} \quad \text{mit} \quad \begin{matrix} n_1 + n_2 + n_3 = n \\ k_1 + k_2 + k_3 = k \end{matrix}$$

$k_3 = 0$

Durch Einsetzen in die obige modifizierte Formel lässt sich die Wahrscheinlichkeit ermitteln.

Zeigen Sie, dass die Chance, 5 Richtige mit Zusatzzahl zu erhalten, eine Chance von etwa 1 zu 2,3 Millionen ist.

(mit Zusatzzahl) =

Raum für Notizen:



Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Stochastik

selbstorganisiert lernen



Kapitel

Einführung in den Bereich
der Wahrscheinlichkeiten



Einführung in die Stochastik

Kapitel 1

Grundbegriffe 7

Kapitel 2

Baumdiagramme und mehrstufige Zufallsversuche 13

Kapitel 3

Vierfeldertafel 23

Kapitel 4

Kombinatorische Abzählverfahren 35

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Kapitel 5

Einführung in den Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit 47

Kapitel 6

Definition der Wahrscheinlichkeitsverteilung 61

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Kapitel 7

Erwartungswert 63

Kapitel 8

Varianz und Standardabweichung 69

Kapitel 9

Normalverteilung 75

Hypothesentests

Kapitel 10

Zweiseitiger Signifikanztest 97

Kapitel 11

Einseitiger Signifikanztest – Fehler beim Testen 109

Kapitel 12

Vertrauensintervall 135

Fortgeschrittene Betrachtungen zur Normalverteilung

Kapitel 14

Anwendung der Normalverteilung 149

Gesamtheit selbstorganisiert erlernen (Bestenfalls 278)

Seite

Alle Rechte vorbehalten. All rights reserved.

Druck, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,

aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet

LehrerselbstVerlag

LehrerselbstVerlag & Freunde GmbH, Koblenz (Germany)

Lehrerselbstverlag.de

www.f-druck.de

Kapitel 5: Einführung in den Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit

Im Kapitel 3 haben Sie sich im Zusammenhang mit den Vierfeldertafeln bereits mit stochastisch abhängigen Zufallsversuchen befasst.

Aufgabe 5.1

- a) Nennen Sie zur Wiederholung, mit welchem Kriterium man in einem Baumdiagramm bzw. in einer Vierfeldertafel erkennen kann, dass ein Zufallsversuch stochastisch abhängig ist.

Kriterium bei einem Baumdiagramm:

Kriterium bei einer Vierfeldertafel:

Bei der Zufallsabhängigkeit mit stochastisch abhängigen Zufallsversuchen entstehen Fragestellungen, die den Begriff der **bedingten Wahrscheinlichkeit** führen. Verdeutlichen Sie sich die Vierfeldertafel für das folgende Beispiel und bestätigen Sie durch Rechnung, dass die Wahrscheinlichkeit an Grippe zu erkranken vom Geschlecht stochastisch abhängig ist:

Beispiel:

In einer Region, in der 45% der Bevölkerung männlich sind, haben sich 35% der gesamten Bevölkerung mit einem neuen gefährlichen Grippevirus infiziert. Mithilfe der Angabe, dass das Merkmal eine Erkrankung an Grippe mit einer Wahrscheinlichkeit von 15% auftritt und den Anteil der männlichen Bevölkerung, die an Grippe erkrankt, kann die Vierfeldertafel aufgestellt werden.

Benutze die Additionsregel die folgenden Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen:

Vierfeldertafel

	G		
M	$P(M \cap G) = 0,2$	$P(M \cap \bar{G}) = 0,25$	$P(M) = 0,45$
	$P(\bar{M} \cap G) = 0,15$	$P(\bar{M} \cap \bar{G}) = 0,30$	$P(\bar{M}) = 0,55$
	$P(G) = 0,35$	$P(\bar{G}) = 0,65$	1

Bestimmen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit der stochastischen Abhängigkeit:

Aufgabe 5.2

Erstellen von Baumdiagrammen zu der Vierfeldertafel aus Aufgabe 5.1

Zu dieser Vierfeldertafel kann man unter zwei Gesichtspunkten ein Baumdiagramm erstellen, da die erste Stufe des Baumes das Merkmal männlich M oder nicht männlich $\bar{M}$, das zweite das Merkmal an Grippe erkrankt G oder nicht an Grippe erkrankt $\bar{G}$ enthalten kann. Ergänzen Sie in den beiden Baumdiagrammen die fehlenden Ereignisse.

1. Stufe:

Merkmal Mann oder Frau (nicht Mann)

M

$\bar{M}$

$G \rightarrow P(M \cap G) =$

$\rightarrow P(M \cap \bar{G}) =$

$P(\bar{M} \cap G) =$

$\rightarrow P(\bar{M} \cap \bar{G}) =$

1. Stufe:

Merkmal an Grippe erkrankt oder nicht erkrankt

M

$\bar{M}$

$\rightarrow P(M \cap G) =$

$\rightarrow P(M \cap \bar{G}) =$

$\rightarrow P(\bar{M} \cap G) =$

$\rightarrow P(\bar{M} \cap \bar{G}) =$

Es spielt keine Rolle, ob man hier $P(M \cap G)$ oder $P(G \cap M)$ etc. schreibt. Das Ergebnis wird aus dem Produkt der Pfadwahrscheinlichkeiten gewonnen und es gilt das Kommutativgesetz. Man kann die Schreibweise so verwenden, wie sie in der Vierfeldertafel verwendet wird.

Beschreibung der Pfade mit Wahrscheinlichkeiten

Da es sich um einen stochastisch abhängigen Zufallsversuch handelt, hängen die Wahrscheinlichkeiten in der zweiten Stufe des Baumes vom Ausgang des Zufallversuchs in der ersten Stufe ab. D.h., dass beispielsweise die Wahrscheinlichkeit $P(G)$ an Grippe zu erkranken in der zweiten Stufe des linken Baumdiagramms davon abhängt, ob in der ersten Stufe das Merkmal M oder das Merkmal $\bar{M}$ eingetreten ist. Damit ist die Wahrscheinlichkeit in der zweiten Stufe nur den Ausdruck $P(G|M)$ oder $P(G|\bar{M})$. Die Schreibweise* für die formale Darstellung der Baumdiagramme im Folgenden

1. Stufe:

Merkmal Mann oder Frau (nicht Mann)

M

$\bar{M}$

$G \rightarrow P(M \cap G) =$

$\rightarrow P(M \cap \bar{G}) =$

$P(\bar{M} \cap G) =$

$\rightarrow P(\bar{M} \cap \bar{G}) =$

1. Stufe:

Merkmal an Grippe erkrankt oder nicht erkrankt

M

$\bar{M}$

$\rightarrow P(M \cap G) =$

$\rightarrow P(M \cap \bar{G}) =$

$\rightarrow P(\bar{M} \cap G) =$

$\rightarrow P(\bar{M} \cap \bar{G}) =$

Angabe der Wahrscheinlichkeit an Grippe zu erkranken unter der Bedingung, dass man ein Mann ist $P_M(G)$

Angabe der Wahrscheinlichkeit an Grippe zu erkranken unter der Bedingung, dass man eine Frau ist $P_{\bar{M}}(G)$

Angabe der Wahrscheinlichkeit an Grippe zu erkranken unter der Bedingung, dass man ein Mann ist $P_M(G)$

Angabe der Wahrscheinlichkeit an Grippe zu erkranken unter der Bedingung, dass man eine Frau ist $P_{\bar{M}}(G)$

2. Stufe:

Angabe der Wahrscheinlichkeit ein Mann zu sein unter der Bedingung, dass man an Grippe erkrankt ist $P_G(M)$

Angabe der Wahrscheinlichkeit ein Mann zu sein unter der Bedingung, dass man nicht an Grippe erkrankt ist $P_{\bar{G}}(M)$

Angabe der Wahrscheinlichkeit eine Frau zu sein unter der Bedingung, dass man an Grippe erkrankt ist $P_G(\bar{M})$

Angabe der Wahrscheinlichkeit eine Frau zu sein unter der Bedingung, dass man nicht an Grippe erkrankt ist $P_{\bar{G}}(\bar{M})$

*Anstatt der indizierten Schreibweise $P_M(\bar{G})$ oder $P_{\bar{M}}(G)$ verwendet man auch $P(\bar{G}|M)$ bzw. $P(G|\bar{M})$

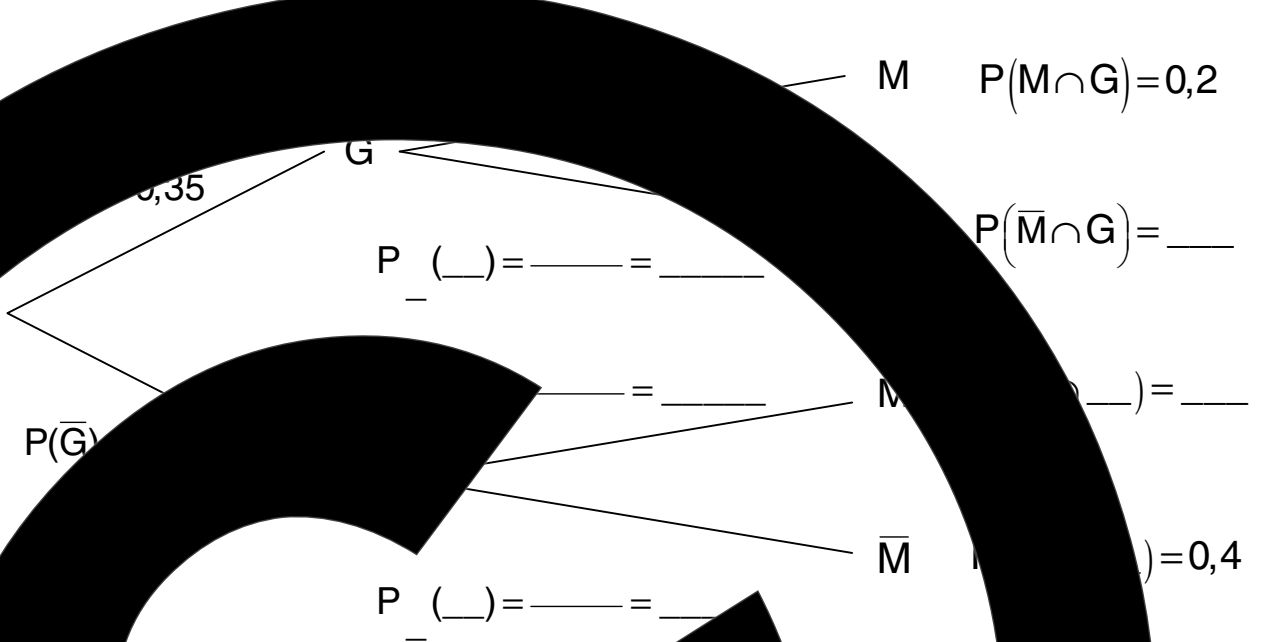
Da die Wahrscheinlichkeiten in der zweiten Stufe beider Baumdiagramme von der Bedingung abhängen, welches Ereignis in der ersten Stufe eingetreten ist, spricht man von **bedingten Wahrscheinlichkeiten**.

Ergänzen Sie mithilfe der Vierfeldertafel aus Aufgabe 5.1 in beiden Baumdiagrammen die Beschriftung der Pfade, und ermitteln Sie, wie im Beispiel $P_M(G)$ mithilfe der Pfadwahrscheinlichkeitsregel die Wahrscheinlichkeiten für alle Verzweigungen an den Ästen.

Baumdiagramm für die Bedingung M und $\bar{M}$ in der ersten Stufe:



Baumdiagramm für die Bedingung G und $\bar{G}$ in der ersten Stufe:



Aufgabe 5.6

Standardformulierungen bei Aufgabenstellungen zu bedingten Wahrscheinlichkeiten

Die Interpretation der Aufgabenstellungen bei bedingten Wahrscheinlichkeiten ist oft mit Schwierigkeiten behaftet. Daher sollen hier anhand des Beispiels Grippe Erkrankung die Hilfen für die Entschlüsselung von Standardformulierungen gegeben werden. In den folgenden Beispielen werden die Angaben bzw. verdeutlichen Sie sich die Beispiele und bearbeiten Sie die jeweiligen Aufgabenstellungen.

1. Fragestellungen, die sich auf die Gesamtheit der Merkmale beziehen

Bei Fragestellungen zu Wahrscheinlichkeiten, welche sich auf die Gesamtheit von Männern und Frauen beziehen, besteht zwischen den beiden Baumdiagrammen kein Unterschied. Typische Fragestellungen sind hier:

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat man Grippe (Mann und Grippe): $P(M \cap G) = 0,2$
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat man Grippe (Frau und Grippe): $P(F \cap G) = \dots$
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Mann gesund (Mann und gesund): $P(M \cap \bar{G}) = \dots$
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine Frau gesund (Frau und gesund): $P(F \cap \bar{G}) = \dots$

2. Fragestellungen, die sich auf die bedingte Wahrscheinlichkeit der 2. Stufe im Baum beziehen

Beispiel:

Bei den folgenden Fragestellungen (Standardformulierungen in Aufgaben) wird bei gegebener Wahrscheinlichkeit des Ereignisses und gegebener Wahrscheinlichkeit der ersten Stufe im Baum nach bedingten Wahrscheinlichkeiten der zweiten Stufe im Baum gefragt. Der Wert für die bedingte Wahrscheinlichkeit kann dann entweder mithilfe der Wahrscheinlichkeiten in einer Vierfeldertafel oder mithilfe eines passenden Baumdiagramms berechnet werden.

Textalternativen:

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft man unter den an Grippe Erkrankten auf einen Mann?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man als Mann an Grippe erkrankt?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit an Grippe zu erkranken, wenn man ein Mann ist?
- Wie groß ist, unter der Bedingung ein Mann zu sein, die Wahrscheinlichkeit zu erkranken?

Lösung:

$$\begin{aligned} &= \frac{0,2}{0,45} \\ &= 0,44 \end{aligned}$$

Textalternativen zur Aufgabenstellung:

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit ein Mann zu sein, wenn man an Grippe erkrankt ist?
- Wie groß ist, unter der Bedingung Grippe zu haben, die Wahrscheinlichkeit ein Mann zu sein?

Lösungsansatz:

$$P_G(M) = \frac{P(M \cap G)}{P(G)}$$

Berechnen Sie die gesuchten Wahrscheinlichkeiten, und formulieren Sie zusätzlich zur gegebenen Fragestellung eine zweite Fragestellung, welche das Wort „wenn“ enthält.

$$P_M(\bar{G}) = \frac{P(M \cap \bar{G})}{P(M)} = \dots = \dots$$

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft man unter den Männern auf einen nicht erkrankten.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit ...

$$P_M(G) = \frac{P(M \cap G)}{P(M)} = \dots = \dots$$

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft man unter den Frauen auf eine erkrankte?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit ...

Formulieren Sie eine zweite Fragestellung, und ermitteln Sie mit dem passenden mathematischen Ansatz die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit ...

Ansatz:

$$P_G(M) = \frac{P(M \cap G)}{P(G)} = \dots = \dots$$

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft man unter den an Grippe Erkrankten auf einen Mann.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit ...

$$P_G(M) = \frac{P(M \cap G)}{P(G)} = \dots = \dots$$

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft man unter den an Grippe Erkrankten auf eine Frau.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit ...

Ansatz und Re:

Aufgabe 5.7

Anhand des Beispiels in dieser Aufgabe soll eine weitere Hilfe für die Entschlüsselung Aufgabentexten bei bedingten Wahrscheinlichkeiten gegeben werden.

Zahlenbeispiel:

In Deutschland sind etwa 0,5% der Bevölkerung an einem seltenen, vererbten Krebs erkrankt. Man weiß, dass ein spezieller Bluttest 90% der Gesunden und 99% der Erkrankten richtig diagnostiziert.

a) Wie viel Prozent der Tests fallen positiv aus?

b) Bei einer Routinekontrolle zeigt der Test ein negatives Ergebnis an. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten, dass eine Person bei diesem positiven Ergebnis nicht erkrankt ist.

c) Bei einer Routinekontrolle zeigt der Test ein negatives Ergebnis an. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass man trotzdem an dem Krebs erkrankt ist.

Lösungsschritte

Schritt 1:

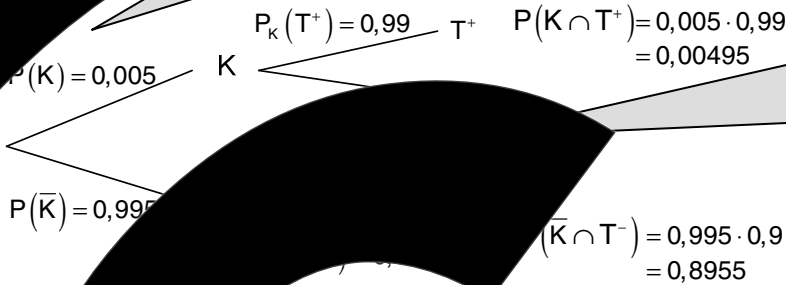
Festlegen der Merkmale und ihrer Abkürzungen:

- Person hat Krebs: K
- Person hat keinen Krebs: $\bar{K}$
- Test ist positiv: T^+
- Test ist negativ: T^-

Schritt 2:

Bauen Sie das Baumdiagramm durch Zuordnung der Zahlenangaben zu der ersten bzw. zweiten Stufe des Baumdiagramms erstellen.

Hier muss analysiert werden, welche Zahlenangaben sich auf die erste Stufe eines Baumdiagramms beziehen. Da sich die Zahlen auf die gesamte Bevölkerung beziehen, sind dies die ersten Stufen des Baumdiagramms.



Die Zahlenangaben zum Bluttest beziehen sich auf die Bedingung, ob eine Person an Krebs erkrankt ist, und sind damit die zweiten Stufen im Baumdiagramm.

Schritt 3:

Erstellen einer Vierfeldertafel durch Übertragen der Werte aus dem Baumdiagramm. Vervollständigung der Felder mithilfe der Additionsregel.

	T^+	T^-	
K	0,00495	0,00005	0,005
$\bar{K}$	0,0995	0,8955	0,9
	0,10445	0,89555	1

Schritt 4:

Analyse der Aufgabenstellung und Berechnen der gesuchten Wahrscheinlichkeiten mit der Vierfeldertafel und gegebenen Formeln für die bedingten Wahrscheinlichkeiten. Dazu kann man die Aufgabenstellung in einen Satz übersetzen.

zu a) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P(T^+)$. Das Ergebnis kann sofort aus der Vierfeldertafel abgelesen werden.

$P(T^+) = 0,10445 = 10,445\%$

zu b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine Person nicht erkrankt, wenn der Test ein positives Ergebnis anzeigt?

$$P_{T^+}(\bar{K}) = \frac{P(\bar{K} \cap T^+)}{P(T^+)} = \frac{0,0995}{0,10445} \approx 95,3\%$$

Die Werte für die Berechnung können der Vierfeldertafel entnommen werden.

Bei einem positiven Test ist man mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95% nicht erkrankt.

zu c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine Person erkrankt, wenn der Test ein negatives Ergebnis anzeigt?

Die Werte für die Berechnung können der Vierfeldertafel entnommen werden.

Ein negativer Test kann als sicherer Hinweis, dass man auch nicht erkrankt ist, angesehen werden, da man bei einem negativen Testergebnis nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,006% trotzdem erkrankt ist.

Ergänzung:

Anstatt die Vierfeldertafel kann man auch ein Baumdiagramm entwickeln, dessen erste Stufe die Merkmale T^+ und T^- hat, da sich die Aufgabenstellung auf ein Ereignis bezieht, in dessen Bedingung nicht mehr die Merkmale K und $\bar{K}$, sondern die Merkmale T^+ und T^- stehen.

Aufgabe 5.8

Bei 4,5 Millionen Wohneinheiten in Deutschland werden jährlich 200 000 Wohnungsbrände gemeldet. 600 Brände mit tödlichen Folgen für Menschen führen zu Überlegungen, ob Rauchmelder in allen Wohnungen Pflicht werden sollten. Jedoch funktionieren Rauchmelder in der Praxis nicht zu 100% fehlerfrei. Ein handelsüblicher Rauchmelder bei einem Schnäppchenangebotslösungs-Brandfall mit einer WK von 99,8% einen Alarm aus. Es kann jedoch auch nicht ausgeschlossen werden, dass der Rauchmelder einen Fehlalarm aussendet, wenn es nicht brennt. Solcher Fehlalarm wird einmal jährlich also mit einer Wahrscheinlichkeit von 1:365 erwartet.

- a) Begründen Sie, warum sich die gegebenen Werte auf ein Baumdiagramm beziehen und dem die Merkmale Brand B und nicht Brand $\bar{B}$ der ersten Stufe zugeordnet werden. Erstellen Sie dieses Baumdiagramm, und ermitteln Sie mit dessen Hilfe eine zugehörige Vierfeldertafel. Verwenden Sie für das Merkmal Alarm A und kein Alarm $\bar{A}$.

			1

- b) Ergänzen Sie die Vierfeldertafel, indem Sie die Zusammenhänge zwischen den Baumdiagrammen und der Vierfeldertafel verdeutlichen.

- c) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Brandmelder im Laufe eines Jahres einen Alarm aussendet.

- d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es bei dem Auslösen des Alarms wirklich brennt. Formulieren Sie diese Aufgabenstellung dazu zunächst mithilfe eines „Wenn-Then“-Satzes.

$$P_{\text{--}}(\text{---}) = \frac{P(\text{---})}{P(\text{---})} = \text{---} \%$$

- e) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für einen unbemerkten Wohnungsbrand, weil der Brandmelder keine Alarmmeldung gibt. Formulieren Sie diese Aufgabenstellung dazu auch hier zunächst mithilfe eines „Wenn-Then“-Satzes und beurteilen Sie anschließend die Sicherheit des Brandmelders.

$$P_{\text{--}}(\text{---}) = \frac{P(\text{---})}{P(\text{---})} = \text{---} = \text{---} = \text{---} \%$$

Beurteilung der Sicherheit:

Fazit: --- Aussagen: ---

Aufgabe 5.9

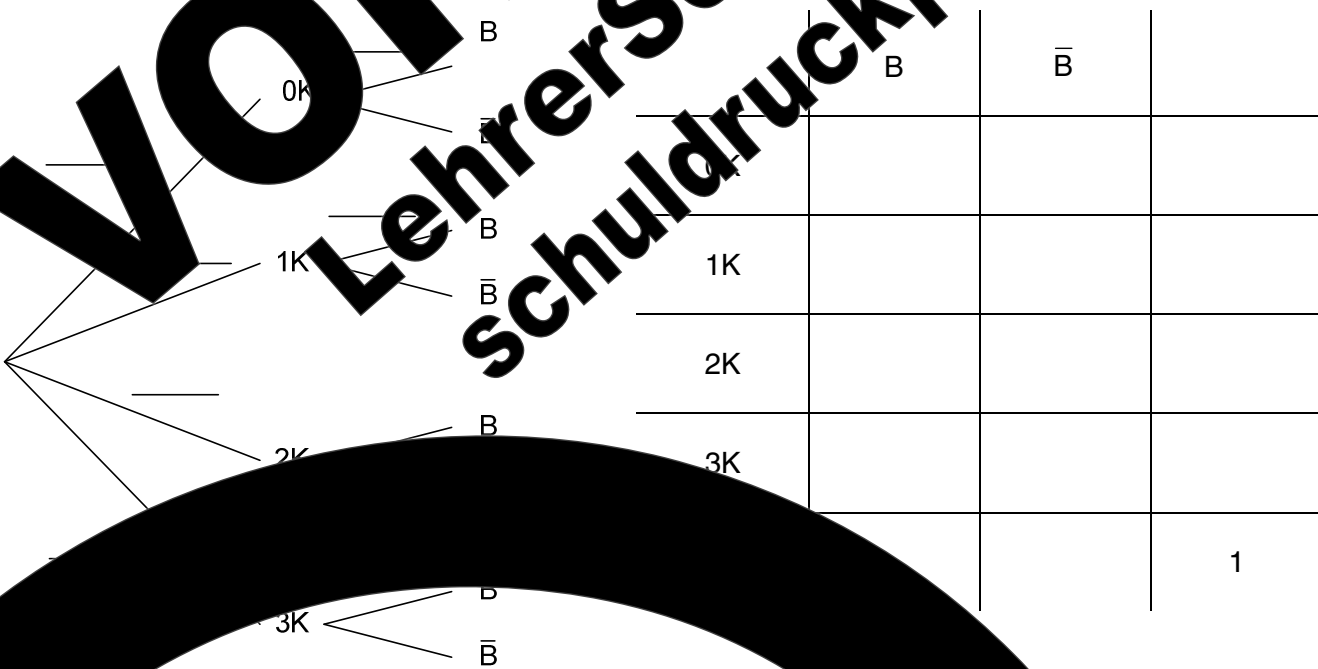
Ergänzende Betrachtung zu Mehrfeldertafeln

In einer Studie zur Berufstätigkeit von Frauen werden in Zufallsland folgende Zahlen erhoben: Von den 34% kinderlosen Frauen sind 95% berufstätig. Während von den 66% der Frauen, die ein Kind noch 30% einer Berufstätigkeit nachgehen sind, geben von den 25% der Frauen, die zwei Kindern 80% ihre Berufstätigkeit auf. Unter den Frauen mit drei oder mehr Kindern übergibt nur noch 10% Ihren Beruf aus.

a) Zeigen Sie, dass in Zufallsland 53,1% der Frauen nicht berufstätig sind.
b) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, unter den berufstätigen Frauen eine Frau mit zwei oder mehr Kindern anzutreffen, nur bei 1% liegt.

Lösungshinweise:

Bei Baumdiagrammen mit mehr als zwei Stufen bzw. bei Mehrfeldertafeln mit mehr als zwei Ästen und zwei Stufen kann man analog zu Baumdiagrammen mit zwei Ästen und zwei Stufen sog. Mehrfeldertafeln erstellen. Tragen Sie im Baumdiagramm an den markierten Stellen die der Aufgabe gegebenen Zahlen ein und füllen Sie mithilfe dieser Zahlenwerte und der Additionsregel die Mehrfeldertafel aus. Bestimmen Sie dann die gesuchten Wahrscheinlichkeiten in Aufgabe a) durch Ablesen aus der Mehrfeldertafel und in Aufgabe b) durch Rechnung mit der der Mehrfeldertafel entsprechenden Formel.



zu b)

Aufgabe 5.10

Ergänzende Betrachtungen zum Begriff der totalen Wahrscheinlichkeit

a) Verdeutlichen Sie sich anhand der beiden Baumdiagramme aus Aufgabe 5.9 die folgenden Zusammenhänge und den Begriff der **totalen Wahrscheinlichkeit**.

Die erste Stufe im linken Baum in Aufgabe 5.9 bezeichnet Merkmal A. Aus dem Baumdiagramm kann man nur die Wahrscheinlichkeiten der ersten Stufe $P(B)$ und $P(\bar{B})$ direkt ablesen. $P(B)$ und $P(\bar{B})$ können nur durch Addition der entsprechenden Ereignisse berechnet werden. $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$ oder $P(B) = P(B A) \cdot P(A) + P(B \bar{A}) \cdot P(\bar{A})$ Man bezeichnet die hier berechnete Wahrscheinlichkeit $P(B)$ als totale Wahrscheinlichkeit $P(B)$.	Die erste Stufe im rechten Baum in Aufgabe 5.9 bezeichnet Merkmal B. Aus dem Baumdiagramm kann man nur die Wahrscheinlichkeiten der ersten Stufe $P(A)$ und $P(\bar{A})$ direkt ablesen. $P(A)$ und $P(\bar{A})$ können nur durch Addition der entsprechenden Ereignisse berechnet werden. $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$ oder $P(A) = P(A B) \cdot P(B) + P(A \bar{B}) \cdot P(\bar{B})$ Man bezeichnet die hier berechnete Wahrscheinlichkeit $P(A)$ als totale Wahrscheinlichkeit $P(A)$.
---	--

b) Ergänzen Sie den folgenden Satz, und geben Sie mithilfe der beiden Baumdiagramme aus Aufgabe 5.9 die totalen Wahrscheinlichkeiten $P(\bar{B})$ und $P(\bar{A})$ entsprechend der Definition im Kasten an.

Man berechnet die totale Wahrscheinlichkeit $P(\bar{B})$ bzw. $P(\bar{A})$, indem man im entsprechenden Baum aus Aufgabe 5.9 alle Pfade, die zum Ereignis ____ bzw. ____ führen,

Wenn die 1. Stufe im Baum das Merkmal A bezeichnet, gilt:

Wenn die 1. Stufe im Baum das Merkmal B bezeichnet, gilt:

$P(\bar{B}) =$

$P(\bar{A}) =$

$P(\bar{A}) =$

Zusammenfassung zur Berechnung von bedingten Wahrscheinlichkeiten

Die Aufgabenstellung bezieht sich auf ein Baumdiagramm mit dem Merkmal A in der ersten Stufe.

Häufig sind bei Aufgabenstellungen zu bedingten Wahrscheinlichkeiten Aufgaben zum Merkmal A also $P(A)$ für die erste Stufe des Baumes und Wahrscheinlichkeiten für Ereignisse oder bedingte Wahrscheinlichkeiten der zweite Stufe im Baum gegeben, so dass man die Vierfeldertafel ausfüllen kann. Gefragt wird dann in der Regel nach einer bedingten Wahrscheinlichkeit, hier: die Wahrscheinlichkeit des Merkmals B, also $P(B)$, der ersten Stufe des Baumdiagramms verknüpft wird, also die Wahrscheinlichkeit für A unter der Bedingung, dass eingetreten ist, berechnet werden soll. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit kann dann mit der bedingten Formel berechnet werden.

Die Aufgabenstellung bezieht sich auf ein Baumdiagramm mit dem Merkmal B in der ersten Stufe.

Berechnung der bedingten Wahrscheinlichkeit $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ wenn B in der ersten Stufe des Baumes eingezeichnet ist.

Gleichwertig dazu ist die Formulierung von Bayes, bei der jeweils die totalen Wahrscheinlichkeiten eingesetzt werden.

$$P_B(A) = \frac{P(A) \cdot P_A(B)}{P(A) \cdot P_A(B) + P(\bar{A}) \cdot P_{\bar{A}}(B)}$$

Bayes

$$P_B(A) = \frac{P(A) \cdot P_A(B)}{P(A) \cdot P_A(B) + P(\bar{A}) \cdot P_{\bar{A}}(B)}$$

Ergänzung

Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Stochastik

selbstorganisiert lernen



Kapitel 5

Definition der Wahrscheinlichkeitsverteilung

Einführung in die Stochastik

Kapitel 1

Grundbegriffe 7

Kapitel 2

Baumdiagramme und mehrstufige Zufallsversuche 13

Kapitel 3

Vierfeldertafel 23

Kapitel 4

Kombinatorische Abzählverfahren 35

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Kapitel 5

Einführung in den Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit 47

Kapitel 6

Definition der Wahrscheinlichkeitsverteilung 61

Wahrscheinlichkeitsverteilung

Kapitel 7

Erwartungswert 63

Kapitel 8

Variation und Standardabweichung 69

Kapitel 9

Normalverteilung 75

Hypothesentests

Kapitel 10

Zweiseitiger Signifikanztest 97

Kapitel 11

Einseitiger Signifikanztest – Fisher beim Testen 109

Kapitel 12

Vertrauensintervall 135

Die Betrachtungen zur Normalverteilung 139

Kapitel 14

Anwendung der Normalverteilung 149

Gesamt: Selbstorganisiert erlernen (Bestenfalls 278)

Seite

Alle Rechte vorbehalten. All rights reserved.

Druck, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet

SelbstVerlag

tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germany)

Lehrerselbstverlag.de

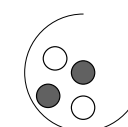
www.f-druck.de

Kapitel 6: Definition der Wahrscheinlichkeitsverteilung

Bei der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mit Baumdiagrammen lernen Sie, dass die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Ereignisse immer den Wert 1 ergibt. Dies ist Ihnen bereits ein wichtiges Merkmal einer Wahrscheinlichkeitsverteilung bekannt. Es folgt nun anhand eines einfachen Beispiels, eine Formalisierung und Erweiterung von Begrifflichkeiten.

Aufgabe 6.1

Definition der Zufallsvariablen und Darstellung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen



Aus einer Urne mit zwei roten und zwei weißen Kugeln werden alle Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.

Aufgabenstellung: Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit, dass man die beiden roten Kugeln nach dem 2. Ziehen, nach dem 3. Ziehen oder erst nach dem letzten Ziehen erhält.

Neue Bezeichnung: Für Vereinfachung und Formalisierung der Schreibweise wird nun eine Zufallsvariable X gegeben. Die Zufallsvariable X gibt hier die Anzahl der Ziehungen an, die man benötigt, damit das Ereignis e , zwei rote Kugeln zu ziehen, eintritt.

$$\begin{aligned} P(e) &= P(\text{2. rote Kugel im 2. Zug}) = P(X = 2) \\ P(e|rr) &= P(\text{2. rote Kugel im 3. Zug}) = P(X = 3) \\ P(e|wwrr) &= P(\text{rote Kugel im 4. Zug}) = P(X = 4) \end{aligned}$$

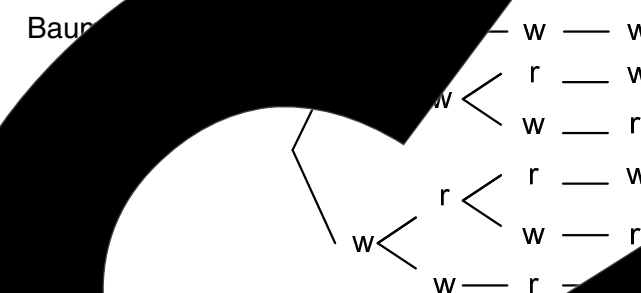
Alternativ:

$$P(e|k) = P(\text{2. rote Kugel im } k. \text{ Zug}) = P(X = k) \text{ für } k = 2, 3, 4$$

Die Wahrscheinlichkeit in der Form $P(e|k)$ entspricht der Aufgabenstellung.

Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben, indem Sie fehlende Werte eintragen.

a) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten an den Ästen des Baumdiagramms und verdeutlichen Sie sich danach die verschiedenen Seiten.



Darstellung des Zufallsversuchs mithilfe einer tabellarischen Wahrscheinlichkeitsverteilung			
Angabe der Ereignisse e_i als Klartext	2 rote Kugeln nach $k = 2$ Ziehungen	2 rote Kugeln nach $k = 3$ Ziehungen	2 rote Kugeln nach $k = 4$ Ziehungen
Festlegen der Werte für die Zufallsvariable hier: $x_i = k$	2	3	4
Berechnen der Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignis $P(X = x_i)$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$	$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{27} + \frac{2}{27} + \frac{2}{27} = \frac{7}{27}$
		Summe aller $P(X = x_i)$	$\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{7}{27} = \frac{9}{27} + \frac{9}{27} + \frac{7}{27} = \frac{25}{27}$

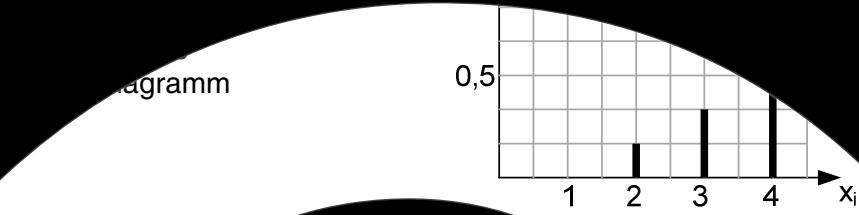
Geben Sie anhand der Tabelle die folgenden Werte an:

$P(X = 2) = \frac{1}{6}$
 $P(X = 3) = \frac{1}{3}$
 $P(X = 4) = \frac{7}{27}$

b) Bei der Bearbeitung der Aufgaben ist es nicht immer notwendig, die Wahrscheinlichkeitsverteilung in aller Ausführlichkeit anzugeben. Oft ist eine Darstellung in Kurzform ausreichend. Füllen Sie nachfolgendes Tabellenschema aus.

Angabe der Ereignisse e_i als Klartext	2 rote Kugeln nach $k = 2$ Ziehungen	2 rote Kugeln nach $k = 3$ Ziehungen	2 rote Kugeln nach $k = 4$ Ziehungen
Festlegen der Werte für die Zufallsvariable hier: $x_i = k$	2	3	4
Berechnen der Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignis $P(X = x_i)$			

c) Häufig werden Wahrscheinlichkeitsverteilungen auch mithilfe von Balkendiagrammen dargestellt. Verdeutlichen Sie sich das abgebildete Balkendiagramm, und vervollständigen Sie den nachfolgenden Text.



Auf der x-Achse werden die Zahlenwerte eingetragen, die die Zufallsvariable $X = x_i$ annehmen kann. Auf der y-Achse werden die Wahrscheinlichkeiten $P(X = x_i)$ eingetragen.

Ergebnisse:

Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Stochastik

 selbstorganisiert lernen



Kapitel 6

Erwartungswert

Einführung in die Stochastik

Kapitel 1

Grundbegriffe 7

Kapitel 2

Baumdiagramme und mehrstufige Zufallsversuche 13

Kapitel 3

Vierfeldertafel 23

Kapitel 4

Kombinatorische Abzählverfahren 35

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Kapitel 5

Einführung in den Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit 47

Kapitel 6

Definition der Wahrscheinlichkeitsverteilung 61

Wahrscheinlichkeitsverteilung

Kapitel 7

Erwartungswert 63

Kapitel 8

Varianz und Standardabweichung 69

Kapitel 9

Normalverteilung 75

Hypothesentests

Kapitel 10

Zweiseitiger Signifikanztest 97

Kapitel 11

Einseitiger Signifikanztest – Fehler beim Testen 109

Kapitel 12

Vertrauensintervall 135

Fortgeschrittene Betrachtungen zur Normalverteilung

Kapitel 14

Anwendung der Normalverteilung 149

Gesamtheit selbstorganisiert erlernen (Bestenfalls 278)

Stochastik

Alle Rechte vorbehalten. All rights reserved.

Druck, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet

LehrerselbstVerlag

LehrerselbstVerlag & Freunde GmbH, Koblenz (Germany)

www.lehrerselbstverlag.de

www.f-druck.de

Kapitel 7: Erwartungswert

Aufgabe 7.1

Definition des Erwartungswerts

Zur Information:

Erwartungswerte sind jedem Schüler unter dem Begriff „Mittelwert“ bekannt. Wenn man gefragt wird, welche Zeit man am Morgen durchschnittlich in der Schule für Arbeit benötigt, kann man, wie in der Tabelle unten, aus mehreren Zeitmessungen den Mittelwert bestimmen. Diese Berechnung entspricht prinzipiell der Ermittlung des Erwartungswerts einer Zufallsvariablen bei einem Zufallsversuch.

Berechnung des Mittelwerts aus bekannten Werten

Gemessene Zeit in Minuten	25	30	35	40	45
Absolute Häufigkeit des Messwerts	1	9	10	4	2

Vervollständige die Berechnung:

$$\frac{1}{30} \cdot 25 + \frac{9}{30} \cdot 35 + \frac{10}{30} \cdot 35 + \frac{4}{30} \cdot 40 + \frac{2}{30} \cdot 45 = \text{_____ Minuten}$$

Berechnung des Mittelwerts unter Verwendung der Begrifflichkeit der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Verwendet man die Begrifflichkeit der Wahrscheinlichkeitsrechnung, so entspricht jede gemessene Zeit dem Wert x_i , den eine Zufallsvariable X annehmen kann. Die relative Häufigkeit, mit der eine Zeitmessung auftritt, wird als Wahrscheinlichkeit für das Auftreten dieser Zufallsvariable interpretiert. Da

bei 30 Messungen die Zeit 30 Minuten auftritt, schreibt man: $P(X = 30) = \frac{10}{30}$. Den Mittelwert aus allen Messungen kann man auch als Erwartungswert $E(X)$ bezeichnen.

Wie kann man den Erwartungswert $E(X)$ unter dem Gesichtspunkt der Wahrscheinlichkeitsrechnung dann wie folgt berechnen?

Werte der Zufallsvariablen x_i	25	30	35	40	45
Wahrscheinlichkeit $P(X = x_i)$ für das Auftreten von x_i	$\frac{1}{30}$	$\frac{9}{30}$	$\frac{10}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{2}{30}$

$$E(X) = \frac{1}{30} \cdot 25 + \frac{9}{30} \cdot 30 + \frac{10}{30} \cdot 35 + \frac{4}{30} \cdot 40 + \frac{2}{30} \cdot 45$$

$$E(X) = \frac{1}{30} (25 + 270 + 350 + 160 + 90) = \text{_____ Minuten}$$

Ergänzen Sie:
Der Erwartungswert $E(X)$ einer Zufallsvariable X wird berechnet, indem man alle Werte x_i der Zufallsvariable X annimmt, jeweils mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten $P(X = x_i)$ multipliziert und die einzelnen Produkte anschließend addiert.

Allgemein lässt sich der Erwartungswert einer Zufallsvariable X definieren:

Ist X eine Zufallsvariable, welche die Werte $x_1, x_2, \dots, x_n$ annimmt, so heißt die Summe $E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \dots + x_n \cdot P(X = x_n)$ der Erwartungswert der Zufallsvariable X . Der Erwartungswert $E(X)$ wird auch mit dem griechischen Buchstaben μ (mu) bezeichnet.

Aufgabe 7.2
Die Wahrscheinlichkeitsverteilung unter dem Gesichtspunkt des Erwartungswerts

Die Aufgabenstellung von Aufgabe 6.1 wird wie folgt erweitert:
Wird nun zusätzlich zu den in Aufgabe 6.1 ermittelten Wahrscheinlichkeiten berechnet, wie viele Züge man bei häufigem Wiederholen des Zufallsversuchs durchschnittlich oder im Mittel benötigt, um zwei rote Kugeln zu erhalten. Ergänzen Sie fehlende Angaben.

Der Erwartungswert beschreibt das Ergebnis, das bei häufiger Durchführung eines Zufallsversuchs zu erwarten ist.

	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$

Berechnung des Erwartungswerts anhand der Definition oben:

$$E(x) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + x_3 \cdot P(X = x_3)$$

$E(x) = \underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$

Ergebnis: Man benötigt bei sehr häufiger Durchführung des Spiels durchschnittlich 3 Züge, um zwei rote Kugeln zu erhalten.

Aufgabe 7.3

Wahrscheinlichkeitsverteilung unter dem Gesichtspunkt eines Spielers
Erwartungswert.

Eine entscheidende Frage bei Glücksspielen ist nicht nur, ob man gewinnen oder verliert, sondern auch wie viel man gewinnen oder verlieren kann und ob ein Spiel als lohnenswert ist. Betreiber von Spielcasinos müssten Konkurs anmelden, wenn die Spieler bei Glücksspielen keinen ausreichenden Gewinn abwerfen, um laufende Kosten abzudecken. Berechnen Sie die folgende Berechnung des Erwartungswerts für den Gewinn bei einem Spiel und übertragen Sie die Vorgehensweise auf das anschließende Beispiel.

Die Aufgabenstellung aus Aufgabe 7.2 wird nun so verändert, dass die Berechnung eines Gewinns bzw. Verlusts im Mittelpunkt der Betrachtung steht. In einem Spiel mit einem Einsatz von 1,00 € liegt folgender Gewinnplan vor:

Ereignis	Auszahlung
2 rote Kugeln nach der 2. Ziehung	3,00 €
2 rote Kugeln nach der 3. Ziehung	1,00 €
2 rote Kugeln nach der 4. Ziehung	0 €

Für die Gewinn- bzw. Verlustberechnung darf man jetzt nicht nur den ausgezahlten Gewinn laut Gewinnplan betrachten, sondern muss von der Bilanz aus Ein- und Auszahlung ausgehen, d.h. von dem was der Spieler oder der Ausrichter des Spiels nach dem Spiel in der Tasche hat. Man muss sich in der Regel entscheiden, ob die Berechnungen aus Sicht des Spielers oder des Ausrichters erfolgen.

Folgende Tabelle stellt die Gewinn- bzw. Verlustrechnung aus Sicht des Spielers dar:

Ereignis	Auszahlung	Gewinn- /Verlustrechnung
2 rote Kugeln nach der 2. Ziehung	3,00 €	2,00 €
2 rote Kugeln nach der 3. Ziehung	1,00 €	0 €
2 rote Kugeln nach der 4. Ziehung	0 €	-1,00 €

Folgende Tabelle stellt die Gewinn- bzw. Verlustrechnung aus Sicht des Spieleausrichters dar:

Ereignis	Auszahlung	Gewinn- /Verlustrechnung
2 rote Kugeln nach der 2. Ziehung	3,00 €	-2,00 €
2 rote Kugeln nach der 3. Ziehung	1,00 €	-1,00 €
2 rote Kugeln nach der 4. Ziehung	0 €	0 €

Wie Sie sehen, ändern Sie nur die Vorzeichen der Zahlen bei der Gewinn-/Verlustrechnung. Das Ergebnis keine Rolle, aus welcher Sicht man ein Spiel betrachtet, die Berechnungen und die entsprechende Wahrscheinlichkeitsverteilung werden vom Spieler durchgeführt.

In der Wahrscheinlichkeitsverteilung ändert sich im Vergleich zu Aufgabe 7.2 bei der Betrachtung monetären Gewinns die Bedeutung der Zufallsvariablen $X = x_i$. Die Zufallsvariable X ordnet nun nicht mehr die Anzahl der Ziehungen an, sondern ordnet den einzelnen x_i den Gewinn bzw. Verlust pro Spiel zu. Für die Beschreibung des eingetretenen Ereignisses beim Ziehen kann man nun zusätzlich die Variable e_i verwenden. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses e_i bzw. für den Gewinn/Verlust x_i bleibt hinsichtlich der Aufgabe 7.2 unverändert.

Die folgende Formulierung der Ereignisse e_i sorgt für mehr Transparenz hinsichtlich der Aufgabenstellung und ist zu empfehlen, aber nicht notwendig.

Darstellung des Zufallsversuchs bei der hypergeometrischen Wahrscheinlichkeitsverteilung			
Auflistung der Ereignisse e_i	e_1 : 2 weiße Kugeln nach 2 Ziehungen	e_2 : 2 rote Kugeln nach 3 Ziehungen	e_3 : 2 rote Kugeln nach 4 Ziehungen
Jedem Ereignis e_i wird ein Zahlenwert x_i zugeordnet, der den Gewinn/Verlust des Spiels darstellt.	2,00 €	0 €	-1,00 €
	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$

Der mittlere Gewinn bei vielen durchgeführten Spielen, also der Erwartungswert, wird nun entsprechend zur Definition berechnet.

$$E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + x_3 \cdot P(X = x_3) = 2,00 \text{ €} \cdot \frac{1}{6} + 0 \text{ €} \cdot \frac{2}{6} + (-1,00 \text{ €}) \cdot \frac{3}{6} = -\frac{1}{6} \text{ €} = -0,17 \text{ €}$$

Das bedeutet, dass Sie bei der Durchführung des Spiels 17 Cent pro Spiel verlieren.

Aufgabe zur Berechnung des Erwartungswerts bei einem Glücksspiel

Folgendes Glücksspiel wird Ihnen vorgeschlagen:
Es werden zwei Würfel geworfen. Sie erhalten die von Ihnen angezeigte Augensumme, falls diese geradzahlig ist, und Sie erhalten den negativen Wert der angezeigten Augensumme, falls eine ungerade Zahl ergibt.

Entscheiden Sie sich spontan, d.h. ohne die folgenden Rechnungen zu machen, ob Sie sich auf dieses Spiel einlassen würden: ☐ ja ☒ nein

Übersicht der Augensummen beim Werfen von zwei Würfeln

Ereignis e_i : mögliche Augensumme	Würfelkombinationen für die möglichen Augensummen: (erster Würfel; zweiter Würfel)	Anzahl der Ereignisse
2	(1;1)	1
3	(1;2)(2;1)	2
4	(1;3)(2;2)(3;1)	3
5	(1;4)(2;3)(3;2)(4;1)	4
6	(1;5)(2;4)(3;3)(4;2)(5;1)	5
7	(1;6)(2;5)(3;4)(4;3)(5;2)(6;1)	6
8	(2;6)(3;5)(4;4)(5;3)(6;2)	5
9	(3;6)(4;5)(5;4)(6;3)	4
10	(4;6)(5;5)(6;4)	3
11	(5;6)(6;5)	2
12	(6;6)	1

Tabelle zur Wahrscheinlichkeitsverteilung und Berechnung des Erwartungswerts

Ereignis e_i : (Augensumme)														
Zufallsvariable x_i : Einzelauszahlung														
$P(X = x_i)$														

Erwartungswert: _____

Ergebnis: Der Erwartungswert nimmt den Wert Null an. Das bedeutet, dass Sie und den Mitspieler weder einen Gewinn noch einen Verlust erwarten können. Man erkennt, dass das Spiel fair ist, und weiß nun sicher, auf welches Ergebnis man sich einlassen kann.

Entscheiden Sie sich spontan, ob Sie sich auf dieses Spiel einlassen würden: ☐ ja ☒ nein

Die Übungsaufgaben: _____

Raum für Notizen:



Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Stochastik

selbstorganisiert lernen



Kapitel

Varianz und Standardabweichung



Einführung in die Stochastik

Kapitel 1

Grundbegriffe 7

Kapitel 2

Baumdiagramme und mehrstufige Zufallsversuche 13

Kapitel 3

Vierfeldertafel 23

Kapitel 4

Kombinatorische Abzählverfahren 35

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Kapitel 5

Einführung in den Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit 47

Kapitel 6

Definition der Wahrscheinlichkeitsverteilung 61

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Kapitel 7

Erwartungswert 63

Kapitel 8

Varianz und Standardabweichung 69

Kapitel 9

Normalverteilung 75

Hypothesentests

Kapitel 10

Zweiseitiger Signifikanztest 97

Kapitel 11

Einseitiger Signifikanztest – Fisher beim Testen 109

Kapitel 12

Vertrauensintervall 135

Die Betrachtungen zur Normalverteilung

Kapitel 14

Anwendung der Normalverteilung 149

Gesamt: Selbstorganisiert erlernen (Bestenfalls 278)

Alle Rechte vorbehalten. All rights reserved.

Druck, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet

SelbstVerlag

tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germany)

Lehrerselbstverlag.de

www.f-druck.de

Kapitel 8: Varianz und Standardabweichung

Wie Sie bereits wissen, entspricht die Berechnung des Erwartungswertes $E(X)$ der Bestimmung eines Mittelwerts für eine Zufallsvariable X . Bei vielen Prozessen in der Außenwelt, wie beispielsweise bei Messungen in der Physik oder bei der Herstellung von Bauteilen, reicht es nicht aus, diesen Mittel- bzw. Erwartungswert zu kennen. Vielmehr benötigt man eine Angabe, ob und wie viel die gemessenen Werte oder Bauteile von diesem Mittelwert abweichen. Bei Fertigungsprozessen in der Praxis werden diese Abweichungen auch als **Fertigungstoleranzen** bezeichnet. Die Abweichungen vom Erwartungswert werden mithilfe der sog. **Varianz** oder **Standardabweichung**, gewonnen. Verdeutlichen Sie sich anhand von Aufgabe 8.1, wie man diese Größe berechnet. Übertragen Sie Ihre Erkenntnisse dann auf die folgenden Übungsaufgaben.

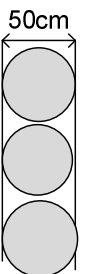
Aufgabe 8.1

Varianz und Standardabweichung bei Fertigungstoleranzen

Ein Hersteller von kreisförmigen Bauteilen vermutet aufgrund von Beschwerden seiner Kunden, dass seine Schleifmaschine nicht mehr exakt gearbeitet und daher eine neue ersetzt werden muss. Um dies zu überprüfen, lässt er aus der Produktion 100 Scheiben vermessen. Die Scheiben sollen einen Durchmesser von 50 cm haben. Überschreitet die durchschnittliche Abweichung diesen Wert um mehr als 1 cm, muss er sich für eine neue Maschine entscheiden und damit hohe Investitionskosten in Kauf nehmen.

Anmerkung: Die Zahlenwerte sind so gewählt, dass die Rechnungen möglichst einfach werden, entsprechen damit allerdings nicht realistischen Gegebenheiten.

Zeigen Sie durch Rechnung, dass sich als Erwartungswert für den Durchmesser der Scheiben der Sollwert von 50 cm ergibt. Die Zufallsvariable nimmt hier die Messwerte für den Durchmesser der 100 Scheiben an.



Zufallsvariable $X = x_i$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
Messwerte für die x_i			49	50	51	52	53	
Relative Häufigkeit $P(X=x_i)$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{33}{100}$	$\frac{23}{100}$	$\frac{10}{100}$	$\frac{2}{100}$	$\sum=1$

Erwartungswert:

$$E(X) = P(X = x_1) \cdot x_1 + P(X = x_2) \cdot x_2 + P(X = x_3) \cdot x_3 + P(X = x_4) \cdot x_4 + P(X = x_5) \cdot x_5 + P(X = x_6) \cdot x_6 + P(X = x_7) \cdot x_7$$
$$= \frac{1}{100} \cdot 49 + \frac{1}{100} \cdot 50 + \frac{1}{100} \cdot 49 + \frac{33}{100} \cdot 50 + \frac{23}{100} \cdot 51 + \frac{10}{100} \cdot 52 + \frac{2}{100} \cdot 53$$

Bestimmen Sie nun die Standardabweichung des Erwartungswerts nicht ausreichend, um eine Entscheidung für die Neuinvestition zu treffen.

Ergänzen Sie für die folgenden Berechnungen die fehlende Angaben.

Für den Erwartungswert wird hier μ verwendet.

Um das Rechnen mit Wurzeln zu vermeiden und um größere Abweichungen stärker gewichtet zu werden, werden die einfachen Abweichungen quadriert.

Einfache Abweichung der x_i vom Erwartungswert	$x_1 - \mu$	$x_2 - \mu$	$x_3 - \mu$	$x_4 - \mu$	$x_5 - \mu$	$x_6 - \mu$	$x_7 - \mu$
	47 - 50	48 -	49 -	50 -	51 -	52 -	53 -
$x_i - \mu$	-3			0			
Quadrierte Abweichung der x_i vom Erwartungswert $(x_i - \mu)^2$	$(x_1 - \mu)^2$	$(x_2 - \mu)^2$	$(x_3 - \mu)^2$	$(x_4 - \mu)^2$	$(x_5 - \mu)^2$	$(x_6 - \mu)^2$	$(x_7 - \mu)^2$

Varianz $V(x)$

$$V(x) = P(X=x_1) \cdot (x_1 - \mu)^2 + P(X=x_2) \cdot (x_2 - \mu)^2 + P(X=x_3) \cdot (x_3 - \mu)^2 + P(X=x_4) \cdot (x_4 - \mu)^2 + P(X=x_5) \cdot (x_5 - \mu)^2 + P(X=x_6) \cdot (x_6 - \mu)^2 + P(X=x_7) \cdot (x_7 - \mu)^2$$

$$V(x) = \frac{1}{100} \cdot 9 + \frac{10}{100} \cdot 4 + \frac{1}{100} \cdot 1 + \frac{1}{100} \cdot 0 + \frac{1}{100} \cdot 1 + \frac{1}{100} \cdot 4 + \frac{1}{100} \cdot 9$$

$$V(x) = \frac{1}{100} \cdot 9 + \frac{10}{100} \cdot 4 + \frac{1}{100} \cdot 1 + \frac{1}{100} \cdot 0 + \frac{1}{100} \cdot 1 + \frac{1}{100} \cdot 4 + \frac{1}{100} \cdot 9$$

$$V(x) = 1,62$$

Standardabweichung σ

$$\sigma = \sqrt{V(x)}$$

Durch das Ziehen der Wurzel aus dem berechneten Wert für die Varianz wird die Standardabweichung σ (Sprich: sigma) erhalten. Damit wird das Quadrieren der Abweichungen relativiert.

Entscheidung des Herstellers: Der Hersteller entscheidet sich aufgrund der Probe den

Kauf einer neuen Maschine, da

Allgemeine Definition der Standardabweichung

$$\sigma = \sqrt{V(x)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n P(X=x_i) \cdot (x_i - E(x))^2}$$

Aufgabe 8.2

Varianz und Standardabweichung bei der Auswertung von Messungen

Wie Sie aus dem naturwissenschaftlichen Unterricht sicherlich wissen müssen, muss bei jeder Messung beachtet werden, dass Messfehler auftreten. Bei der vollständigen Auswertung einer Messung müssen diese Messfehler angegeben werden. Im Allgemeinen wird das als Fehlerrechnung bezeichnet. Ergänzen Sie die für die folgende Messung fehlenden Angaben.

Zur Bestimmung der Beschleunigung a bei einer gleichförmigen beschleunigten Bewegung wird die folgende Messreihe aufgenommen:

Zeit t in [s]	Geschw. v in $\frac{m}{s}$	Beschleunigung $a = \frac{v}{t}$	Einfache Abweichung von a vom Erwartungs- bzw. Mittelwert $a_i - \bar{a}$	Quadrierte Abweichung der Werte von a vom Erwartungs- bzw. Mittelwert $(a_i - \bar{a})^2$
1	0,9	0,9	0,9 - 0,69 = 0,21	0,0441
2	1,0			
3	2,4	0,8		
4	2,5	0,63		
	3,1	0,62		
	4,2	0,7		
Mittelwert für a : $E(a) = \bar{a}$				
0,69				

Technik

gekennzeichnet. Hier a (Sprich: a)

$$\text{Varianz: } V(a) = \frac{1}{6} \cdot (0,0441 + \dots + \dots + \dots + \dots)$$

für diese Messung für die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{\dots}$

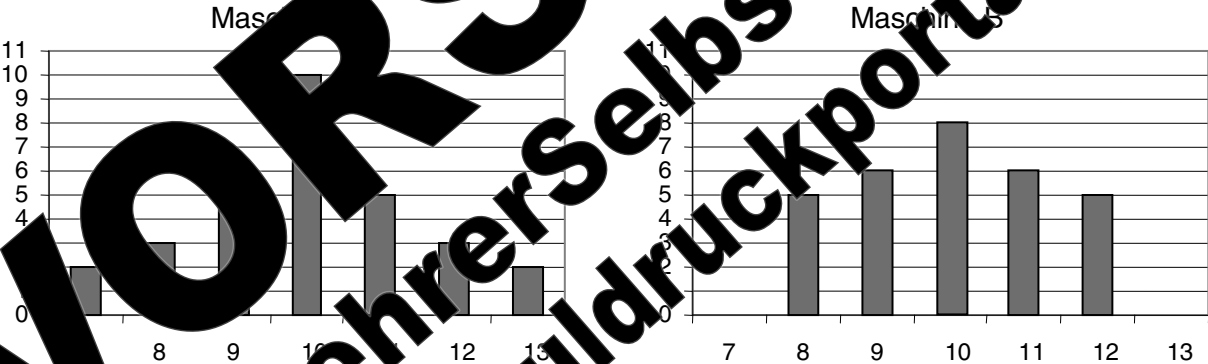
Übungen

Ü8.1: Varianz und Standardabweichung bei Fertigungstoleranzen

Zwei Maschinen A und B schneiden Stahlstifte auf die Länge von 10 mm. Die Messungen bei der Stiftlänge auftreten. Bei 30 Stiften werden jeweils die gemessenen Längen in einer Häufigkeitsverteilung dargestellt. Entscheiden Sie intuitiv, welche der Maschinen besser arbeitet bzw. die kleinere Fertigungstoleranz hat, und prüfen Sie durch die Berechnung der Standardabweichung, ob Ihre Entscheidung richtig ist.

- ☐ Maschine A arbeitet besser
- ☐ Maschine B arbeitet besser

Bei den Stabdiagrammen sind auf der horizontalen Achse die Informationen über die Länge der Stifte aufgetragen und auf der vertikalen Achse die absolute Häufigkeit. Entnehmen Sie die Informationen zu Messwerten und Wahrscheinlichkeiten den beiden Diagrammen, und füllen Sie die Tabelle entsprechend zur Berechnung aus:



Rechnung für Maschine A:

	Maschine A						
Messwerte x_i	$x_1 = 7$	$x_2 = 8$	$x_3 = 9$	$x_4 = \underline{\hspace{1cm}}$	$x_5 = \underline{\hspace{1cm}}$	$x_6 = \underline{\hspace{1cm}}$	$x_7 = \underline{\hspace{1cm}}$
relative Häufigkeit: $H(x_i)$ bzw. Wahrscheinlichkeit: $P(X=x_i)$							

Erwartungswert: $E(X) = \underline{\hspace{2cm}}$
 $\underline{\hspace{2cm}} = 10$

Abweichung der Messwerte vom Erwartungswert $x_i - E(X)$							
Quadrierte Abweichung: $(x_i - E(X))^2$							

Varianz: $V(X) = \underline{\hspace{2cm}}$
 $\underline{\hspace{2cm}} = 10$
Standardabweichung: $\sigma = \underline{\hspace{2cm}}$

Rechnung für Maschine B:

	Maschine B				
Messwerte x_i	$x_1 = \underline{\hspace{1cm}}$	$x_2 = \underline{\hspace{1cm}}$	$x_3 = \underline{\hspace{1cm}}$	$x_4 = \underline{\hspace{1cm}}$	$x_5 = \underline{\hspace{1cm}}$
relative Häufigkeit: $H(x_i)$ bzw. Wahrscheinlichkeit: $P(X=x_i)$					

Erwartungswert: $E(X) = \underline{\hspace{2cm}}$
 $\underline{\hspace{2cm}} = 10$

Abweichung der Messwerte vom Erwartungswert $x_i - E(X)$					
Quadrierte Abweichung: $(x_i - E(X))^2$					

Varianz: $V(X) = \underline{\hspace{2cm}}$
 $\underline{\hspace{2cm}} = 1,31$
Standardabweichung: $\sigma = \underline{\hspace{2cm}} = 1,31$

Ergebnis:

Anhand des Erwartungswerts kann man nicht entscheiden, welche der Maschinen eine kleinere Toleranz hat, da diese Werte bei beiden Maschinen $\underline{\hspace{2cm}}$ sind.
Maschine A hat eine kleinere Toleranz als Maschine $\underline{\hspace{1cm}}$, da die Standardabweichung bei Maschine $\underline{\hspace{1cm}}$ ist.

Ihre intuitive Entscheidung war: ☐ richtig ☐ falsch

Ü8.2 Recherchieren Sie in geeigneten Quellen, welche Bedeutung die Standardabweichung bei Glücksspielen hat.

$\underline{\hspace{2cm}}$
 $\underline{\hspace{2cm}}$
 $\underline{\hspace{2cm}}$
 $\underline{\hspace{2cm}}$
In den Übungen: $\underline{\hspace{2cm}}$
 $\underline{\hspace{2cm}}$
 $\underline{\hspace{2cm}}$

Raum für Notizen:



Oberstudienrätin Ursula Pirkel

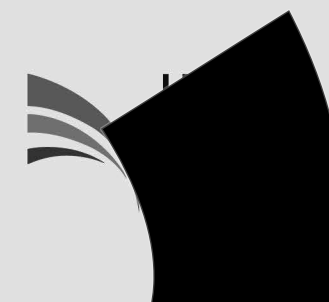
Stochastik

selbstorganisiert lernen



Kapitel

Binomialverteilung



Einführung in die Stochastik

Kapitel 1

Grundbegriffe 7

Kapitel 2

Baumdiagramme und mehrstufige Zufallsversuche 13

Kapitel 3

Vierfeldertafel 23

Kapitel 4

Kombinatorische Abzählverfahren 35

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Kapitel 5

Einführung in den Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit 47

Kapitel 6

Definition der Wahrscheinlichkeitsverteilung 61

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Kapitel 7

Erwartungswert 63

Kapitel 8

Variation und Standardabweichung 69

Kapitel 9

Binomialverteilung 75

Hypothesentests

Kapitel 10

Zweiseitiger Signifikanztest 97

Kapitel 11

Einseitiger Signifikanztest – Fehler beim Testen 109

Kapitel 12

Vertrauensintervall 135

Die Betrachtungen zur Normalverteilung

Kapitel 14

Anwendung der Normalverteilung 149

Gesamtheit selbstorganisiert erlernen (Bestenfalls 278)

Copyright vorbehalten. All rights reserved.

Druck, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,

aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet

SelbstVerlag

tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germany)

Lehrerselbstverlag.de

www.f-druck.de

Kapitel 9: Binomialverteilung

Die Binomialverteilung stellt eine wesentliche Basis bei der statistischen Auswertung von Daten dar und nimmt damit hinsichtlich vieler Anwendungsprobleme in der Wirtschaftswissenschaften und anderen Gebieten einen besonderen Stellenwert in der Wahrscheinlichkeitsrechnung ein. In der folgenden Aufgabe soll verdeutlicht werden, was man unter einer Binomialverteilung versteht.

Aufgabe 9.1

Herleitung der Formel von Bernoulli

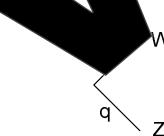
Eine verbeulte Münze zeigt beim Werfen Wappen mit einer unbekannten Wahrscheinlichkeit p und Zahl mit einer unbekannten Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$. Die Münze wird n Mal geworfen.

$$p(\text{Wappen}) = p(W) = p$$
$$p(\text{Zahl}) = p(Z) = q$$

Die Zufallsvariable X ist die oft Wappen geworfene ist.

Ermitteln Sie die angegebenen Baumdiagramme der jeweiligen Wahrscheinlichkeiten $P(X = k)$ in allgemeiner Form. Prüfen Sie die Produkte von p und q . Beachten Sie dabei, wie oft der jeweilige Pfad auftritt, und ergänzen Sie die Ausdrücke für die Wahrscheinlichkeiten sowie weitere fehlende Angaben in der nachfolgenden Tabelle.

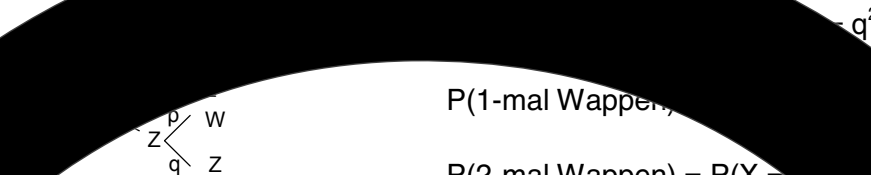
a) 1-mal werfen



$$P(0\text{-mal Wappen}) = P(X = 0) = q$$

$$P(1\text{-mal Wappen}) = P(X = 1) = p$$

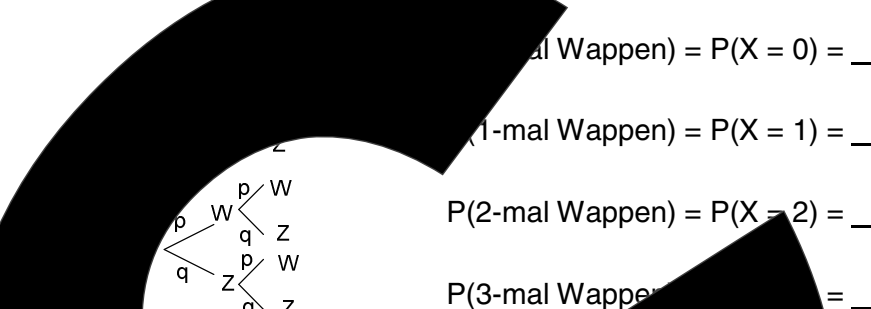
b) 2-mal werfen



$$P(1\text{-mal Wappen}) =$$

$$P(2\text{-mal Wappen}) = P(X = 2) =$$

c) 3-mal werfen



$$P(0\text{-mal Wappen}) = P(X = 0) =$$

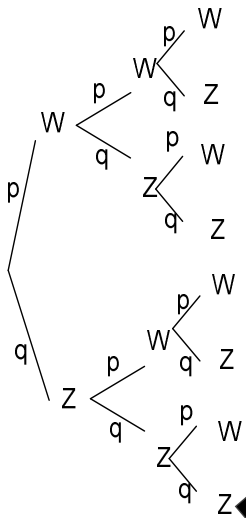
$$P(1\text{-mal Wappen}) = P(X = 1) =$$

$$P(2\text{-mal Wappen}) = P(X = 2) =$$

$$P(3\text{-mal Wappen}) = P(X = 3) =$$

d) 4-mal werfen

Ergänzen Sie die vierte Stufe im Baumdiagramm, und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten.



$P(0\text{-mal Wappen}) = P(X = 0) =$ _____

$P(1\text{-mal Wappen}) = P(X = 1) =$ _____

$P(2\text{-mal Wappen}) = P(X = 2) =$ _____

$P(3\text{-mal Wappen}) = P(X = 3) =$ _____

$P(4\text{-mal Wappen}) = P(X = 4) =$ _____

Wahrscheinlichkeitswerte für die Zufallsvariable X. Ergänzen Sie fehlende Angaben.

Ereignisse	0 x Wappen	1 x Wappen	2 x Wappen	3 x Wappen	4 x Wappen
Werte k der Zufallsvariablen	0	1	2	3	4
Wahrscheinlichkeit für die Zufallsvariable $P(X = k)$ bei n Würfen	$P(X = 0)$	$P(X = 1)$	$P(X = 2)$	$P(X = 3)$	$P(X = 4)$
Anzahl n der Würfe	n=1	q	p		
	n=2		p^2		
				p^3	
	n=4	q^4			p^4
Werten von Binomialkoeffizienten und Vervollständigen der Potenzen von p und q	$\binom{4}{0} p^0 q^4$	$\binom{4}{1} p^1 q^3$	$\binom{4}{2} p^2 q^2$		$\binom{4}{4} p^4 q^0$
Umformen Exponenten		$\binom{4}{1} p^1 q^{4-1}$	$\binom{4}{2} p^2 q^{4-2}$	$\binom{4}{3} p^3 q^{4-3}$	$\binom{4}{4} p^4 q^{4-4}$
Verallgemeinerung für n Würfe	$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$				
	Formel von Bernoulli				

e) Ermitteln Sie für den Münzwurf die Zahlenwerte für die Wahrscheinlichkeitsverteilung. Vier Dezimalstellen genau, wenn die Wahrscheinlichkeit für Wappen bei der verwendeten Münze $p = 0,3$ beträgt.

Ereignisse e_i als Klartext	0 x Wappen	1 x Wappen	2 x Wappen	3 x Wappen	4 x Wappen
k	0	1	2	3	4
$P(X = k)$	$\binom{4}{0} 0,3^0 \cdot 0,7^4$	$\binom{4}{1} 0,3^1 \cdot 0,7^3$	$\binom{4}{2} 0,3^2 \cdot 0,7^2$	$\binom{4}{3} 0,3^3 \cdot 0,7^1$	$\binom{4}{4} 0,3^4 \cdot 0,7^0$
	= _____	= _____	= _____	= _____	= _____



Summe $P(X = k) = 1$

Die Wahrscheinlichkeiten $P(X = k)$ werden mit der Formel von Bernoulli berechnet. Da diese Formel aus dem Pascalschen Dreieck und damit aus der Berechnung von Binomialkoeffizienten hervorgeht, bezeichnet man die hier vorliegende Wahrscheinlichkeitsverteilung als

Binomialverteilung.

Die Binomialverteilung wurde anhand des Münzwurfs als ein Zufallsversuch, bei dem die beiden Ausgänge Wappen und Zahl gibt und die Wahrscheinlichkeiten p und $q = 1 - p$ für Wappen und Zahl bei jedem Werfen der Münze gleich bleiben. Diese beiden Eigenschaften sind Grundvoraussetzungen für die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mithilfe der Formel von Bernoulli. Damit gilt:

Eine Zufallsvariable ist binomialverteilt, wenn

- das Experiment ein Ereignis E und dem zugehörigen Gegenereignis $\bar{E}$ nur zwei

Ergebnisse feststellen kann, dass die Wahrscheinlichkeit p für das Ereignis E und die Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ für das Gegenereignis $\bar{E}$ in jeder Stufe des Experimentes gleich bleibt.

Aufgabe 9.2

Anwendungsbeispiele für binomialverteilte Zufallsgrößen

Problemstellungen, die man auf einen Zufallsversuch mit gleichbleibenden Wahrscheinlichkeiten in jeder Stufe und zwei Ausgängen zurückführen kann, können mithilfe der Binomialverteilung, also mit der Formel von Bernoulli gelöst werden. Dies soll nun anhand der nachfolgenden drei Beispiele exemplarisch gezeigt werden. Arbeiten Sie die Beispiele durch, ergänzen Sie bei fehlende Angaben und formulieren Sie entsprechende Begründungen.

Beispiel 1

Bei der automatisierten Produktion von Biergläsern für die Gastronomie haben 10% der Gläser Fehler, sind daher nicht verkäuflich, werden aber trotzdem produziert und werden eingeschrotet.

- a) Um die Fehlerrate bei der Produktion zu kontrollieren, werden der laufenden Produktion 10 Gläser entnommen und auf Fehler geprüft. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich in dieser Stichprobe genau drei Gläser mit einem Fehler befinden.

Wahrscheinlichkeit von 10% für das Auftreten eines Fehlers bei jeder Entnahme gleich ist, beständig neue Gläser mit der gleichen Fehlerrate hinzukommen.

Zuordnen die Kenngrößen n , p , k und $P(x)$ der Formel von Bernoulli.

Es handelt sich um eine binomial verteilte Zufallsvariable, da es nur die beiden Ausgänge „Glas mit Feuer“ und „Glas ohne Feuer $\bar{F}$ “ gibt und die Wahrscheinlichkeit für F bzw. $\bar{F}$ bei jedem Ziehen gleich ist.

Anzahl der entnommenen Gläser: n = _____

Anzahl der Gläser mit dem Merkmal Fehler: $k =$ _____

Wahrscheinlich

...enthalt in der Stichprobe mit einer Wahrscheinlichkeit von ... bei Gläser mit einem ...

- b) In einer Kiste mit 100 Gläsern befinden sich 100 nicht geprüfte Gläser, von denen 10 fehlerfrei und 90 mit Fehler. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man hier bei der Entnahme von 10 Gläsern genau ein fehlerbehaftetes Glas erhält?

... ist ein Zufallsversuch, der den Bedingungen eines Bernoulli-
Versuchs entspricht, da man ohne Zurücklegen zieht und die
Wahrscheinlichkeit in den verschiedenen Stufen des Zufallsversuchs ä
... probe jedoch aus einer umfangreichen Menge von 100 Gläsern er
... hier Wahrscheinlichkeiten von Stufe zu Stufe wenig, und man k
Bernoulli für die Berechnung einer Näherung anwenden.

- i) Berechnen Sie die gesuchte Wahrscheinlichkeit näherungsweise mithilfe der Formel von Bernoulli.

Anzahl der entnommenen Gläser: n = ____

Anzahl der Gläser mit Fehler: k = _____

Wahrscheinlichkeit für das Merkmal Fehler: $p = \frac{1}{10}$

$$P(X = 2) = 0,3874 = 38,74\%$$

- ii) Zeigen Sie, dass sich mithilfe von kombinatorischen Verfahren der exakte Wert $\frac{1}{2} \cdot 8\%$, das heißt nur eine Abweichung von $\frac{1}{2}\%$ zu dem bisher ermittelten Wert, ergibt.

Achtung:
Die Bedeutungen von n und k unterscheiden sich in der Kombinatorik von der bei der Binomialverteilung.

$$n = \angle n_F =$$
$$n_E = \underline{\hspace{1cm}}$$
 $k =$ $P(X$

Einem Kasten mit 20 ungeprüften Gläsern befinden sich 10% Gläser mit Fehler. Berechnen Sie auch hier die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter 10 entnommenen Gläsern eines mit einem Fehler befindet, als Näherungswert mit der Formel von Bernoulli und mit dem kombinatorischen Verfahren. Zeigen Sie durch Rechnung, dass die beiden Werte nun fast 14% voneinander abweichen und die Verwendung der Formel von Bernoulli hier nicht mehr geeignet ist.

d) Der laufenden Produktion wird eine Stichprobe von 50 Gläsern entnommen. Zeigen Sie durch Rechnung, dass sich mit einer Wahrscheinlichkeit von 61,6% in dieser Stichprobe höchstens fünf Gläser mit Fehler befinden.

Anzahl der entnommenen Gläser: $n =$

Anzahl der Gläser mit Fehler: $k =$

Wahrscheinlichkeit für Fehler: $p =$

$$P(X \leq 5) = P(X = 0) + P(X = \underline{\quad}) + P(X = \underline{\quad}) + P(X = \underline{\quad}) + P(X = \underline{\quad}) + P(X = \underline{\quad})$$

$$=$$

$$=$$

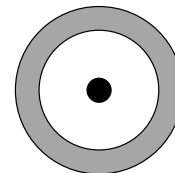
$$=$$

In der Stichprobe der Gläser mit einer Wahrscheinlichkeit von 61,6% höchstens 5 Gläser mit einem Fehler.

Beispiel 2

Ein geübter Spieler trifft bei der abgehandelten Zielscheibe beim Dart mit einer Wahrscheinlichkeit von 30% den schwarzen Punkt, mit einer Wahrscheinlichkeit von 40% den grauen Ring und einer Wahrscheinlichkeit von 30% den weißen Ring.

a) Begründen Sie, warum die gesuchte Wahrscheinlichkeit bei der folgenden Aufgabenstellung nicht mit der Formel von Bernoulli berechnet werden kann.



Aufgabenstellung: Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit welcher der geübte Spieler bei 10 Würfeln 7-mal den schwarzen Punkt, zweimal den weißen und einmal den grauen Ring trifft.

Begründung: _____

Begründen Sie, warum die gesuchte Wahrscheinlichkeit bei der folgenden Aufgabenstellung mit der Formel von Bernoulli berechnet werden kann, und zeigen Sie, dass der Wert von 20,1% ergibt.

Aufgabenstellung: Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit welcher der geübte Spieler bei 10 Würfeln genau 7-mal das schwarze und dreimal nicht das schwarze Feld trifft.

Begründung: _____

Rechnung: _____

Beispiel 3

Im Rahmen eines Bewerbungsverfahrens muss ein Multiplechoice-Test hinsichtlich der Kenntnisse in Algebra ausgefüllt werden. Der Test gilt nur dann als bestanden, wenn mindestens eine Aufgabe falsch beantwortet wird. Ein Bewerber hat keine Kenntnisse und kreuzt die Antworten zufällig an.

Kreuzen Sie die richtigen Antworten selbst an, und begründen Sie dann, dass man die Wahrscheinlichkeit, den Test durch zufälliges Ankreuzen zu bestehen, nicht im Test A und nicht beim Test B mithilfe der Formel von Bernoulli berechnen kann, wenn Sie sich dafür beim Test A eine Wahrscheinlichkeit von etwa 10% ergibt.

Test A: Aufgabe A1 bis A4

A1: $-\frac{2^2}{3} =$ $\begin{cases} -\frac{4}{9} & \text{○} \\ -\frac{4}{3} & \text{○} \\ \frac{4}{3} & \text{○} \\ \frac{4}{9} & \text{○} \end{cases}$

A2: $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 =$ $\begin{cases} -\frac{25}{9} & \text{○} \\ -\frac{8}{27} & \text{○} \\ \frac{8}{27} & \text{○} \\ \frac{25}{9} & \text{○} \end{cases}$

A3: $\left(\frac{2}{3}\right)^3 =$ $\begin{cases} \frac{4}{9} & \text{○} \\ \frac{4}{3} & \text{○} \\ \frac{8}{27} & \text{○} \\ \frac{25}{9} & \text{○} \end{cases}$

A4: $\frac{2}{a} + \frac{2}{b} =$ $\begin{cases} \frac{4}{a+b} & \text{○} \\ \frac{2}{a+b} & \text{○} \\ \frac{4}{a-b} & \text{○} \\ \frac{2}{a-b} & \text{○} \end{cases}$

Test B: Aufgabe B1 bis B4

B1: $\sqrt{a^3} =$ $\begin{cases} a^{\frac{3}{2}} & \text{○} \\ a\sqrt{a} & \text{○} \\ a^{\frac{2}{3}} & \text{○} \\ a^{\frac{3}{3}} & \text{○} \end{cases}$

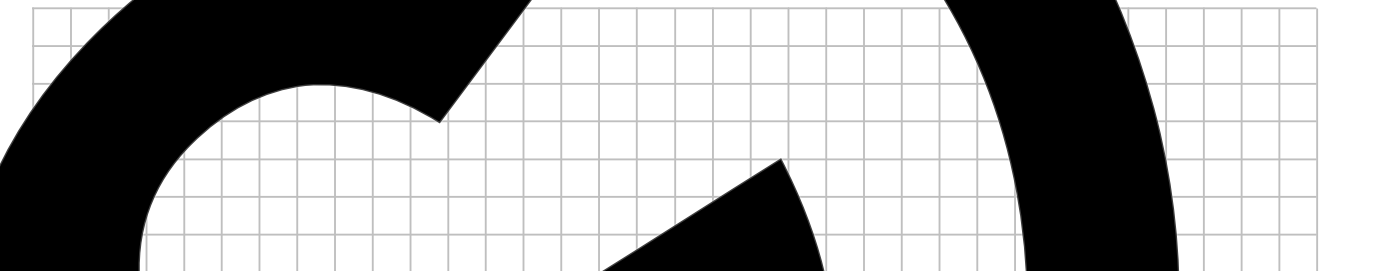
B2: $(x^2 - 1)^2 =$ $\begin{cases} x^4 + 1 & \text{○} \\ (x+1)^2(x-1)^2 & \text{○} \\ x^4 - 2x^2 + 1 & \text{○} \\ x^4 + 2x^2 + 1 & \text{○} \end{cases}$

B3: $\frac{a}{\frac{1}{a}} =$ $\begin{cases} \frac{1}{a^2} & \text{○} \\ \frac{1}{a} & \text{○} \\ a^2 & \text{○} \\ a & \text{○} \end{cases}$

B4: $\frac{a}{\frac{3}{2}} =$ $\begin{cases} \frac{3a}{2} & \text{○} \\ \frac{2a}{3} & \text{○} \\ \frac{3}{a} & \text{○} \\ \frac{2}{a} & \text{○} \end{cases}$

Begründung: _____

Rechnung: _____



Zusammenfassung und Ergänzungen zur Schreibweise

Sie haben in den Beispielen von Aufgabe 9.2 gelernt, unter welchen Bedingungen die Binomialverteilung für Berechnungen von Wahrscheinlichkeiten verwendet werden kann. Es wurde deutlich, dass von einer binomialverteilten Zufallsvariablen ausgegangen werden kann. Es wurde ebenfalls festgestellt, dass vielseitige Problemstellungen aus der Praxis mithilfe der Formel von Bernoulli gelöst werden können, dass jedoch Aufgabenstellungen, die in der Form $P(X < k)$ oder $P(X \leq k)$ vorliegen, einen beträchtlichen Rechenaufwand nach sich ziehen, da die Formel mehrfach für verschiedene Werte berechnet werden muss. Da man diesen Rechenaufwand erheblich verringern kann, wird in der nächsten Aufgabe gelernt, spielt die Anwendung der Binomialverteilung in der Praxis eine große Rolle. Bei der Verwendung der Formel von Bernoulli im Rahmen der Berechnung von binomialverteilten Zufallsvariablen wird häufig die Schreibweise $B_{n,p}(k)$ wie folgt angewandt:

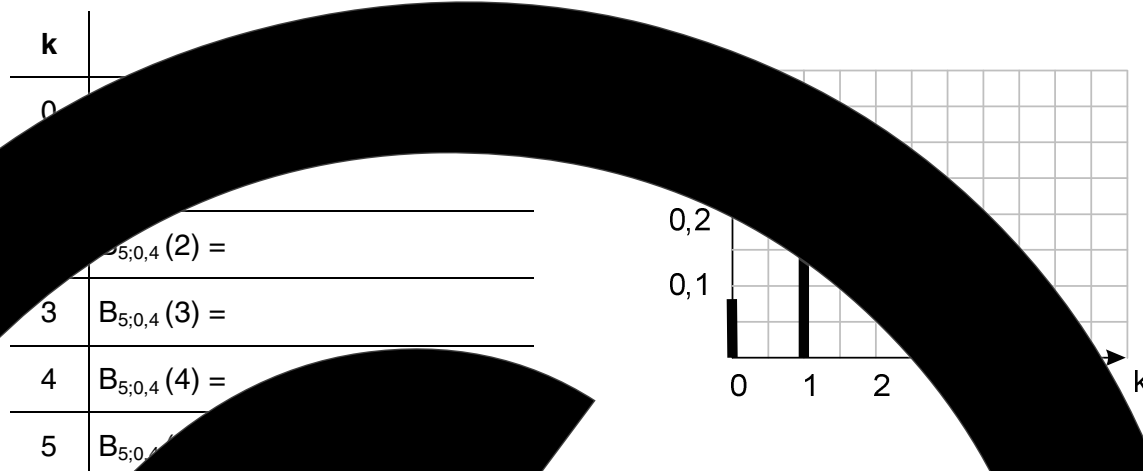
Für eine binomialverteilte Zufallsvariable gilt:

$$P(X = k) = B_{n,p}(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Für $n = 10$, $k = 7$ und $p = 0,8$ schreibt man: $P(X = 7) = B_{10,0,8}(7) = \binom{10}{7} 0,8^7 \cdot 0,2^3 = 0,2013$

Umgang mit der Binomialverteilung

- a) Berechnen Sie die binomialverteilten Wahrscheinlichkeiten $P(X = k) = B_{5,0,4}(k)$ mithilfe der Formel von Bernoulli, und tragen Sie Ihre Ergebnisse an den vorgesehenen Stellen ein. Vervollständigen Sie anschließend das Säulendiagramm.



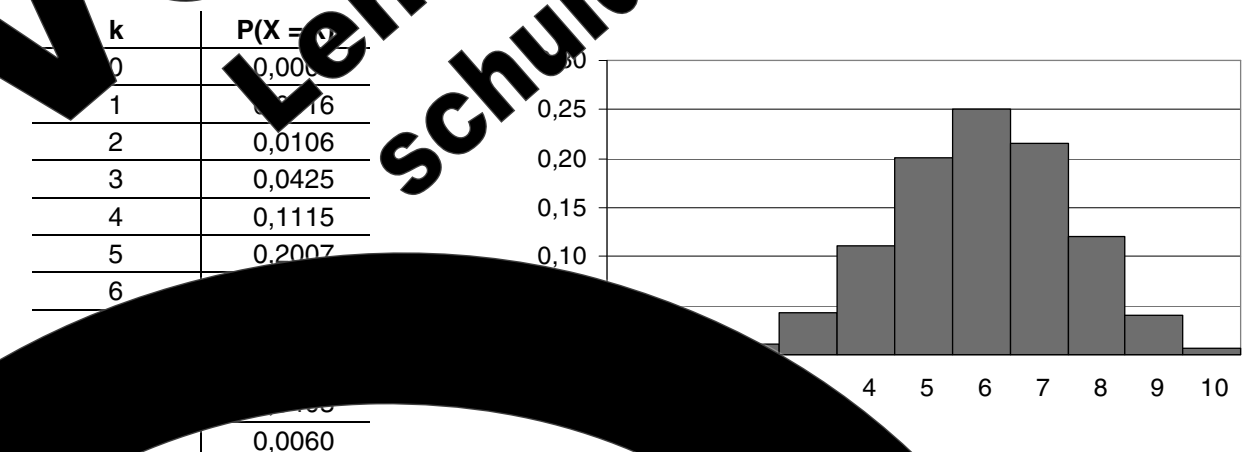
Die Wahrscheinlichkeiten können in Tafelwerken und oft auch Schulbücher abgelesen werden und können auch mit einem Taschenrechner oder Computer ermittelt werden. Vergleichen Sie die Binomialverteilung ermittelten Werte mit einer entsprechenden Tabelle aus einem Tafelwerk oder mit den Werten, die ein Taschenrechner erzeugt. Lesen Sie dazu in der Bedienungsanleitung des Taschenrechners nach, wie die Werte einer Binomialverteilung als Liste oder Einzelwerte erzeugt werden können.

- b) Im Säulendiagramm ist eine $B_{5,0,7}(k)$ -Verteilung abgebildet. Lesen Sie die Werte für die Wahrscheinlichkeiten $P(X = k)$ aus dem Diagramm näherungsweise ab, und tragen Sie die Werte in der Tabelle ein. Berechnen Sie die Werte anschließend mit der Formel von Bernoulli auf vier Nachkommastellen genau.



- c) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten in der Form $P(X < k)$, $P(X > k)$, $P(X \leq k)$ und $P(X \geq k)$.

Die Werte, die im Säulendiagramm sind, sind die Zahlenwerte einer $B_{10,0,6}(k)$ -Verteilung gegeben.



- d) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit $P(X < 5) = P(X \leq 4)$. Lesen Sie im Stabdiagramm, welche Balken hier aufsummiert werden.

$$P(X < 5) = P(X \leq 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = \dots + \dots + \dots = \dots$$

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(X < 5)$ und $P(X > 5)$ ebenfalls mithilfe von Tafelwerken oder Taschenrechnern. Man verwendet hier die Binomialverteilungsfunktion $F_{n,p}(k)$. Betrachten Sie den gesuchten Wert in einer derartigen Tabelle, bzw. in der Bedienungsanleitung Ihres Taschenrechners.

$$P(X < 5) = P(X \leq 4) = F_{10,0,6}(4) = \dots$$

- ii) Ermitteln Sie anhand der Tabelle oder mithilfe des Taschenrechners für eine $B_{50;0,5}(k)$ -Verteilung die folgenden Wahrscheinlichkeiten.

$$P(X < 20) = P(X \leq 19) = F_{50;0,5}(19) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$P(X < 30) = \underline{\hspace{2cm}}$$

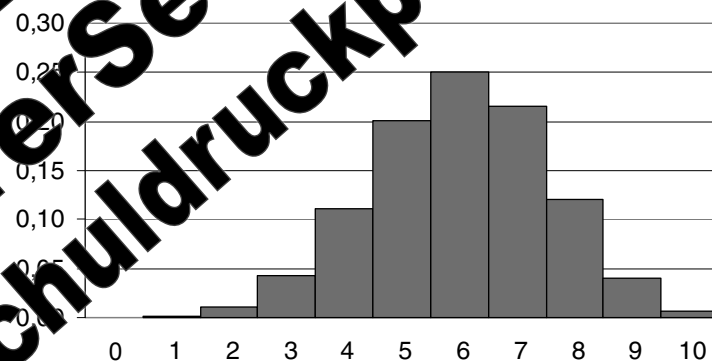
$$P(X \leq 25) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$P(X \leq 11) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$P(X < 40) = \underline{\hspace{2cm}}$$

- iii) Markieren Sie in der folgenden Verteilung und im Säulendiagramm die Werte bzw. Balken, die man aufsummieren muss, um diese Verteilung die Wahrscheinlichkeit $P(X \geq 5)$ zu ermitteln, und zeigen Sie eine Verwendung der gedruckten Tabellen, nach entsprechende Summenbildung auf den Balken der folgenden Tabelle, dass sich der Wert 0,8377 ergibt.

k	P(X = k)
0	0,0001
1	0,0005
2	0,0019
3	0,0047
4	0,0098
5	0,0163
6	0,0207
7	0,0250
8	0,0298
9	0,0340
10	0,0377



$$P(X \geq 5) = \underline{\hspace{2cm}}$$

und auch nicht direkt mit dem Taschenrechner erhalten. Man muss hier mit der Tabelle arbeiten. Da die Summe aller Werte aller Balken bei einer Verteilung 1 beträgt, entspricht die Summe des Balkens 10. Balkens der Gegenwahrscheinlichkeit der Summe der ersten 4 Balken. Für die Berechnung bedeutet das:

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - F_{10;0,5}(4) = 1 - 0,1663 = 0,8337$$

- iv) Bestimmen Sie die folgenden Werte:

$$P(X > 10) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$P(X \leq 10) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$P(X < 10) = \underline{\hspace{2cm}}$$

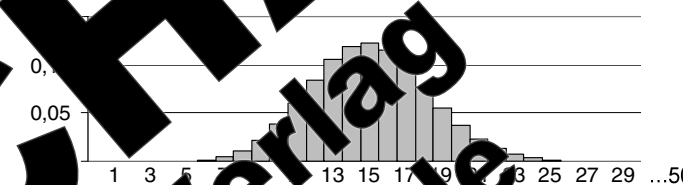
$$P(X \geq 10) = \underline{\hspace{2cm}}$$

Übungen

Ü9.1 Ermitteln von Wahrscheinlichkeiten mit der Binomialsummenfunktion $F_{50;0,3}(k)$. Markieren Sie die zu berechnenden Wahrscheinlichkeiten im dargestellten Ausschnitt des Säulendiagramms der $B_{50;0,3}(k)$ -Verteilung, und bestätigen Sie jeweils die angegebenen Wahrscheinlichkeiten mithilfe des Taschenrechners und oder einer entsprechenden Tabelle.

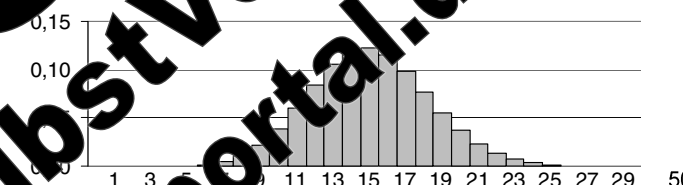
a) $P(X \leq 13) = F_{50;0,3}(\underline{\hspace{1cm}})$

$$= 0,3270$$



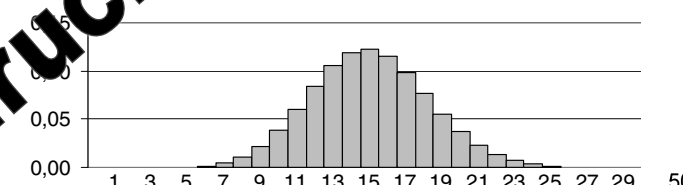
b) $P(X > 17) = 1 - (\underline{\hspace{1cm}})$

$$= F_{50;0,3}(17) = 0,78$$



c) $P(X \geq 20) = 1 - (\underline{\hspace{1cm}})$

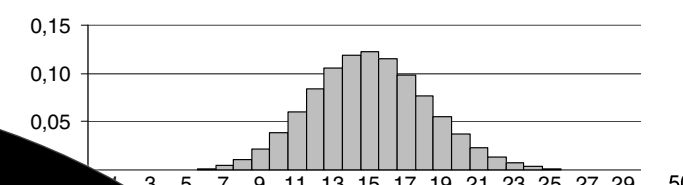
$$= F_{50;0,3}(19) = 0,478$$



d) $P(X \leq 9) + P(X \geq 20)$

$$= P(X \leq 9) + 1 - P(X \leq 19)$$

$$= F_{50;0,3}(9) + 1 - F_{50;0,3}(19)$$

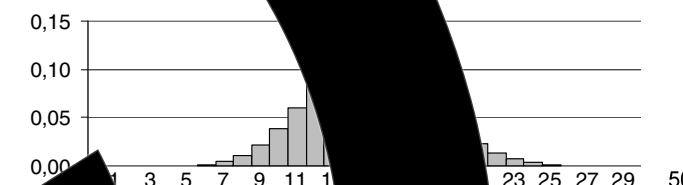
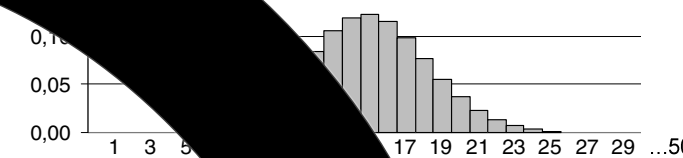


e) $P(11 < X < 18)$

$$= P(X \leq 17) - P(X \leq 11)$$

$$= F_{50;0,3}(17) - F_{50;0,3}(11)$$

$$= 0,9804$$



Aufgabe 9.4

Ermitteln von k bei der Binomialsammenfunktion

Anhand des folgenden Beispiels soll verdeutlicht werden, dass es auch Aufgabenstellungen gibt, bei denen k ermittelt werden muss. Verdeutlichen Sie sich dazu das folgende Beispiel.

Bei der Produktion von T-Shirts einer hochpreisigen Marke sind laut Produktionsleiter bei $p = 30\%$ eines umfangreichen Auftrags wegen eines Defekts an einer Naht pro T-Shirt Fehler an den Nähten aufgetreten. Es werden zur Überprüfung der Angabe des Produktionsleiters Stichproben von 50 T-Shirts in jeder Größe untersucht. Der Wert k zählt die T-Shirts mit einem Fehler.

- a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind höchstens 10, 15, 20 T-Shirts mit den Fehlern an der Naht in einer Stichprobe?

$$\begin{aligned} P(X \leq 10) &= F_{50; 0,3}(10) = 7,9\% \\ P(X \leq 15) &= F_{50; 0,3}(15) = 57\% \\ P(X \leq 20) &= F_{50; 0,3}(20) = 95\% \end{aligned}$$

In den Stichproben befinden sich mit einer Wahrscheinlichkeit von 7,9% bis zu 10, mit einer Wahrscheinlichkeit von 57% bis zu 15 und mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% bis zu 20 T-Shirts mit Fehler an der Naht. Wenn 30% der T-Shirts den Fehler aufweisen.

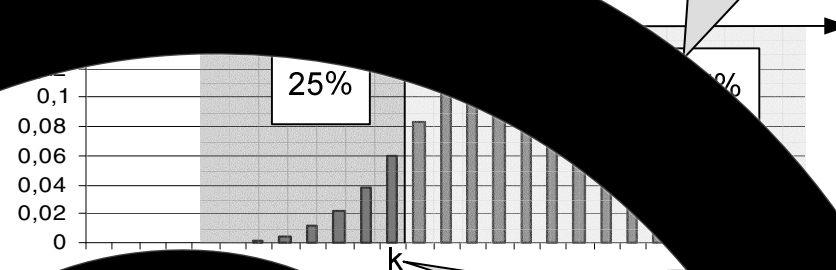
- b) In den Stichproben sollen sich mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 25 % bis zu k T-Shirts mit einem Defekt an der Naht befinden. Welche Werte kann k annehmen, wenn die Angaben des Produktionsleiters hinsichtlich der Fehlerrate stimmen?

Bei dieser Fragestellung ist k gesucht. Es werden neue Überlegungen notwendig.

Verdeutlichen Sie sich die Zusammenhänge anhand der folgenden Darstellungen:

Höchstens 25% der Werte für k sollen im linken Bereich der Verteilung liegen.

75% der Werte für k liegen dann im rechten Bereich der Verteilung.



Aus einer Tabelle, die die Verteilungsfunktion $F_{n;p}(k)$ enthält, ist zu ermitteln, für welchen Wert von k die Verteilungsfunktion $F_{50; 0,3}(k) \leq 0,25$ erfüllt ist. Die Tabelle zeigt, dass dies für $k=10$ der Fall ist, denn aus der Tabelle ergibt sich $F_{50; 0,3}(10) = 0,079$.

Der Wert k=10 teilt die Verteilung in zwei Bereiche.

In den Stichproben befinden sich mit einer Wahrscheinlichkeit von 22,29% bis zu 10 T-Shirts mit einem Defekt an der Naht, wenn die Angabe des Produktionsleiters stimmt.

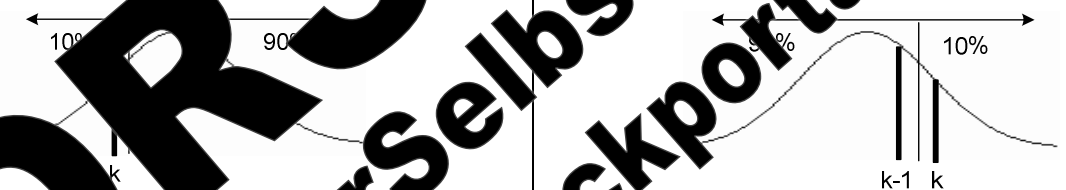
Aufgabe 9.5

Allgemeine Formulierung der Aufgabenstellung zur Bestimmung von k

In der Aufgabenstellung sind n, p und $P(X = k)$ gegeben. Gesucht ist der Wert von k. Zur Veranschaulichung der Rechnung wird in den folgenden Abbildungen ein Säulendiagramm ersatzweise eine einhüllende Kurve für das Säulendiagramm, die für die Rechnung relevanten Balken verwendet.

Die grundlegende Aufgabenstellung wird jeweils durch die folgenden Abbildungen verdeutlicht und anhand der Verteilung $B_{100; 0,5}(k)$ beispielhaft berechnet.

Bis zu welchem Wert von k gilt, dass die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq k)$ höchstens 10% ist? Ab welchem Wert von k gilt, dass die Wahrscheinlichkeit $P(X \geq k)$ höchstens 10% ist?



$$\begin{aligned} P(X \leq k) &\leq 0,1 \\ 1 - P(X \leq k-1) &\leq 0,1 \\ P(X \leq k-1) &\geq 0,9 \end{aligned}$$

$k = 43 \leftarrow$ aus der Tabelle

$$\begin{aligned} P(X \geq k) &\leq 0,1 \\ 1 - P(X \leq k-1) &\leq 0,1 \\ -P(X \leq k-1) &\leq -0,9 \\ P(X \leq k-1) &\geq 0,9 \\ F_{100; 0,5}(k-1) &\geq 0,9 \\ k-1 &= 56 \leftarrow \text{aus der Tabelle}^* \\ k &= 57 \end{aligned}$$

*Hinweis zum Ablesen aus einer entsprechenden Tabelle:

1. Tabelle F_{100} auswählen.
2. In der Spalte für die Wahrscheinlichkeit von oben nach unten durchgehen, bis man auf den ersten Wert trifft, der größer oder gleich der Wahrscheinlichkeit ist.
3. Der Wert in der Spalte k ist der Wert für k zuzuordnen ist.

9.2 Bestimmen Sie für die angegebenen Wahrscheinlichkeiten die Werte für k. Die Ergebnisse sind zur Kontrolle anzugeben. Raum für Rechnungen auf der folgenden Seite.

Vorgegebene Wahrscheinlichkeit	Ergebnis
a) $B_{100; 0,5}(k)$	$k = 1$
b) $B_{100; 0,5}(k)$	$k = 9$
c) $B_{100; 0,5}(k)$	$k = 20$
d) $B_{100; 0,5}(k)$	$k = 13$
e) $B_{100; 0,97}(k)$	$k = 95$
f) $B_{100; 0,97}(k)$	$k = 99$
g) $B_{100; 0,6}(k)$	$k = 60$
h) $B_{100; 0,6}(k)$	$k = 60$

Vorgegebene Wahrscheinlichkeit	Ergebnis
i) $B_{100; 0,5}(k)$	$k = 9$
j) $B_{100; 0,5}(k)$	$k = 25$
k) $B_{100; 0,8}(k)$	$k = 74$
l) $B_{100; 0,8}(k)$	$k = 86$
m) $B_{100; 0,5}(k)$	$k = 78$
n) $B_{100; 0,5}(k)$	$k = 88$

Aufgabe 9.6

Erwartungswert und Standardabweichung bei der Binomialverteilung

Zeigen Sie mit den in Kapitel 8 verwendeten Verfahren, dass sich für den Erwartungswert und die Standardabweichung bei den folgenden binomialverteilten Zufallsgrößen die angegebenen Werte berechnen lassen.

a) Die Zufallsvariable X ist $B_{5;0,4}(k)$ verteilt. Berechnen Sie den Erwartungswert μ und ergänzen Sie fehlende Angaben in der folgenden Tabelle. Berechnen Sie anschließend die Varianz $V(x)$ sowie die Standardabweichung σ .

$\mu = __\cdot 0,0778 + __\cdot 0,2592 + __\cdot 0,3456 + __\cdot 0,2304 + __\cdot 0,0768 + __\cdot 0,0102 = ______ \approx 2$

k	Wahrscheinlichkeit $P(X = k)$	Einfache Abweichung vom Erwartungswert	Quadratisierte Abweichung
0	0,0778	$0 - 2 =$	
1	0,2592	$1 - 2 =$	
2	0,3456		
3	0,2304		
4	0,0768		
5	0,0102		

$V(x) = __\cdot 0,0778 + __\cdot 0,2592 + __\cdot 0,3456 + __\cdot 0,2304 + __\cdot 0,0768 + __\cdot 0,0102 = ______ \approx 1,197$

$\sigma = ______ \approx 1,1$

b) Die Zufallsvariable Y ist $B_{3;0,8}(k)$ verteilt. Berechnen Sie wie in a).

$\mu = ______ \approx 2,4$

k	Wahrscheinlichkeit $P(X = k)$	Einfache Abweichung vom Erwartungswert	Quadratisierte Abweichung
0	0,0080	$0 - 2,4 =$	
1	0,0608	$1 - 2,4 =$	
2		$2 - 2,4 =$	
3		$3 - 2,4 =$	

$V(x) = ______ \approx 0,69$

Erwartungswert: _____

- c) Ermitteln Sie für die in Aufgabenteil a) und b) gegebenen Größen die folgenden Produkte, vergleichen Sie die Ergebnisse jeweils mit den berechneten Werten für μ und σ . Tragen Sie anschließend den Merksatz.

zu a) $n \cdot p =$ ____ und $\sqrt{n \cdot p \cdot q} =$ ____ zu b) $n \cdot p =$ ____ und $\sqrt{n \cdot p \cdot q} =$ ____

Für eine binomialverteilte Zufallsgröße

Berechnung des Erwartungswertes $\mu =$ ____

Berechnung der Standardabweichung $\sigma =$ ____

Aufgabe 9.7

Eigenschaften der Binomialverteilung

In den Abbildungen 9.1 bis 9.5 sind jeweils in geeigneter Ausschnitte der k-Achse die Säulendiagramme einer Binomialverteilung abgebildet. Betrachten Sie hinsichtlich des Erscheinungsbildes der Verteilungen die nachfolgenden Aufgabenstellungen.

- a) Untersuchen Sie, welche Auswirkungen die Werte von n und p auf das Erscheinungsbild der Verteilung haben. Welche Symmetrieeigenschaften, die Lage und Höhe des höchsten Balkens und der Breite der Verteilung haben Sie beobachtet?

Wie wird, desto symmetrischer ist das Erscheinungsbild der Verteilung, wenn man den höchsten Balken als Symmetrieachse verwendet.

- Je größer n wird, desto ____ wird die Höhe des höchsten Balkens.
- Je größer n wird, desto ____ wird die Breite der Verteilung.
- Wenn p größer wird, verschiebt sich die k-Achse nach ____.

- b) Berechnen Sie für die in den Abbildungen 9.1 bis 9.5 angegebenen Parameter n und p die Standardabweichung σ sowie jeweils die 2-fache und 3-fache Standardabweichung 2σ und 3σ . Tragen Sie die Werte an den vorgesehenen Stellen ein.

Überprüfen Sie, welche Beziehung zwischen dem Wert von μ und der Lage des höchsten Balkens der Verteilung besteht.

- d) Formulieren Sie einen Zusammenhang zwischen den Symmetrieeigenschaften der Verteilung und dem Wert von σ .

$B_{10; 0,1}(k)$

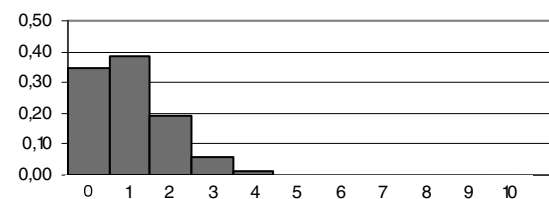


Abb. 9.1

$B_{10; 0,7}(k)$



Abb. 9.2

$B_{10; 0,9}(k)$



Abb. 9.3

$B_{20; 0,1}(k)$

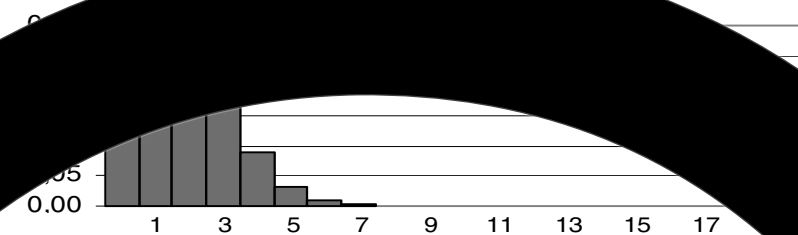


Abb. 9.4

$B_{20; 0,8}(k)$

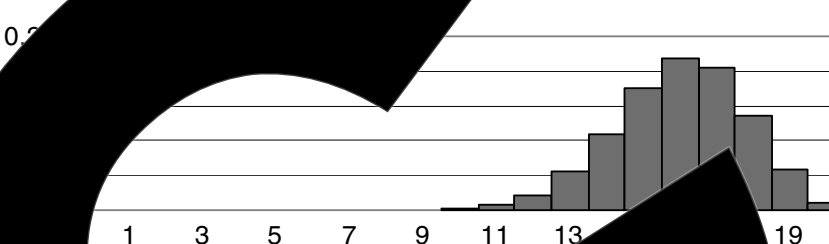


Abb. 9.5

$1\sigma =$ ____

$2\sigma =$ ____

$3\sigma =$ ____

$1\sigma =$ ____

$2\sigma =$ ____

$3\sigma =$ ____

$\mu =$ ____

$1\sigma =$ ____

$2\sigma =$ ____

$3\sigma =$ ____

$\mu =$ ____

$1\sigma =$ ____

$2\sigma =$ ____

$3\sigma =$ ____

$=$ ____

$=$ ____

$=$ ____

$B_{60; 0,2}(k)$

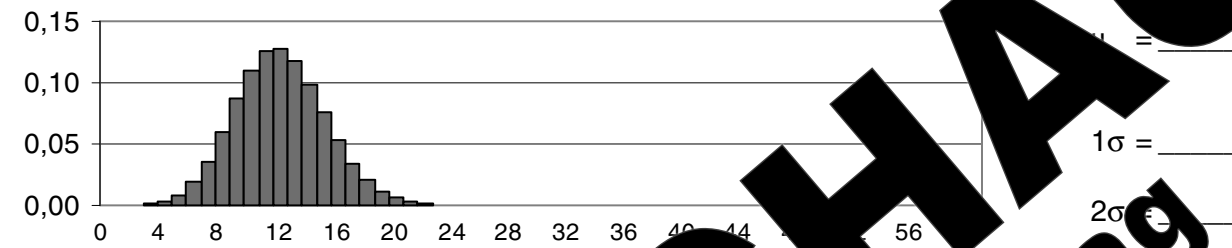


Abb. 9.6

$B_{100; 0,2}(k)$



Abb. 9.7

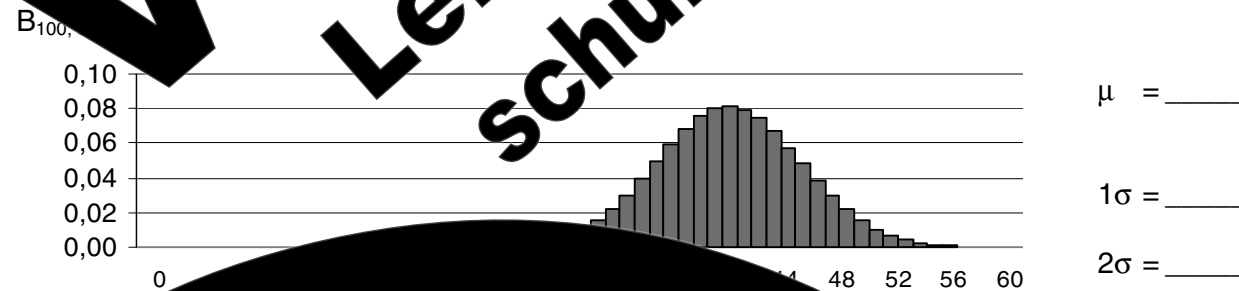


Abb. 9.8

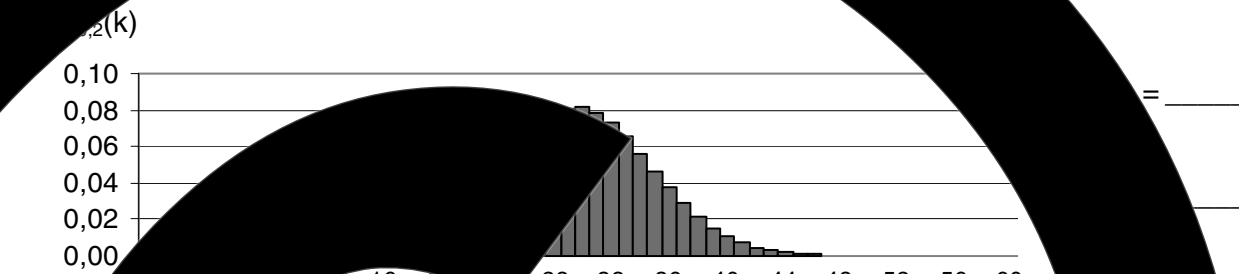


Abb. 9.9

Aufgabe 9.8

Die σ -Umgebungen bei der Binomialverteilung

Im Rahmen von Aufgabe 9.2 wurden im Beispiel 1 die Wahrscheinlichkeiten p ermittelt, in einer Stichprobe vom Umfang n eine bestimmte Anzahl k an fehlerhaften Gläsern zu erhalten. Würde man in der Praxis viele dieser Stichproben entnehmen, könnte man feststellen, dass die Anzahl k der Gläser mit Fehler in jeder der Stichprobe meistens nicht genau dem Erwartungswert μ für das Auftreten eines Fehlers entspricht, jedoch häufig in der Nähe des Erwartungswertes liegt. Fragestellungen zu Wahrscheinlichkeiten hinsichtlich der Abweichung des Wertes von k vom Erwartungswert in einer Stichprobe werden bei einer Binomialverteilung oft mit den sogenannten σ -Umgebungen untersucht. Daher soll in der folgenden Aufgabe der Begriff der σ -Umgebungen geklärt werden.

a) Graphische Darstellung der σ -Umgebungen

In der Abbildung ist die $B_{100; 0,6}(k)$ -Verteilung abgebildet. Innerhalb der Balken sind drei Bereiche markiert, die als 1σ , 2σ und 3σ -Umgebung in der Binomialverteilung bezeichnet werden. Da bei einer Binomialverteilung die Zufallsvariable nur ganzzahlige Werte annimmt, geht man bei der Ermittlung dieser Bereiche folgendermaßen vor:

Bei der Ermittlung der σ -Umgebungen wird unabhängig von der Dezimalstelle zum nächsten Balken in Richtung des Erwartungswertes gerundet.

Für die 1σ -Umgebung gilt:

Linke Grenze: $12 - 2,2 = 9,8$

Rechte Grenze: $12 + 2,2 = 14,2$

Damit liegt der Balken Nr. 10 in der 1σ -Umgebung

Damit liegt der Balken Nr. 14 in der 1σ -Umgebung

Für die 2σ -Umgebung gilt:

Linke Grenze: $12 - 4,4 = 7,6$

Rechte Grenze: $12 + 4,4 = 16,4$

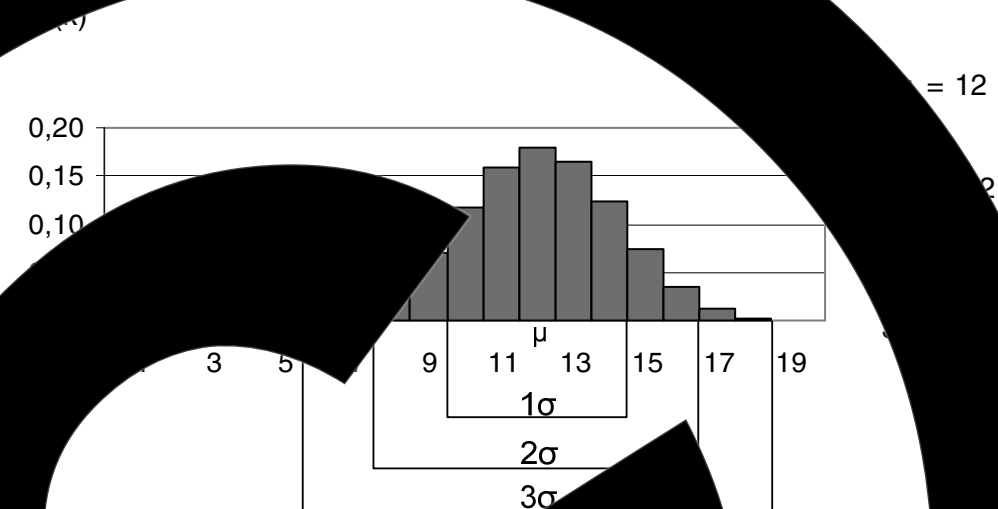
Damit liegt der Balken Nr. 8 in der 2σ -Umgebung

Damit liegt der Balken Nr. 16 in der 2σ -Umgebung

Für die 3σ -Umgebung gilt:

Damit liegt der Balken Nr. 6 in der 3σ -Umgebung

Damit liegt der Balken Nr. 18 in der 3σ -Umgebung



Literaturwerte zu den σ -Umgebungen

Sie haben in Aufgabe 9.7 festgestellt, dass die Symmetrieeigenschaft der Binomialverteilung von n und damit auch von σ abhängig ist. Je größer der Wert von n bzw. σ wird, desto besser ist die Verteilung bezüglich des höchsten Balkens. Die berechneten Wahrscheinlichkeiten für die σ -Umgebungen werden ebenfalls umso genauer, je größer der Wert von n ist.

Wenn der Wert von σ größer als drei ist, also $\sigma > 3$ gilt, ist die Laplace-Bedingung erfüllt, und es können mit guter Näherung die folgenden Werte verwendet werden:

Für eine binomialverteilte Zufallsvariable X ist die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} > 3$, die Laplace-Bedingung erfüllt, und es gelten die folgenden Regeln:

1 σ -Regel: $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 68,3\%$

2 σ -Regel: $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 95,4\%$

3 σ -Regel: $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = 99,7\%$

Raum für Notizen:



Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Stochastik

selbstorganisiert lernen



Kapitel 10

Zweiseitiger Signifikanztest



Einführung in die Stochastik

Kapitel 1

Grundbegriffe 7

Kapitel 2

Baumdiagramme und mehrstufige Zufallsversuche 13

Kapitel 3

Vierfeldertafel 23

Kapitel 4

Kombinatorische Abzählverfahren 35

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Kapitel 5

Einführung in den Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit 47

Kapitel 6

Definition der Wahrscheinlichkeitsverteilung 61

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Kapitel 7

Erwartungswert 63

Kapitel 8

Varianz und Standardabweichung 69

Kapitel 9

Normalverteilung 75

Hypothesentests

Kapitel 10

Zweiseitiger Signifikanztest 97

Kapitel 11

Einseitiger Signifikanztest – Fehler beim Testen 109

Kapitel 12

Vertrauensintervall 135

Die Betrachtungen zur Normalverteilung

Kapitel 14

Anwendung der Normalverteilung 149

Gesamtheit selbstorganisiert erlernen (Bestenfalls 278)

Stochastik

Alle Rechte vorbehalten. All rights reserved.

Druck, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet

LehrerselbstVerlag

LehrerselbstVerlag GmbH, Koblenz (Germany)

Lehrerselbstverlag.de

www.f-druck.de

Kapitel 10: Zweiseitiger Signifikanztest

Aufgabe 10.1

Grundidee des Testens

Grundsätzlich entspricht das Testen von Hypothesen der Erstellung einer Wahlprognose. Da man nicht alle Wahlberechtigten nach ihrer Stimmabgabe befragen kann, schränkt man sich bei den Umfragen auf eine mehr oder weniger zufällig ausgewählte Gruppe von Personen und schließt von deren Wahlverhalten auf den Ausgang einer Wahl. Grundsätzliches Vorgehensweise bei der Auswertung von solchen Erhebungen und auch Fehlern, die dabei eintreten können, sind Gegenstand der hier zu bearbeitenden Thematik.

Als einführendes Beispiel soll nun folgen, auf eine Einstellung bearbeitet werden

Aufgabenstellung:

Ein Geflügelzüchter stellt bei einem Muttertierenteilen eine Mischung aus S-Körnern und L-Körnern. Für eine bestimmte Mischung müssen 33% S-Körner in der Mischung vorhanden sein. Die Einhaltung dieser Vorgabe wird aufgrund einer zufällig entnommenen Stichprobe überprüft.

1. Entnahme der Stichprobe

Das zufällige Stichproben soll nun praktisch durch die Entnahme einer Stichprobe von jedem Schüler/ der Schüler aus einem Geflügel mit S-Körnern und L-Körnern simuliert werden. Zählen Sie alle entnommenen Körner, tragen Sie die Werte in **Ihre gezogene Stichprobe** in den folgenden Feldern ein und berechnen Sie Ihren Erwartungswert. (Sollten Sie den Zufallsversuch nicht durchgeführt haben, verwenden Sie folgende Werte: Umfang der Stichprobe: $n = 210$, Anzahl S-Körner: 85)

Prozentualer Anteil der S-Körner laut Hersteller: $p = 33\% = 0,33$

Stichprobenumfang n Ihrer Stichprobe: $n =$ _____

Anzahl der S-Körner in Ihrer Stichprobe: $k =$ _____

Berechnen Sie den Erwartungswert μ für die Anzahl der S-Körner in Ihrer Stichprobe (auf eine ganze Zahl gerundet) für den Sollwert von 33% S-Körnern.

Erwartungswert für die Anzahl der S-Körner $\mu =$ _____

c) Vergleichen Sie die Anzahl der S-Körner mit der Anzahl der S-Körner im Versuch gezogen. Was stellen Sie fest? Nach Ihre Mitschüler nach deren Ergebnissen. Was stellen Sie fest?

Anzahl der gezogenen S-Körner in einer Stichprobe stimmt in der Regel mit dem Erwartungswert für die Anzahl von S-Körnern überein, man zieht mehr oder weniger Körner als den Erwartungswert angibt. Wenn man Glück hat, müsste man genau den Erwartungswert erhalten, ab

welcher Abweichung der Stichprobe vom Erwartungswert μ die Lieferung reklamiert wird, wenn man davon ausgehen kann, dass die Vorgabe von $p = 33\%$ nicht eingehalten wurde und das Zuchtergebnis gefährdet wird. Entscheiden Sie nun intuitiv, ob Sie auf Ihrer Stichprobe die Lieferung beanstanden würden.

Als Geflügelzüchter würde ich die Stichprobe beanstanden bzw. reklamieren ☐ oder Nein ☐

2. Anwenden der Binomialverteilung für die Beurteilung Ihrer Stichprobe

Eine Hilfe für die Beurteilung Ihrer Stichprobe und die Entscheidung, ob man hier im Falle des Geflügelzüchters die Lieferung reklamieren würde oder nicht liefert, ist die Anwendung von Eigenschaften der Binomialverteilung auf Ihre Stichprobe. Die Prinzipielle Vorgehensweise wird nun zurück anhand der Abbildung unten erläutert.

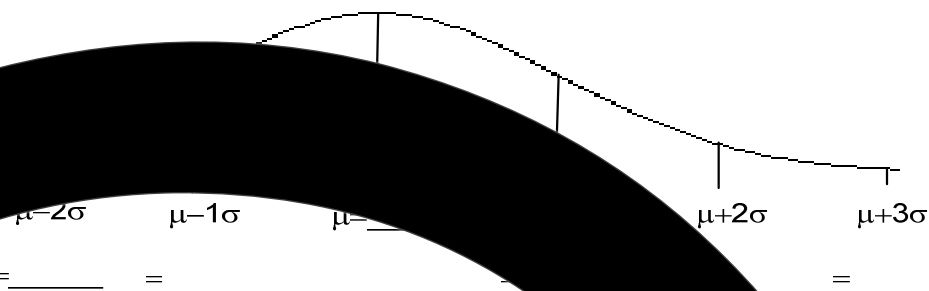
- Stellen Sie die Werte Ihrer Stichprobe in Form $B_{n,p}(k)$ dar: $B_{\text{---},\text{---}}(\text{---})$
- Berechnen Sie für Ihre Stichprobe die einfache, zweifache und dreifache Standardabweichung:

Einfache Standardabweichung $1\sigma = \text{---}$

Zweifache Standardabweichung $2\sigma = \text{---}$

Dreifache Standardabweichung $3\sigma = \text{---}$

- Tragen Sie in der Abbildung die Hüllkurve für eine idealisierte Binomialverteilung und nur die Balkenstränge, welche die 1σ -, 2σ - bzw. 3σ -Umgebung begrenzen. Berechnen Sie für Ihre Stichprobe aus den oben ermittelten Werten die **ganzzahligen** Werte für diese Grenzen, und tragen Sie die Zahlenwerte in der Abbildung ein.



- Markieren Sie, farblich abhebbend, mit einem weiteren senkrechten Balken diejenige Stelle der Verteilung der Wahrscheinlichkeiten, die am nächsten am Erwartungswert liegt, und ergänzen Sie den folgenden Text:

Die Anzahl der S-Körner in einer Stichprobe liegt

- ☐ innerhalb des Bereichs mit sehr nahe am Erwartungswert.
- ☐ innerhalb des 1σ -Bereichs.
- ☐ innerhalb des 2σ -Bereichs.
- ☐ innerhalb des 3σ -Bereichs.

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Mischung mit 33% S-Körnern eine Stichprobe zufällig in diesen Bereich fällt, ist gleich / kleiner / größer als ____%.

- Entscheiden Sie nun erneut, ob Sie die Lieferung reklamieren würden. Begründen dies.

Beanstanden der Lieferung: Ja ☐ oder Nein ☐

Begründung: _____

Zusammenfassung und Verneinung

Ob Sie die Lieferung in diesem Beispiel aufgrund Ihrer Stichprobe annehmen oder beanstanden würden, hängt also davon ab, in welchen Bereich der Binomialverteilung der Wert für die Anzahl der S-Körner fällt. Je näher die Anzahl der S-Körner in der Stichprobe am Erwartungswert liegt, desto eher wird man davon ausgehen, dass die Forderung für eine 33%-Mischung erfüllt ist. Je weiter die Anzahl der S-Körner von der Stichprobe vom Erwartungswert entfernt liegt, desto eher wird man von einem falschen Mischungsgehalt ausgehen und die Lieferung beanstanden. Betrachtet man bei diesem Versuch eine Vielzahl von Stichproben, so wird deutlich, dass fast alle Schüler und Schülerinnen Stichproben entnommen haben, die innerhalb der zu der Stichprobe gehörenden 3σ -Umgebung liegen. Durch Zufall befinden sich jedoch auch Stichproben vorhanden, die eine große Abweichung vom Erwartungswert aufweisen und außerhalb dieser 3σ -Umgebung liegen. Aufgrund der Stichprobe würde man dann davon ausgehen, dass die geforderte 33%-Mischung nicht eingehalten wurde, obwohl in der Mischung wirklich 33% S-Körner vorhanden sind. Würde man in diesem Fall eine Lieferung beanstanden, so begeht man einen Irrtum und handelt sich ggf. Ärger mit dem Lieferanten ein, wenn dieser nachweisen kann, dass seine Lieferung in Ordnung ist. Die Wahrscheinlichkeit, genau diesen Fehler zu machen, bezeichnet man als **Irrtumsrisiko**.

Bestimmung des Irrtumsrisikos in Abhängigkeit vom Stichprobenumfang

Als Grundlage für die Betrachtungen des Irrtumsrisikos soll weiterhin der Versuch aus Aufgabe 10.1 dienen. Allerdings werden nun einheitlich die folgenden Werte für die entnommene Stichprobe zugrunde gelegt:

Wahrscheinlichkeit $p = 0,33$

Anzahl der Stichproben $n = 231$

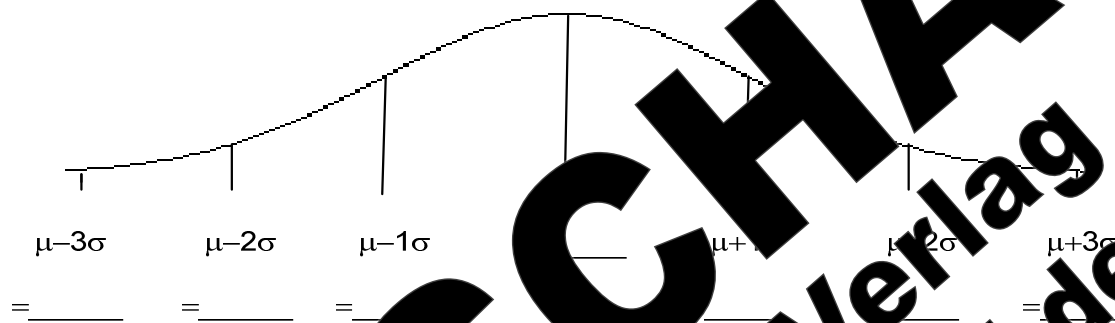
Erwartungswert für S-Körner: $\mu = np = 231 \cdot 0,33 \approx 76$

Einfache Standardabweichung: $1\sigma \approx 7,14$

Zweifache Standardabweichung $2\sigma \approx 14,28$

Dreifache Standardabweichung $3\sigma \approx 21,42$

- a) Tragen Sie die Grenzen für die jeweiligen σ -Umgebungen als **ganzzahlige** Werte in der folgenden Graphik ein. Achten Sie darauf, dass man bei der Bestimmung der σ -Umgebungen immer 7 Erwartungswert hin rundet. (Vgl. Kapitel 9 Aufg. 9.8)



- b) Es werden von 8 verschiedenen Personen zufällig Stichproben entnommen. Für die Anzahl der S-Körner ergeben sich folgende Werte.

Person 1	Person 2	Person 3	Person 4	Person 5	Person 6	Person 7	Person 8
59	71	65	93	98	54	89	

Markieren Sie die Grenzen für die erhaltene Anzahl an S-Körnern bei den 6 Stichproben in der Abbildung oben mithilfe von vertikalen senkrechten Balken und ergänzen Sie:

Die Stichproben der Personen _____ liegen mit _____ S-Körnern innerhalb der 1 σ -Umgebung.

Die Stichproben der Personen _____ liegen mit _____ S-Körnern innerhalb der 2 σ -Umgebung.

Die Stichproben der Personen _____ liegen mit _____ S-Körnern innerhalb der 3 σ -Umgebung.

Die Stichproben der Personen _____ liegen mit _____ S-Körnern außerhalb der 3 σ -Umgebung.

Basierend auf dem Testergebnis muss nun jede Person mithilfe der Stichprobe entscheiden, ob man davon ausgehen kann, dass die Lieferung in Ordnung und angenommen werden sollte, oder ob man davon ausgehen muss, dass das Mischgut nicht in Ordnung ist, weil die Stichprobenerwartungswert abweicht. Eine Entscheidung wird hier mithilfe der σ -Umgebungen und der sogenannten **Annahme-** und **Ablehnungsbereiche** für eine Stichprobe gemacht. Die σ -Umgebungen als Grundlage für die Entscheidung, so ergeben sich die Bereiche für die Ermittlung dieser Annahme- und Ablehnungsbereiche.

- c) Betrachtung der 3 σ -Umgebung

Bei einer Binomialverteilung liegen mehr als 99% aller zufällig entnommenen Stichproben im **3 σ -Bereich**, d.h. in weniger als 1% der Fälle liegen Stichprobenergebnisse außerhalb dieses Bereiches. Es ist üblich, diese große Abweichung vom Erwartungswert als **signifikante Abweichung** zu bezeichnen.

Werte innerhalb des 3 σ -Bereichs geben den **Annahmehereich** für die Stichprobe an. Werte außerhalb des 3 σ -Bereichs geben den **Ablehnungsbereich** für die Stichprobe an.

Die Grenzwerte, ab denen der Ablehnungsbereich beginnt, sind:
links = _____ rechts = _____

Die Stichproben mit den Werten _____ liegen hier im **Annahmehereich** für die Lieferung und hier angenommen.

Die Stichproben mit den Werten _____ liegen im **Ablehnungsbereich** der 3 σ -Umgebung und man wird sich hier mit der Entscheidung, die Lieferung zu reklamieren.

Bei einem **Wartumsrisiko** für eine unberechtigte Ablehnung bzw. Reklamation gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass eine Stichprobe zufällig außerhalb der 3 σ -Umgebung liegt, und hat hier den sehr kleinen Wert von _____. man hat ein sehr kleines Risiko, sich wegen einer unberechtigten Reklamation mit dem Lieferanten Ärger einzuhandeln, gegenüber bei der Annahme der Lieferung ein relativ großes Risiko ein, dass die Lieferung nicht stimmt und sich die Tiere nicht gut entwickeln.

- d) Betrachtung der 2 σ -Umgebung

Bei einer Binomialverteilung liegt die Wahrscheinlichkeit, dass eine Stichprobe in den **2 σ -Bereich** fällt, bei 95%, d.h. 5% aller Stichproben liegen durch Zufall nicht in diesem Bereich. Es ist üblich, diese rechtliche Abweichung vom Erwartungswert als **signifikante Abweichung** zu bezeichnen.

Werte außerhalb des 2 σ -Bereichs geben den **Ablehnungsbereich** für die Stichprobe an.

Die Grenzwerte, ab denen der Ablehnungsbereich beginnt, sind:

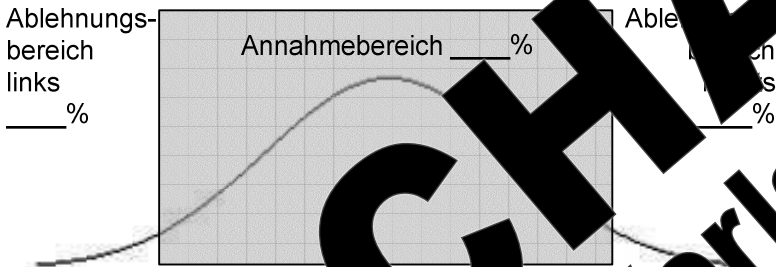
links = _____ $\leq X \leq$ _____ rechts = _____

Die Stichproben mit den Werten _____ liegen im **Annahmehereich**, und die Lieferung wird angenommen.

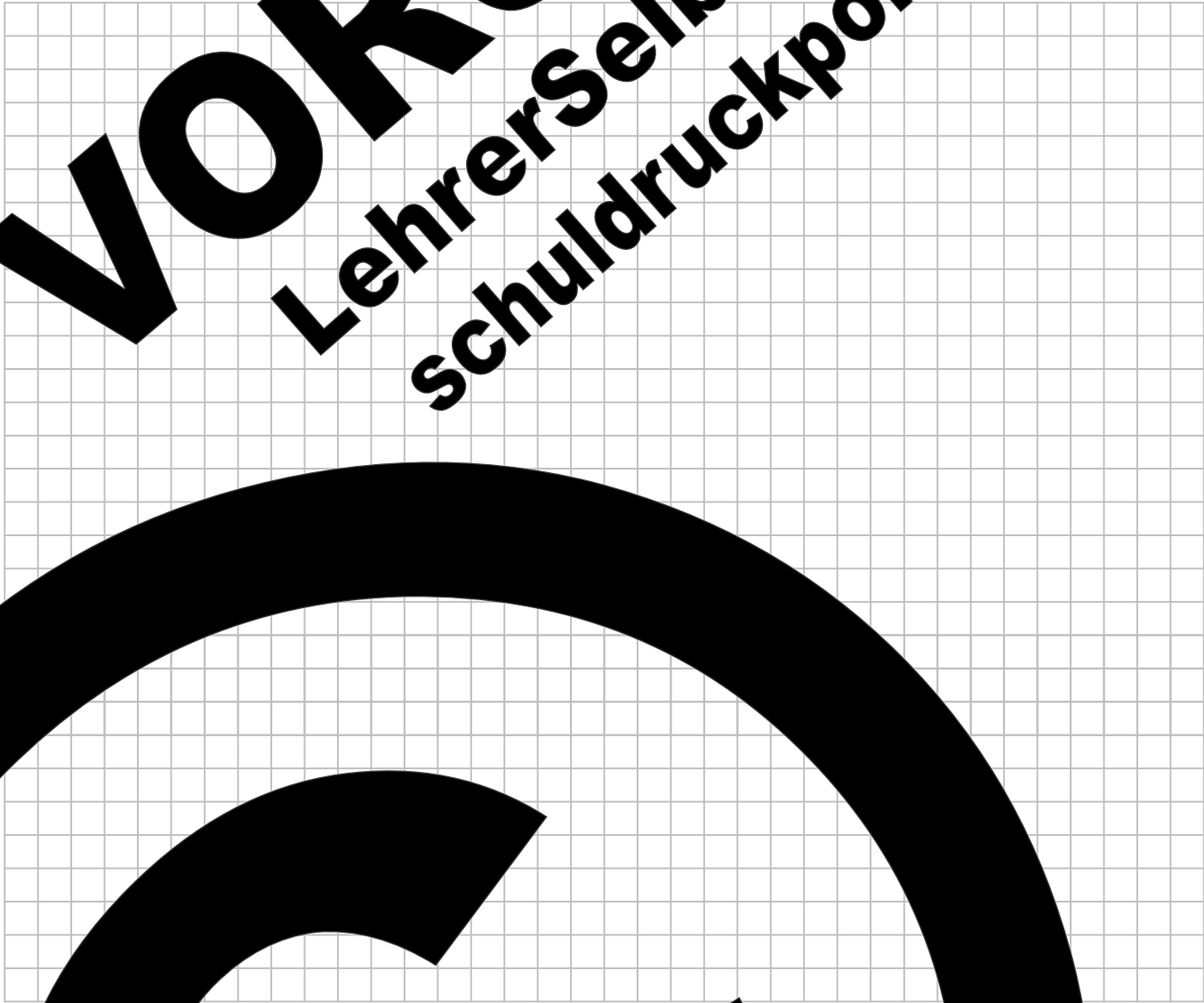
Die Stichproben mit den Werten _____ liegen im **Ablehnungsbereich**, und die Lieferung wird nicht angenommen.

Das **Wartumsrisiko** für eine unberechtigte Ablehnung bzw. Reklamation gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass eine Stichprobe zufällig außerhalb der 2 σ -Umgebung liegt, und hat den Wert von _____. D.h., man hat ein relativ kleines Risiko, sich wegen einer unberechtigten Reklamation mit dem Lieferanten Ärger einzuhandeln.

Lösungsweg für ein Irrtumsrisiko von 16%



Rechnung:



(Kontrollergebnis: $A = \{37, \dots, 40\}$)

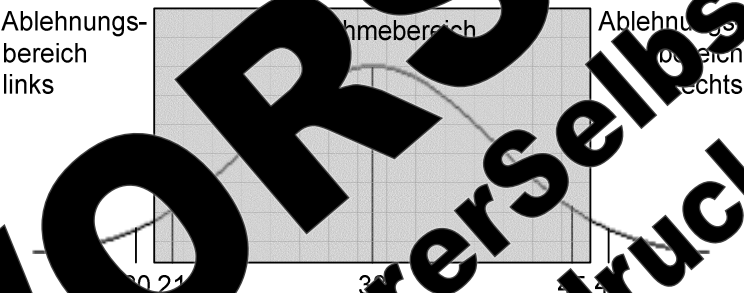
Aufgabe 10.4

Irrtumsrisiko bei vorgegebenem Wert für k berechnen

Bei dem Körnerversuch aus Aufgabe 10.1 ($p = \frac{1}{3}$) wird festgelegt, dass eine Körnerlieferung reklamiert, wenn sich in einer Stichprobe von 100 Körnern weniger als 20 oder mehr als 45 S-Körner befinden. Es soll das Irrtumsrisiko, mit dem dieser Test arbeitet, ermittelt werden. Zur Veranschaulichung des Annahme- und Ablehnungsbereichs ist neben einer Binomialverteilung, mit einzelnen Säulen vereinfacht, die Hüllkurve, in der Tabelle für die Aufgabe relevanten Balken eingetragen werden, veranschaulicht.

a) Verdeutlichen Sie sich den Lösungsweg anhand des folgenden Beispiels.

Visualisieren der Annahme- und Ablehnungsbereiche: Rechnung:



$$\alpha = P(x \leq 20) + P(x \geq 46)$$

$$\alpha = P(x \leq 20) + 1 - P(x \leq 45)$$

$$\alpha = F_{100; \frac{1}{3}}(20) + 1 - F_{100; \frac{1}{3}}(45)$$

$$\alpha = \dots + 1 - \dots = \dots$$

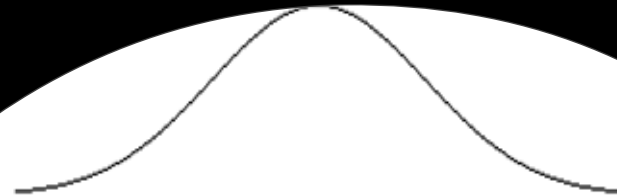
$$\alpha = 0,81\%$$

Annahmebereich $A = \{ \dots \}$

Der Test arbeitet mit einem Irrtumsrisiko von ____%

b) Bestimmen Sie das Irrtumsrisiko, wenn die Lieferung für weniger als 20 und mehr als 46 S-Körner in der Stichprobe abgelehnt wird. (Kontrollergebnis: $\alpha = 1,48\%$)

Visualisieren der Annahme- und Ablehnungsbereiche: Rechnung:



$$\alpha = P(x \leq 20) + P(x \geq 46)$$

$$\alpha = P(x \leq 20) + 1 - P(x \leq 45)$$

$$\alpha = F_{100; \frac{1}{3}}(20) + 1 - F_{100; \frac{1}{3}}(45)$$

$$\alpha = \dots + 1 - \dots = \dots$$

Der Test arbeitet mit einem Irrtumsrisiko von ____%

Übungen 10.1

Ü10.1 Die Freie Wählergemeinschaft FWG in Zufallsstadt hatte bei der letzten Kommunalwahl 20% der Stimmen erhalten. Um herauszufinden, ob sich der Stimmenanteil geändert hat, wird rechtzeitig vor der kommenden Kommunalwahl eine Umfrage unter den Wählern durchgeführt. Da die Umfrage durch Zufall ein Ergebnis liefern kann, das zu falschen Rückschlüssen auf den momentanen Stimmenanteil ziehen könnte, wird bei der Auswertung das Irrtumsrisiko berücksichtigt.

- a) Bei der Umfrage werden 400 Personen befragt, und das Irrtumsrisiko soll weniger als 5% betragen. Bestimmen Sie den Annahme- und Ablehnungsbereich bei diesem Test, veranschaulichen Sie die Bereiche anhand einer Graphik und beurteilen Sie, ob man bei dieser Umfrage von einem unveränderten Stimmenanteil ausgehen kann, wenn 160 Personen angeben, die FWG wählen wollen.
- b) Der Parteivorstand legt fest, dass nur 100 Personen befragt werden sollen und dass man nur dann, wenn weniger als 30 Personen angeben die FWG nicht zu wählen, von einem veränderten Stimmenanteil ausgehen wird. Veranschaulichen Sie die Aufgabenstellung anhand einer Graphik und berechnen Sie, mit welchem Irrtumsrisiko der Test arbeitet.
- c) Der Parteivorstand legt das Irrtumsrisiko bei einer Umfrage unter 100 Personen auf einen Wert von 5% fest. Veranschaulichen Sie die Aufgabenstellung anhand einer Graphik und ermitteln Sie den Annahmebereich für diese Stichprobe, wenn der Stimmenanteil nach wie vor bei 20% liegt.

de Übungen: _____

Raum für Notizen



Oberstudienrätin Ursula Pirkl

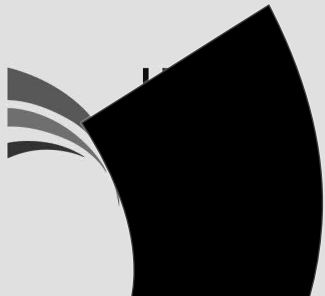
Stochastik

selbstorganisiert lernen



Kapitel 10

Signifikanztest –
Zweiseitiger Test
oder beim Testen



Einführung in die Stochastik

Kapitel 1

Grundbegriffe 7

Kapitel 2

Baumdiagramme und mehrstufige Zufallsversuche 13

Kapitel 3

Vierfeldertafel 23

Kapitel 4

Kombinatorische Abzählverfahren 35

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Kapitel 5

Einführung in den Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit 47

Kapitel 6

Definition der Wahrscheinlichkeitsverteilung 61

Wahrscheinlichkeitsverteilung

Kapitel 7

Erwartungswert 63

Kapitel 8

Variation und Standardabweichung 69

Kapitel 9

Normalverteilung 75

Hypothesentests

Kapitel 10

Zweiseitiger Signifikanztest 97

Kapitel 11

Einseitiger Signifikanztest – Fehler beim Testen 109

Kapitel 12

Vertrauensintervall 135

Statistische Betrachtungen zur Normalverteilung

Kapitel 14

Anwendung der Normalverteilung 149

Gesamtheit selbstorganisiert erlernen (Bestenfalls 278)

Copyright vorbehalten. All rights reserved.

Druck, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,

aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet

SelbstVerlag

tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germany)

Lehrerselbstverlag.de

www.f-druck.de

Kapitel 11: Einseitiger Signifikanztest – Fehler beim Testen

Nachdem Sie sich in Kapitel 10 anhand von zweiseitigen Tests schon mit dem Erkennen von Zusammenhängen beim Testen von Hypothesen beschäftigt haben, erfolgen in diesem Kapitel anhand von sogenannten **einseitigen** Tests weitergehende Betrachtungen vor allem hinsichtlich der Fehler, die bei der Beurteilung einer Stichprobe auftreten können.

Aufgabe 11.1

Aufgabenstellung

Ein Forschungslabor hat zur Behandlung einer seltenen, jedoch meist tödlich verlaufenden Krankheit eine verbesserte Therapie entwickelt. Während die alte Therapie in maximal 20% der Fälle eine Heilung ermöglichte, wird aufgrund erster Versuche vermutet, dass die neue Therapie nun eine Heilung bei mehr als 20% der Erkrankten erzielt. Man geht davon aus, dass nun mindestens 40% der Erkrankten geheilt werden können. Es stehen für eine kleine Gruppe von 20 Patienten zur Verfügung, an denen die Wirksamkeit der neuen Therapie getestet werden kann. Der Geschäftsführer der Forschungseinrichtung ist derart begeistert, dass er die Forschungsergebnisse kurzfristig als Innovation auf einer Ärztetagung veröffentlichen und das Recht an einer Pharmakonzession verkaufen will, wenn **mindestens 8** Personen in dieser Gruppe geheilt werden. Beurteilen Sie, ob die Entscheidungsregel des Geschäftsführers sinnvoll ist.

1. Schritt: Formulieren von Hypothesen und Zuordnen der Werte aus der Aufgabenstellung

Es werden im Kontext der Aufgabenstellung zwei sich gegenseitig ausschließende Hypothesen formuliert.

- Die **Nullhypothese** H_0 bezieht sich **meist** auf einen **gesicherten** Wert. Hier nimmt man an, dass die neue Therapie genauso hilft wie die alte Therapie und in 20% der Fälle heilt.
- Die **Alternativhypothese** H_1 bezieht sich hier auf die ungesicherte Annahme, dass die neue Therapie besser wirkt. Man nimmt hier 40% an.

	Nullhypothese H_0			Alternativhypothese H_1		
	Die neue Therapie wirkt wie die alte Therapie.			Die neue Therapie ist besser.		
Parameter und zuordnen der Zahlenwerte	$n = 20$	$p_0 = 0,2$	$\mu_0 = 4$	$n = 20$	$p_1 = 0,4$	$\mu_1 \geq 8$

Die Verteilungswerte des Testwegs Hypothese mit der kleineren Wahrscheinlichkeit p in der linken Spalte der Tabelle zu notieren. Da in dieser Angabe p_0 kleiner als p_1 ist, wird demnach p_0 hier in der linken Spalte notiert. (Begründung wird in Schritt 2 deutlich.)

Anmerkung: Die Verteilungswerte des Testwegs Hypothese mit der größeren Wahrscheinlichkeit p liegt, wie in Schritt 1 deutlich wird, weiter rechts in der Aufgabenstellung ist p_1 größer als p_0 , also liegt H_1 rechts von H_0 in der rechten Spalte notiert.

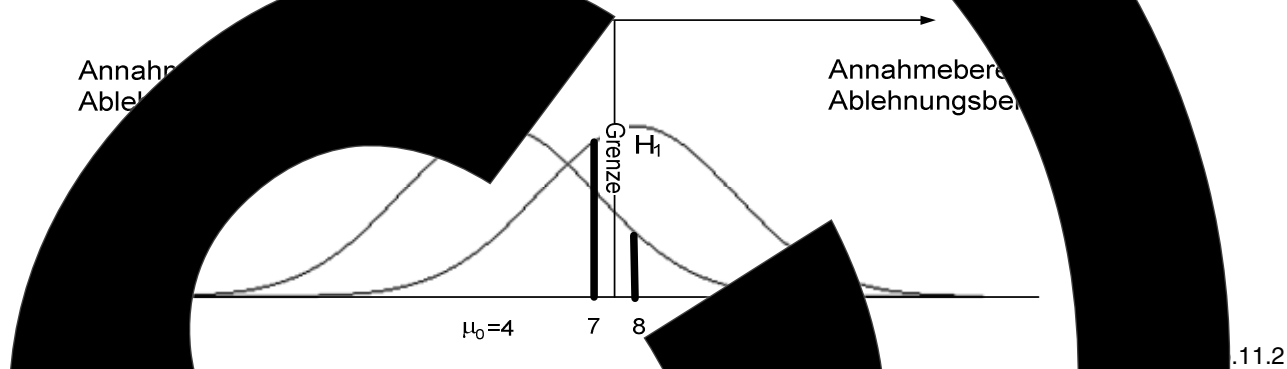
2. Schritt: Festlegen und Visualisieren des Annahme- und Ablehnungsbereichs

Für die folgenden Betrachtungen wird hinsichtlich der Visualisierung für die Annahme der Alternativhypothese H_1 der in der Aufgabenstellung angegebene Wert $p_{\text{Fehl}} = 0,05$ verwendet. Färben Sie in der Abbildung alle Balken, welche zur Verteilung von H_0 gehören und alle Balken, welche zur Verteilung von H_1 gehören mit zwei verschiedenen Farben. Zu Zwecks der Übersichtlichkeit werden die Balken jeweils mit einem Zwischenabstand dargestellt.



Begründen Sie, warum der Bereich $k \leq 7$ als Ablehnungsbereich für H_1 und der Bereich $k \geq 8$ als Ablehnungsbereich für H_0 bezeichnet wird.

Wenn es notwendig ist, detaillierte Balkendiagramme wie in Abb. 11.1 zu zeichnen, visualisiert man die Verteilungen, entsprechend zu den Überlegungen beim zweiseitigen Test und der Hüllenkurven von idealisierten Binomialverteilungen. Hier werden, wie in Abb. 11.2, nur die beiden Balken der Entscheidungsgränze eingetragen.



3. Schritt: Betrachtung von Fehlentscheidungen

Für welche der beiden Hypothesen man sich in der Praxis nun entscheidet, hängt vom Ergebnis der Stichprobe ab. Wie Sie im Körnerversuch in den Aufgaben 10.1 und 10.2 gesehen haben, kann eine Stichprobe durchaus ein Ergebnis liefern, das zu einer falschen Entscheidung führt. Wir haben hier gesehen, dass es Stichproben gab, die den Schluss zogen, es habe sich in dem Glas keine 33% S-Körner befinden, obwohl das Mischungsverhältnis tatsächlich bei 33% liegt. Dies führt beim Körnerversuch zu der Fehlentscheidung, die Lieferung unbefriedigend zu beurteilen und zu reklamieren. Verdeutlichen Sie sich anhand der folgenden Tabelle die Begriffe der Fehlerscheidungen hinsichtlich der hier beschriebenen Testsituation. Welche Konsequenzen hat eine Fehlerscheidung?

In dieser Spalte steht man davon aus, dass die Nullhypothese zutrifft.		In dieser Spalte steht man davon aus, dass die Hypothese H_1 in Wirklichkeit zutrifft.	
Folgen des Fehlers: Obwohl die neue Therapie nicht besser als die alte ist, wird aufgrund der Stichprobe irrtümlich angenommen, dass die neue Therapie besser ist.		Folgen des Fehlers: Obwohl die neue Therapie besser als die alte ist, wird aufgrund der Stichprobe irrtümlich angenommen, dass die neue Therapie nicht besser ist.	
Konsequenz der Fehlentscheidung: Blamage durch die Veröffentlichung eines nicht zutreffenden Forschungsergebnisses. (Wird in Wissenschaft und Forschung als schlimmer Fehler angesehen.)		Konsequenz der Fehlentscheidung: Die Erkrankten erhalten kein besseres Medikament, bzw. es wird ggf. unnötigerweise Geld für weitere Forschung ausgegeben.	

Wie man sich bei einer Stichprobe zwei unterschiedliche Hypothesentest daher zwischen dem Fehler 1. Art und dem Fehler 2. Art entscheiden muss, ist festgelegt.

Die Reihenfolge zu den beiden Hypothesen ist festgelegt. Die Regel wie folgt vorgenommen:

α -Fehler: – Man ordnet der Nullhypothese H_0 den α -Fehler zu.
– Der α -Fehler ist im Allgemeinen der Fehler, welcher die Entscheidung, die den Test durchführt, auftrifft, die gravierenden Folgen hat.
– Der α -Fehler ist, sollte die Entscheidung möglichst klein und nicht zu groß sein.

β -Fehler: – Man ordnet der Alternativhypothese H_1 den β -Fehler zu.
– Der β -Fehler ist im Allgemeinen der Fehler, der als weniger gravierend angesehen wird. Der β -Fehler sollte in der Regel nicht kleiner als der α -Fehler sein, da die Konsequenzen dieses Fehlers ebenfalls nicht unerheblich, sondern so gestaltet werden, dass auch dieser Fehler möglichst klein wird.

Beide Fehler können nun, um der Aufgabenstellung eine übersichtliche Struktur zu geben, in Verbindung mit den Werten für die Entscheidungsgrenze ebenfalls tabellarisch dargestellt werden:

In dieser Spalte der Tabelle geht man davon aus, dass die Nullhypothese H_0 zutrifft und das neue Medikament nicht besser ist. Befinden sich in der Stichprobe weniger als 8 geheilte Patienten, spricht das für die Gültigkeit der Nullhypothese H_0 und man entscheidet sich zu Recht für H_0 . Erhält man jedoch durch Zufall eine Stichprobe mit vielen geheilten Personen, entscheidet man sich zu Unrecht gegen die Nullhypothese und begeht mit dem α -Fehler.

In dieser Spalte der Tabelle geht man davon aus, dass die Nullhypothese H_0 zutrifft und das neue Medikament nicht besser ist. Befinden sich in der Stichprobe mindestens 8 geheilte Patienten, spricht das für die Gültigkeit der Nullhypothese H_0 und man entscheidet sich zu Recht für H_0 . Erhält man jedoch durch Zufall eine Stichprobe mit wenigen geheilten Personen, begeht man den β -Fehler, da man sich zu Unrecht gegen die Alternativhypothese entscheidet.

Ausgang des Zufallsversuchs

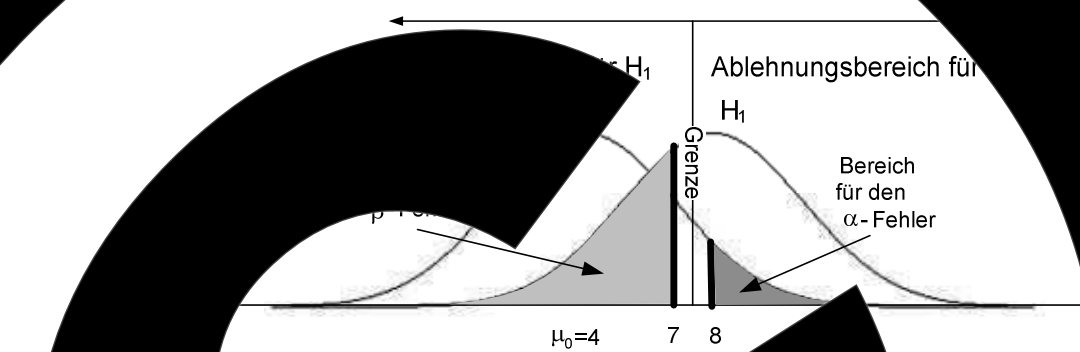
$k \leq 7$	richtige Entscheidung	β -Fehler
$k \geq 8$	α -Fehler	richtige Entscheidung

4. Schritt: Visualisieren und Berechnen des α - und β -Fehlers

Der α -Fehler gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass der Wert von k in der Stichprobe in den Ablehnungsbereich von H_0 fällt. Bei der Aufgabe betrifft das alle Balken der Verteilung von H_0 , welche rechts von der Entscheidungsgrenze liegen (vgl. Abb. 11.1).

Der β -Fehler gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass der Wert von k in der Stichprobe in den Ablehnungsbereich von H_0 fällt, obwohl die Nullhypothese H_0 zutrifft. Bei der Aufgabe betrifft das alle Balken der Verteilung von H_1 , welche links von der Entscheidungsgrenze liegen (vgl. Abb. 11.2).

Um die Fehler zu berechnen, ist es hilfreich, die Verteilungen zu visualisieren. Man kann dazu die Abbildungen 11.1 bzw. 11.2 zugrundelegen, und die Fehler entsprechend der Entscheidungsgrenze markieren.



Aus Abb.11.3 kann man nun die Ansätze für die Berechnung der beiden Fehler entnehmen. Berechnen Sie die beiden Fehler, indem Sie die entsprechenden Felder in der Tabelle unten ergänzen. Für die Wahrscheinlichkeit der Alternativhypothese H_1 wird der Wert $p_1 = 0,2$ verwendet (vgl. Aufgabenstellung)

Berechnung der Fehler	Berechnung des α -Fehlers unter Verwendung der Verteilung von H_0	Berechnung des β -Fehlers unter Verwendung der Verteilung von H_1
	$\alpha = P(X \geq \text{---})$ $\alpha = 1 - P(X \leq \text{---})$ $\alpha = 1 - F_{20;0,2}(\text{---})$ Verteilung von H_0	$\beta = P(X \leq \text{---})$ $\beta = F_{20;0,2}(\text{---})$ Verteilung von H_1
	$\alpha = \text{---}$	$\beta = \text{---}$
	$\alpha = \text{---}$	$\beta = 42\%$
	$\alpha = 3,2\%$	

5. Schritt: Formulieren der Antwort

Aufgrund der Entscheidungsgrenze des Geschäftsführers ist nur ein sehr kleiner α -Fehler von 3,2% auf. Damit ist die Wahrscheinlichkeit, sich durch die Veröffentlichung eines falschen Forschungsergebnisses in der Öffentlichkeit zu blamieren, gering. Allerdings ist der β -Fehler mit fast 42% sehr groß.

Aufgabe 11.2

Berechnen Sie, warum man bei gleichem Stichprobenumfang den β -Fehler von Aufgabe 11.1 nur verkleinern kann, wenn man einen größeren α -Fehler zulässt.

Auf der folgenden Seite ist eine Tabelle abgebildet, die die in Aufgabe 11.1 dargestellten Teiltabellen zusammensetzt. Um die Vorgehensweise bei der Berechnung des Tests zusammenzufassen und zu vertiefen, soll diese Tabelle auf Grundlage der Aufgabenstellung für einen Stichprobenumfang von **50 Personen** ausgefüllt werden. Der Geschäftsführer legt hier fest, dass man von einer verbesserten Therapie ausgehen will, wenn mindestens 15 Personen geheilt werden. Orientieren Sie sich an der modifizierten Aufgabensituation und den vorgegebenen Lösungsschritten und führen Sie die Schritte 1 bis 4 der Aufgabenstellung durch.

Schritt 1: Formulieren Sie die Hypothesen, ermitteln Sie jeweils die Werte für μ_0 und μ_1 .
Schritt 2: Zeichnen Sie die beiden Verteilungen mit H_0 und H_1 und zeichnen Sie die Grenze sowie die zugehörigen Balken für die Entscheidungsregel an geeigneten Stellen in der Abbildung ein.
Schritt 3: Formulieren Sie die Fehler, notieren Sie die zugehörigen Werte bei $\alpha = 0,05$ und ordnen Sie den α -Fehler und β -Fehler zu.
Schritt 4: Markieren Sie die Fehlerbereiche in der Abbildung und berechnen Sie die Fehler.
Verwenden Sie für H_1 wieder $p_1 = 0,2$.

Formulieren der Hypothesen und Zuordnung der Zahlenwerte	_____hypothese H ₀	_____Hypothes
	n = _____ p _____ μ _____	n = _____ μ _____
Markieren Ablehnungsbe- reiche und Fehler	Ablehnungsbereich für H₀ Ablehnungsbereich für H₁ H₀ H₁ Tipp: Graphik immer vervollständigen!	
Formulieren des Fehlers: Obwohl _____ _____ wird aufgrund der Stichprobe irrtümlich angenommen, _____	Formulieren des Fehlers: Obwohl _____ _____ wird aufgrund der Stichprobe irrtümlich angenommen, _____	Formulieren des Fehlers: Obwohl _____ _____ wird aufgrund der Stichprobe irrtümlich angenommen, _____
Konsequenz der Fehlentscheidung:	Konsequenz der Fehlentscheidung:	Konsequenz der Fehlentscheidung:
Fehler ist gravierend / weniger gravierend.	Fehler ist gravierend / weniger gravierend.	Fehler ist gravierend / weniger gravierend.
k _____ -Fehler	k _____ -Fehler	k _____ -Fehler
Berechnung des _____-Fehlers unter Verwendung der Verteilung von H ₀	Berechnung des _____-Fehlers unter Verwendung der Verteilung von H ₀	Berechnung des _____-Fehlers unter Verwendung der Verteilung von H ₀

Aufgabe 11.3

Die Testsituation von Aufgabe 11.1 wird nun wie folgt verändert.

- Das Medikament wird nun an 50 Personen getestet.
- Die Wirksamkeit des bestehenden Medikamentes bei 2000er Patienten gilt als sicher.
- Die Wirksamkeit des neuen Medikamentes ist besser als die des bestehenden.
- Der Geschäftsführer möchte, dass das Risiko, sich durch die Veröffentlichung eines falschen Forschungsergebnisses hinsichtlich einer verbesserten Wirksamkeit des Medikamentes zu blamieren, weniger als 1% beträgt.

Damit wird nun der α -Fehler vorgegeben, was muss die Grenze für die Entscheidungsregel ermittelt werden.

a) Verdeutlichen Sie sich anhand der Tabellen auf den folgenden Seiten, was im Lösungsverfahren gleich bleibt und was sich verändert. Nennen Sie jeweils die einzelnen Lösungsschritte.

1. Schritt: Formulieren der Hypothese und Notieren der gegebenen Werte

PRO Selbstberichterstattung

Schritt 1: Visualisieren der Problemstellung

Lehrerschule

3. Schritt: Betrachtung von Fehlentscheidungen

Verfahren und Befragte

A decorative graphic consisting of several thin, horizontal black lines. Overlaid on these lines are three large, thick, black curved shapes that resemble stylized, partial arcs or thick brushstrokes. One arc is on the left, another on the right, and a smaller one is at the bottom center.

Formulieren der Hypothesen und Zuordnung der Zahlenwerte	Nullhypothese H_0 Die neue Therapie ist nicht besser als die alte Therapie. $n = 50$ $p_0 = 0,2$ $\mu_0 = 10$	Alternativhypothese H_1 Die neue Therapie ist besser als die alte Therapie. $n =$ $p_1 > 0,2$ $\mu_1 > 10$
Markieren Ablehnungsbereiche und Fehler		
Formulieren der Fehler und Konsequenz	Formulieren des Fehlers: Obwohl die neue Therapie besser als die alte ist, wird aufgrund der Stichprobe irrtümlich angenommen, dass die neue Therapie nicht besser ist. Konsequenz der Fehlentscheidung: Blamage durch die Veröffentlichung eines nicht zutreffenden Forschungsergebnisses. Fehler ist gravierend / weniger gravierend.	Formulieren des Fehlers: Obwohl die neue Therapie besser als die alte ist, wird aufgrund der Stichprobe irrtümlich angenommen, dass die neue Therapie nicht besser ist. Konsequenz der Fehlentscheidung: Die Erkrankten erhalten kein besseres Medikament bzw. es wird ggf. unnötigerweise Geld für weitere Forschung ausgegeben. Fehler ist gravierend / weniger gravierend.
	$k \leq g_r - 1$	β-Fehler
	$k \geq g_r$	richtige Entscheidung
	Berechnung des β-Fehlers unter Verwendung der Verteilung von H_1, wenn $p_1 = 0,4$ gilt	
	$P(X \geq g_r) \leq \alpha$ $1 - P(X \leq g_r - 1) \leq 0,01$ $P(X \leq g_r - 1) \geq 0,99$ $F_{50; 0,2}(g_r - 1) \geq 0,99$ $g_r = 18$	
	$\beta = P(X \leq g_r - 1 H_1)$ $\beta = 0,24$ $\beta \approx 24\%$	

Antwort: Wenn der Stichprobe mindestens 18 geheilte Personen befunden werden, dann mit einem Risiko von weniger als 1% behaupten, dass die neue Therapie besser ist als die alte. Der β -Fehler der 1. Art beträgt dann 24%.

Übung 11.2

Verwenden Sie für diese Übung die Aufgabenstellung von Aufgabe 11.1. Verwenden Sie dabei für die Stichprobe nun **100 Patienten** und zeigen Sie, indem Sie die folgenden Berechnungen ausführen, dass der β -Fehler bei diesem veränderten Stichprobenumfang einen Wert von 24% annimmt. Da sich wegen der unveränderten Aufgabenstellung bei der Formulierung der Hypothesen und der Konsequenzen keine Veränderungen ergeben, ist dieser Schritt hier nicht erforderlich und erscheint in dieser Tabelle nicht noch einmal.

Formulieren der Hypothesen und Zuordnung der Zahlenwerte	Nullhypothese H_0 Die neue Therapie ist nicht besser als die alte Therapie. $n =$ $p_0 =$ $\mu_0 =$	Alternativhypothese H_1 Die neue Therapie ist besser als die alte Therapie. $n =$ $p_1 =$ $\mu_1 =$
Markieren Ablehnungsbereiche und Fehler		
Berechnung der Fehler	Berechnung von g_r unter Verwendung des α-Fehlers und der Verteilung H_0	Berechnung des β-Fehlers unter Verwendung der Verteilung von H_1, wenn $p_1 = 0,4$ gilt
	$k \leq g_r - 1$	β-Fehler
	$k \geq g_r$	richtige Entscheidung
	Berechnung des β-Fehlers unter Verwendung der Verteilung von H_1, wenn $p_1 = 0,4$ gilt	
	$P(X \geq g_r) \leq \alpha$ $1 - P(X \leq g_r - 1) \leq 0,01$ $P(X \leq g_r - 1) \geq 0,99$ $F_{100; 0,2}(g_r - 1) \geq 0,99$ $g_r = 18$	
	$\beta = P(X \leq g_r - 1 H_1)$ $\beta = 0,24$ $\beta \approx 24\%$	

Aufgabe 11.5

Bei Einnahme des verbesserten Medikaments (vgl. Aufgabenstellung 11.1 bzw. 11.3) wird erwartet mehr Erkrankte geheilt. Allerdings treten nun bei 30% der Patienten Nebenwirkungen auf. Durch eine Beimischung eines weiteren Wirkstoffes soll erreicht werden, dass noch bei 10% der Patienten Nebenwirkungen auftreten. Für einen Test des modifizierten Medikaments stehen 50 Personen zur Verfügung. Man entscheidet, dass man von einer Verringerung der Nebenwirkung ausgehen will, wenn in dieser Stichprobe weniger als 12 Personen Nebenwirkungen haben.

- a) Ergänzen Sie die Tabelle unten, erläutern Sie die Fehler bei diesem Test an konkreten Beispielen, und zeigen Sie, dass der α -Fehler einen Wert von etwa 14% hat und der β -Fehler 4% beträgt, wenn man für H_1 die Wahrscheinlichkeit $p_1 = 0,1$ verwendet.
- b) Begründen Sie, warum dieser Test nicht ausreicht.
- zu a)

Formulieren Sie die Alternativhypothese H_1 und die Nullhypothese H_0 in Worten und Zahlenwerten.	Alternativhypothese H_1 Die neue Therapie hat weniger Nebenwirkungen als die alte. $n = 50$ $p_1 < 0,3$ $\mu_1 < 15$	Nullhypothese H_0 Die neue Therapie hat die gleichen Nebenwirkungen wie die alte. $n = 50$ $p_0 = \underline{\hspace{1cm}}$ $\mu_0 = \underline{\hspace{1cm}}$
Visualisieren und Markieren der Ablehnungsbereiche.	← Annahmebereich für H_0 / Ablehnungsbereich für H_1 → Annahmebereich für H_1 / Ablehnungsbereich für H_0 ←	
Bezug auf H_1	Formulieren des Fehlers: Obwohl $\underline{\hspace{2cm}}$ $\underline{\hspace{2cm}}$	Formulieren des Fehlers: Obwohl $\underline{\hspace{2cm}}$ $\underline{\hspace{2cm}}$

Formulieren der Fehler und Konsequenzen	wird irrtümlich angenommen, dass _____ _____	wird irrtümlich angenommen, dass _____ _____
	Konsequenz der Fehlentscheidung: _____	Konsequenz der Fehlentscheidung: _____
	Fehler ist _____ / weniger gravierend.	Fehler ist _____ / weniger gravierend.
k _____	richtige Entscheidung	_____ -Fehler
k _____	_____ -Fehler	richtige Entscheidung
Berechnung des β -Fehlers unter Verwendung der Verteilung von H_1 und der Wahrscheinlichkeit $p_1 = 0,1$	Berechnung des α-Fehlers unter Verwendung der Verteilung von H_0 und der Wahrscheinlichkeit $p_0 = 0,3$ $\alpha = P(x \leq \underline{\hspace{1cm}})$ $\alpha = F_{50;0,3}(\underline{\hspace{1cm}})$ Verteilung von H_0 $\alpha = \underline{\hspace{1cm}}$ $\alpha = \underline{\hspace{1cm}} \%$	

zu b): _____

Aufgabe 11.6

Da in Aufgabe 11.5 der α -Fehler größer als der β -Fehler ist und man mit als nicht akzeptabel angesehen werden kann, soll eine Entscheidungsregel gefunden werden, bei welcher der β -Fehler kleiner als 5% wird. Ermitteln Sie eine geeignete Entscheidungsregel. Benutzen Sie sich für die Verteilungsfunktion $F_{20;0,1}$ der Tabelle in Aufgabe 11.3 bzw. Übung 11.2.

Ergebnis: In der Stichprobe dürfen sich höchstens _____ Personen mit Nebenwirkungen befinden; (dann $\beta = 5,8\%$)

Formulieren der Hypothesen und Zuordnung der Zahlenwerte	hypothese H_0	hypothese H_1
	$n = \rule{1cm}{0.4pt}$ $p = \rule{1cm}{0.4pt}$ $\mu = \rule{1cm}{0.4pt}$	$n = \rule{1cm}{0.4pt}$ $\mu = \rule{1cm}{0.4pt}$
Markieren Ablehnungsbereiche und Fehler	Ablehnungsbereich für H_0 Ablehnungsbereich für H_1 Graphik vervollständigen!	
Formulieren des Testers:	Formulieren des Testers:	Formulieren des Testers:
	Obwohl $\rule{10cm}{0.4pt}$, wird aufgrund der Stichprobe irrtümlich angenommen, $\rule{10cm}{0.4pt}$.	Obwohl $\rule{10cm}{0.4pt}$, wird aufgrund der Stichprobe irrtümlich angenommen, $\rule{10cm}{0.4pt}$.
Formulieren der Konsequenz der Fehlentscheidung:	Konsequenz der Fehlentscheidung:	Konsequenz der Fehlentscheidung:
	$\rule{10cm}{0.4pt}$ $\rule{10cm}{0.4pt}$ $\rule{10cm}{0.4pt}$ Fehler ist gravierend / weniger gravierend.	$\rule{10cm}{0.4pt}$ $\rule{10cm}{0.4pt}$ $\rule{10cm}{0.4pt}$ Fehler ist gravierend / weniger gravierend.
$k = \rule{1cm}{0.4pt}$	$\rule{10cm}{0.4pt}$ -Fehler	$\rule{10cm}{0.4pt}$ -Fehler
$k = \rule{1cm}{0.4pt}$	$\rule{10cm}{0.4pt}$ -Fehler	$\rule{10cm}{0.4pt}$ -Fehler
Berechnungen zum $\rule{1cm}{0.4pt}$ -Fehler		
Berechnungen zum $\rule{1cm}{0.4pt}$ -Fehler		

Aufgabe 11.7

Links- und rechtsseitiger Test

Verdeutlichen Sie sich die beiden folgenden Abbildungen und ergänzen Sie die Aussagen im Text.

Linksseitiger Test

Ablehnungsbereich für H_0

Ablehnungsbereich für H_1

Die Entscheidungsgrenze zwischen dem Annahme- und dem Ablehnungsbereich von H_0 und damit auch der kritische Wert g_r sowie der α -Fehler liegen ebenfalls auf der $\rule{1cm}{0.4pt}$ Seite der Verteilung von H_0 . Man bezeichnet den Test daher als $\rule{1cm}{0.4pt}$ Test.

Berechnen des α -Fehlers: $\alpha = P(X < g_l) = 1 - P(X > g_l) = 1 - P(Z > \frac{g_l - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}})$

Rechtsseitiger Test

Ablehnungsbereich für H_0

Ablehnungsbereich für H_1

Die Verteilung von H_1 liegt **rechts** von der Verteilung H_0 .

Die Entscheidungsgrenze zwischen dem Annahme- und dem Ablehnungsbereich von H_0 und damit auch der kritische Wert g_r sowie der α -Fehler liegen ebenfalls auf der $\rule{1cm}{0.4pt}$ Seite der Verteilung von H_0 . Man bezeichnet den Test daher als $\rule{1cm}{0.4pt}$ Test.

Berechnen des α -Fehlers: $\alpha = P(X > g_r) = 1 - P(X < g_r) = 1 - P(Z < \frac{g_r - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}})$

Übersicht der Testarten in den bisher behandelten Aufgaben

Testart	Berechnen von	Aufgabe/Übung
linksseitig	μ	Aufgabe 11.1, Übung 11.1
linksseitig	μ und β	Aufgabe 11.3, Übung 11.3
rechtsseitig	μ	Aufgabe 11.4
rechtsseitig	μ und β	Aufgabe 11.5

Die Aufgabenstellung für die Tabelle zur Bearbeitung einseitiger Tests in ergänzenden Aufgaben befindet sich auf der Folgeseite.

Die Übungen: $\rule{10cm}{0.4pt}$

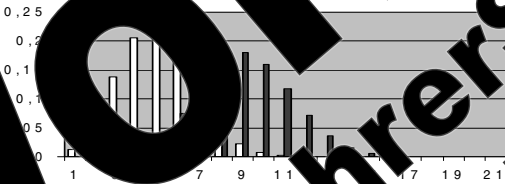
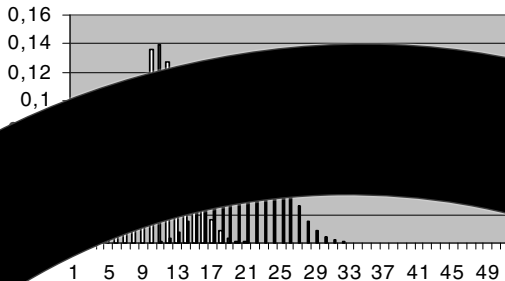
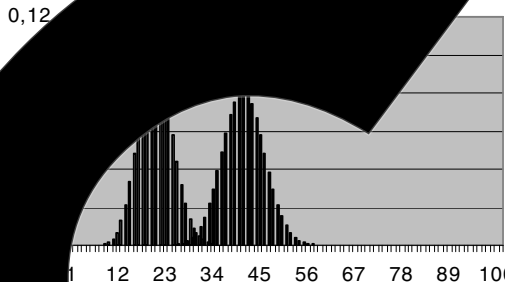
Formulieren der Hypothesen und Zuordnung der Zahlenwerte	_____ hypothese H ₀	_____ hypothese H _a
	n = _____ p = _____ μ = _____	n = _____ p = _____ μ = _____
Markieren Ablehnungsbereiche und Fehler	Ablehnungsbereich für H₀ Ablehnungsbereich für H_a	
Formulieren des Fehlers:	Formulieren des Fehlers:	
Obwohl _____ , _____ , _____ wird aufgrund der Stichprobe irrtümlich angenommen, _____	Obwohl _____ , _____ , _____ wird aufgrund der Stichprobe irrtümlich angenommen, _____	
Konsequenz der Fehlentscheidung:	Konsequenz der Fehlentscheidung:	
Fehler ist _____ierend.	Fehler ist gravierend / weniger gravierend.	
Berechnung zum _____ Fehler	Berechnung zum _____ Fehler	

Aufgabe 11.8

Ergänzende Betrachtungen zur Abhängigkeit der Fehler vom Schrittweite

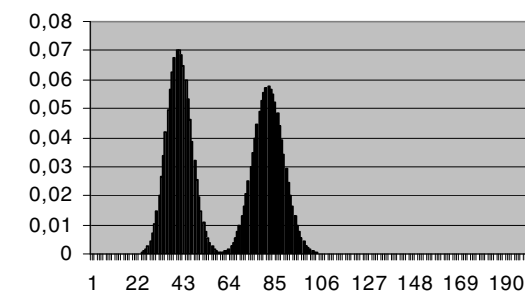
Wenn man die Werte für die beiden Fehler aus Aufgabe 11.2 sowie die Stichprobenumfang vergleicht, erkennt man, dass bei einem gleich bleibenden α -Fehler der β -Fehler bei einem größeren Stichprobenumfang kleiner wird. Dieser Zusammenhang soll anhand der folgenden Beispiele näher untersucht werden. Dazu werden die im Folgenden abgebildeten Verteilungen herangezogen. (Die Balkenabstände sind in der Übersichtlichkeit erhalten die Balken Zwischenabstände.) Der kritische Wert für die Entscheidungsregel wird jeweils so gewählt, dass der α -Fehler etwa bei 3% liegt.

- a) Markieren Sie jeweils näherungsweise die Grenzen zwischen den Abhängungs- und Annahmebereichen. Ergänzen Sie die folgenden Berechnungen:

Verteilungen	$H_0: p = 2\%$ $H_1: p = 4\%$	Größe des α -Fehlers	Größe des β -Fehlers
$B_{20;0,2}(k)$ und $B_{20;0,4}(k)$ kritische Zahl		Wert für α aus Aufgabe 11.1 $\alpha = 3,1\%$	Wert für β aus Aufgabe 11.1 $\beta = 41,6\%$
$B_{50;0,2}(k)$ und $B_{50;0,4}(k)$ kritische Zahl $k = 16$		$\alpha = P(x \geq \underline{\hspace{1cm}})$ $\alpha = 1 - P(x \leq \underline{\hspace{1cm}})$ $\alpha = 1 - F_{\underline{\hspace{1cm}}; \underline{\hspace{1cm}}}(\underline{\hspace{1cm}})$ $\alpha = \underline{\hspace{2cm}}$	$\beta = P(x \leq \underline{\hspace{1cm}})$ $\beta = F_{\underline{\hspace{1cm}}; \underline{\hspace{1cm}}}(\underline{\hspace{1cm}})$ $\beta = \underline{\hspace{2cm}}$ $\beta = 9,6\%$
$B_{100;0,2}(k)$ und $B_{100;0,4}(k)$ kritische Zahl $k = 23$		$\alpha = P(x \geq \underline{\hspace{1cm}})$ $\alpha = 1 - P(x \leq \underline{\hspace{1cm}})$ $\alpha = 1 - F_{\underline{\hspace{1cm}}; \underline{\hspace{1cm}}}(\underline{\hspace{1cm}})$ $\alpha = \underline{\hspace{2cm}}$ $\alpha = \underline{\hspace{2cm}}$	$\beta = P(x \leq \underline{\hspace{1cm}})$ $\beta = F_{\underline{\hspace{1cm}}; \underline{\hspace{1cm}}}(\underline{\hspace{1cm}})$ $\beta = \underline{\hspace{2cm}}$ $\beta = \underline{\hspace{2cm}}\%$

$B_{200; 0,2}(k)$ und $B_{200; 0,4}(k)$

kritische Zahl $k = 51$



$\alpha = P(x \geq \text{---})$
 $\alpha = 1 - P(x \leq \text{---})$
 $\alpha = 1 - F_{\text{---}; \text{---}}(\text{---})$
 $\alpha = \text{---}$
 $\alpha = \text{---}$
 $\beta = 0\%$
 $\beta = \text{---}$
 $\beta = 35\%$

- b) Formulieren Sie ein Ergebnis, indem Sie den folgenden Satz ergänzen:
- Wenn der gravierendere Fehler klein bleiben soll, kann man β -Fehler ebenfalls verkleinern, indem man den Umfang n .
- c) Erläutern Sie das Scheiternsbild bei beiden Verfahren, warum der β -Fehler bei wachsender Stichprobenumfang abnimmt.

Informationen zum Umfang n in der Praxis des Testens

1. **Priorität** gehalten werden. Hier werden in 1% angestrebt.
- Die Kosten eines Tests, die beispielsweise durch längere Testverfahren oder hohen Personalaufwand bestimmt werden können, werden in der Praxis im Allgemeinen niedrig gehalten werden. Daher wird man den Umfang der Stichprobe nur so groß wählen, dass bei einem möglichst kleinen α -Fehler ein hinreichend vertretbares Maß annimmt. Die Größe der Stichprobe wird daher vom erlaubten α -Fehler bestimmt.
- Die Größe der Stichprobe n kann auch durch nach oben begrenzt sein, wenn technische .

Folgernd, wenn der Fehler 2. Art als unwichtig zu bewerten, wird man n klein wählen. Ist der Fehler 2. Art ebenfalls gravierend, wird man versuchen, n .

Aufgabe 11.9

Ergänzende Betrachtungen zur Abhängigkeit des β -Fehlers von der Wahrscheinlichkeit p_1 der Alternativhypothese H_1

Für die folgenden Betrachtungen wird für den Umfang der Stichprobe der Wert $n = 20$ und als Annahmebereich für H_0 der Bereich $A = \{0, \dots, 7\}$ gewählt. Die unten angegebenen Beispiele unter für H_0 eine Wahrscheinlichkeit von $p_0 = 20\%$ verwendet wird, bei der der α -Fehler $\alpha = 3,21\%$ jeweils gleich (vgl. Aufgabe 11.1).

Für die Hypothese H_1 wird die Wahrscheinlichkeit p beginnend bei 20% jeweils um 10% vergrößert. Markieren Sie in allen Abbildungen die Entscheidungsgrenze und bestimmen Sie die für den jeweiligen β -Fehler angegebenen Werte durch Berechnung (Zur besseren Übersichtlichkeit erhalten die Balken Zwischenabstände.)

Verteilungen für $n = 20$ und die Abhängigkeit der Verteilungen von der Größe des β -Fehlers

$H_0: p_0 = 20\% \Rightarrow B_{20; 0,2}(k)$ $H_1: p_1 = 20\% \Rightarrow B_{20; 0,2}(k)$		$\beta = P(x \leq \text{---})$ $\beta = F_{20; \text{---}}(\text{---})$ $\beta = \text{---} = 96,7\%$
$H_0: p_0 = 20\% \Rightarrow B_{20; 0,2}(k)$ $H_1: p_1 = 30\% \Rightarrow B_{20; 0,3}(k)$		$\beta = P(x \leq \text{---})$ $\beta = F_{20; \text{---}}(\text{---})$ $\beta = \text{---} = 77,23\%$
$H_0: p_0 = 20\% \Rightarrow B_{20; 0,2}(k)$ $H_1: p_1 = 40\% \Rightarrow B_{20; 0,4}(k)$		$\beta = P(x \leq \text{---})$ $\beta = F_{20; \text{---}}(\text{---})$ $\beta = \text{---} = 41,59\%$
$H_0: p_0 = 20\% \Rightarrow B_{20; 0,2}(k)$ $H_1: p_1 = 50\% \Rightarrow B_{20; 0,5}(k)$		$\beta = P(x \leq \text{---})$ $\beta = F_{20; \text{---}}(\text{---})$ $\beta = \text{---} = 13,16\%$
$H_0: p_0 = 20\% \Rightarrow B_{20; 0,2}(k)$ $H_1: p_1 = 60\% \Rightarrow B_{20; 0,6}(k)$		$\beta = P(x \leq \text{---})$ $\beta = F_{20; \text{---}}(\text{---})$ $\beta = \text{---} = 2,1\%$
$H_0: p_0 = 20\% \Rightarrow B_{20; 0,2}(k)$ $H_1: p_1 = 70\% \Rightarrow B_{20; 0,7}(k)$		$\beta = P(x \leq \text{---})$ $\beta = F_{20; \text{---}}(\text{---})$ $\beta = \text{---} = 0,13\%$

Ergänzen Sie anhand der Untersuchung die folgenden Sätze.

Je _____ die Werte für die Wahrscheinlichkeiten p_0 und p_1 der Nullhypothese und der Alternativhypothese H_1 voneinander abweichen, desto weniger überlappen sich die beiden Verteilungen. Das bedeutet, dass bei vorgegebenem konstantem α -Fehler der β -Fehler _____.

Als Folge für die Stichprobengröße ergibt sich demnach:

- Bei einer _____ Differenz der Wahrscheinlichkeiten p_0 und p_1 erhält man auch bei kleinem Stichprobenumfang einen kleinen β -Fehler.
- Bei einer kleinen Differenz der Wahrscheinlichkeiten p_0 und p_1 kann man bei vorgegebenem α -Fehler den β -Fehler nur klein halten, wenn man einen _____ Stichprobenumfang wählt.

Aufgabe 11.10

Erweiternde und vertiefende Betrachtung zum Begriff Operationscharakteristik

Wie Sie in Aufgabe 11.9 und 11.9.2 sich anmerken lassen, hängt die Größe des β -Fehlers von der Differenz der Wahrscheinlichkeiten p_0 der Nullhypothese und p_1 der Alternativhypothese sowie vom Stichprobenumfang n ab. Diesen Zusammenhang kann man in einem Diagramm, in dem man auf der horizontalen Achse die Werte für die Wahrscheinlichkeiten p_1 und auf den vertikalen Achse den Wert für den jeweiligen β -Fehler abträgt, darstellen. Ein derartiges Diagramm wird als **Operationscharakteristik** oder kurz **OC-Funktion** bezeichnet, und es gilt $\beta = OC(p_1)$.

a) OC-Funktion für einen rechtsseitigen Test

In der folgenden Tabelle sind die Ergebnisse von Aufgabe 11.9, ergänzt durch einige weitere Werte für p_1 , angegeben. Tragen Sie diese Werte als Punkte im dazugehörigen Diagramm ein und verbinden Sie diese zu einer Kurve.

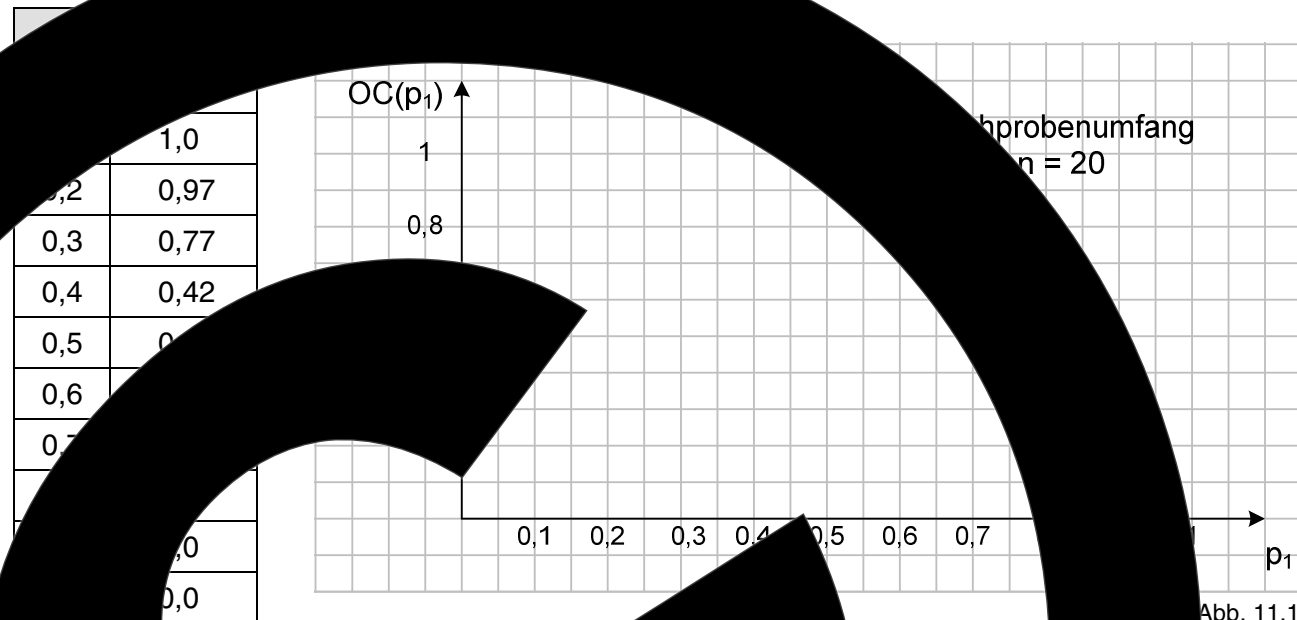


Abb. 11.10.1

Die folgende Tabelle enthält für einen Stichprobenumfang von $n = 100$ die Werte für die β -Fehler eines rechtsseitigen Tests. Fertigen Sie ebenfalls den Graphen der OC-Funktion.

p_1	β -Fehler
0,0	1,0
0,1	1,0
0,2	0,98
0,3	0,38
0,4	0,01
0,5	0,00
0,6	0,00
0,7	0,00
0,8	0,00
0,9	0,00
1,0	0,00



Abb. 11.10.2

Erläutern Sie, welche Gemeinsamkeiten und Unterschiede die Graphen in Abb. 11.9.1 und 11.9.2 aufweisen. Ergänzen Sie die Lücken, um die Aussagen zu vervollständigen.

Wenn bei einem rechtsseitigen Test die Wahrscheinlichkeit p_1 wesentlich kleiner als p_0 ist, nimmt der β -Fehler _____ zu. In diesem Fall liegt die Verteilung von H_1 vollständig im Annahmebereich von H_0 . Wenn bei einem rechtsseitigen Test die Wahrscheinlichkeit p_1 und p_0 etwa _____

_____ sind, liegt der Wert für den β -Fehler nahe bei 1. In diesem Fall liegt der größte Teil der Verteilung von H_1 im Ablehnungsbereich von H_0 . Wenn bei einem rechtsseitigen Test die Wahrscheinlichkeit p_1 und p_0 etwa _____ sind, nimmt der β -Fehler ab. Je größer der

_____ wird der β -Fehler. Bei _____ Unterschieden nimmt der β -Fehler schließlich _____ an, da sich die beiden Verteilungen nicht mehr überlappen und die Verteilung von H_1 vollständig in den Ablehnungsbereich von H_0 fällt.

Je größer _____ ist der Bereich, in dem sich die beiden Verteilungen auch bei nahe beieinander liegenden Werten von p_1 und p_0 überlappen (vgl. Aufgabe 11.9). Je größer _____ nimmt der β -Fehler an. Die OC-Funktion steigt mit zunehmendem p_1 sehr schnell _____ an. In der Operationscharakteristik erkennt man daran, dass die Kurve in der Umgebung von p_0 bei _____ an _____ mit zunehmendem n wesentlich steiler verläuft als bei kleinen Werten von n . Man sagt auch, dass bei großem n die Schärfe des Tests _____ ist.

b) Operationscharakteristik bei einem linksseitigen Test

Begründen Sie, warum die OC-Funktion in Abb. 11.10.3 einen linksseitigen Test (vgl. Aufg. 10.7) beschreibt, indem Sie den Text vervollständigen:

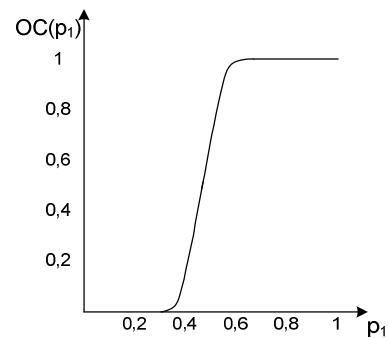


Abb. 11.10.3

Die Verteilung von H_1 liegt bei einem linksseitigen Test _____ von der Verteilung von H_0 . Wenn die Wahrscheinlichkeit p_1 viel _____ als die Wahrscheinlichkeit von H_0 ist, gibt es keine Überlappung der Verteilungen H_0 und H_1 . Die Verteilung von H_1 liegt dann vollständig im _____ Bereich von H_0 . Damit _____ Fehler bei einem linksseitigen Test für _____ Werte von p_1 den Wert Null an. Der α -Fehler _____, wenn sich der Wert von p_1 dem Wert von p_0 annähert, und nimmt den Wert _____, wenn gilt: $p_1 \gg p_0$.

c) Operationscharakteristik bei einem zweiseitigen Test

Begründen Sie, warum die OC-Funktion in Abb. 11.10.4 einen zweiseitigen Test beschreibt, indem Sie den Text vervollständigen:

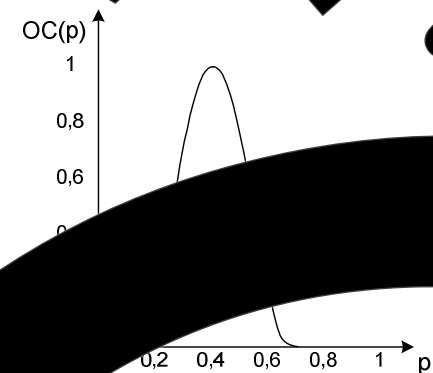


Abb. 11.10.4

Da eine Hypothese bei einem zweiseitigen Test nach links und nach rechts getestet wird (vgl. Aufg. 10.3 und 10.4), tritt der Fehler auf _____ Seiten der Hypothese auf. Liegt der Wert von p weit von der Wahrscheinlichkeit, welcher der Nullhypothese entspricht, so nimmt der Funktionswert der OC-Funktion _____ Wert an. Der Funktionswert von _____, wenn p sich dem Wert von p_0 annähert, und die Wahrscheinlichkeit der Fehler nimmt _____ von einander an.

Übung 11.3

Zusammenfassende Übungsaufgabe zu einseitigen Tests

Testsituation:

In der Automatisierungstechnik werden zur Visualisierung von Abläufen Geräte mit LED-beleuchteten Displays eingesetzt. Diese Geräte sind oft extremen Bedingungen wie beispielsweise großen Temperaturschwankungen, ausgesetzt und haben dadurch eine begrenzte Lebensdauer. Halten die Displays dieser Beanspruchung nicht stand, werden sie häufig ausgetauscht, so wird meist das gesamte Produkt unbrauchbar und muss ersetzt werden, was zu hohen Kosten für die Erfüllung von Garantieleistungen entstehen können. Daher wird die vom Hersteller angegebene Lebensdauer von einer Firma, die diese Displays einsetzen möchte, geprüft. Man sendet zu Testzwecken Displays, in denen 20 Displays untergebracht werden können und diese werden in Zweitelndzyklen von 10°C auf 70°C und zurück, wobei ein Zyklus als Simulation für einen Arbeitstag angesehen wird. Sollte sich bei dem Test herausstellen, dass die Lebensdauer der Displays den Anforderungen im Engineering nicht entsprechen, bedeutet dies eine Zeitverzögerung für die Produktion, die Verbesserung in dem Hersteller eingefordert werden müssen und die Testkosten erhöhen. Dies kann zur Folge haben, dass die Konkurrenz Wettbewerbsvorteile hat.

- a) Begründen Sie anhand einer Rechnung, warum ein Test, in dem geprüft werden soll, ob die Herstellerangaben der Lebensdauer der Displays zutrifft, über einen Zeitraum von mindestens 5 Monaten laufen muss, wenn für die Endgeräte eine Lebensdauer von 5 Jahren angesetzt werden soll.

Der Hersteller der Displays gibt an, dass mindestens 95% seiner Ware unter extremen Temperaturschwankungen eine Lebensdauer von fünf Jahren hat. Da die Geschäftsleitung aus Erfahrungen mit anderen Herstellern von vergleichbaren Displays weiß, dass nur 80 % der Displays die geforderte Lebensdauer von 5 Jahren haben, wird folgender Test vorgeschlagen: Die Geschäftsleitung legt fest, dass der Test mit der Nullhypothese: „80% der Displays haben eine Lebensdauer von 5 Jahren“ bzw. der Alternativhypothese: „95% der Displays haben eine Lebensdauer von 5 Jahren“ durchgeführt werden soll. Formulieren Sie die Nullhypothese und die Alternativhypothese, das Signifikanzniveau von 1% durchgeföhrt werden soll. Formulieren Sie die Testfunktion, die zugehörige Entscheidungsregel und den Konfidenzintervall (47, ..., 50}, $\beta = 24\%$). Verwenden Sie die Formeln der Aufgabe die auf der nächsten Seite.)

Begründen Sie anhand der Konsequenzen für die Entscheidung, dass das Signifikanzniveau von 1% nur bedingt angemessen ist, und erläutern Sie, wie das Signifikanzniveau des Tests der β -Fehler nur verkleinert werden kann, wenn ein größerer α -Fehler vorgezogen wird.

Berechnen Sie beide Fehler, wenn folgende Entscheidungsregel festgelegt wird: Es geht davon aus, dass die Angaben des Herstellers zur Lebensdauer der Displays zutrifft, wenn mindestens 45 Displays bei dem Test ausfallen. Berechnen Sie α und β für $n = 50$, $\alpha = 1,85\%$, $\beta = 10,4\%$.

Formulieren der Hypothesen und Zuordnung der Zahlenwerte	_____ Hypothese H_0	_____ Hypothese H_1
	$n = \underline{\hspace{2cm}}$ $p = \underline{\hspace{2cm}}$ $\mu = \underline{\hspace{2cm}}$	$n = \underline{\hspace{2cm}}$ $\mu = \underline{\hspace{2cm}}$
Markieren Ablehnungsbereiche und Fehler		
Formulieren des Fehlers:	Formulieren des Fehlers:	
Obwohl _____, _____	Obwohl _____, _____	
_____ wird aufgrund der Stichprobe irrtümlich angenommen, _____	_____ wird aufgrund der Stichprobe irrtümlich angenommen, _____	
Konsequenz der Fehlentscheidung:	Konsequenz der Fehlentscheidung:	
_____	_____	
Fehler ist _____	Fehler ist gravierend / weniger gravierend.	
k _____		
Berechnung zum _____ Fehler		

Raum zu Berechnungen zur Übung 11.3 d)

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

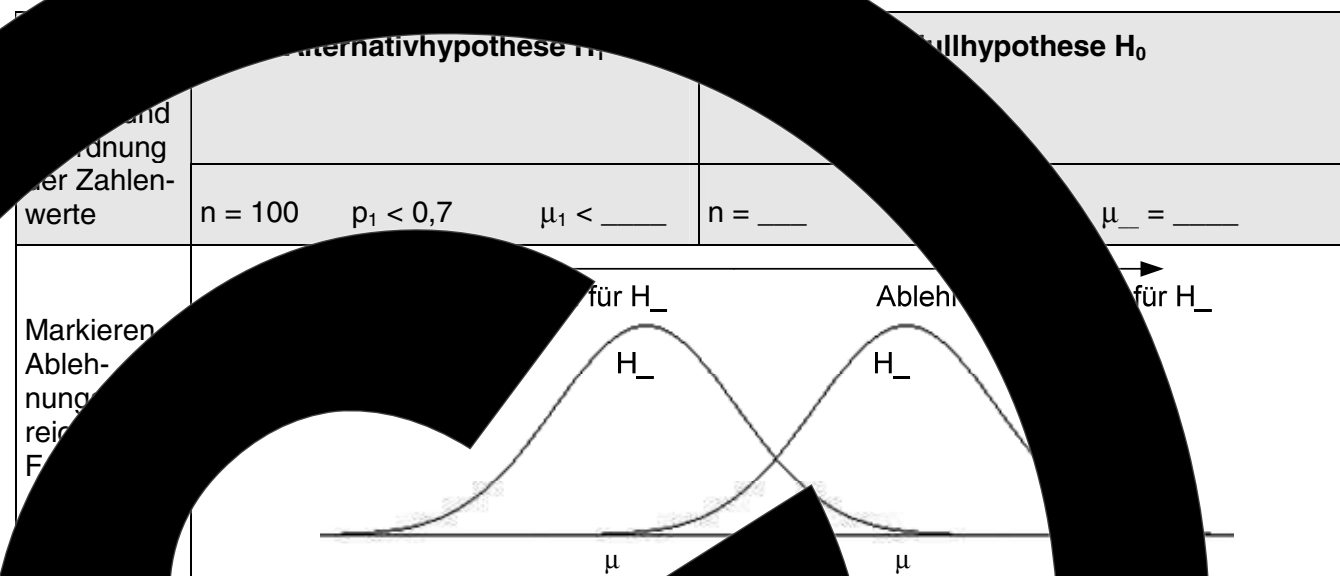
Übung 11.4

Nicht immer ist bei Signifikanztests die Wahrscheinlichkeit der Alternativhypothese H_1 bekannt. In diesem Fall wird auf Grundlage des gegebenen Signifikanzniveaus oft nur der Annahmebereich für die Nullhypothese ermittelt und auch kein Fehler 2. Art berechnet. Die folgende Problemstellung soll nun beispielhaft für diese Testvariante bearbeitet werden.

Aus mehrjährigen Beobachtungen weiß man, dass 70% der Bevölkerung eines Verwaltungszentrums die Stadt A für einen Einkaufsbummel wählen und dazu mit dem eigenen PKW aus der Innenstadt anfahren. Um die Feinstaubbelastung zu senken, soll eine kostenfreie Parkende-Angebotezone am Stadtrand eingerichtet und die Parkgebühren in der Innenstadt drastisch erhöht werden. Da der Einzelhandel aufgrund der Maßnahme eine Abwanderung von Kunden in andere Städte und damit einen Umsatzrückgang befürchtet, soll zunächst auf einem Signifikanzniveau von 3% eine entsprechende Umfrage unter 100 Passanten durchgeführt werden.

- a) Begründen Sie, warum es sinnvoll ist, einen Test für die Hypothese H_0 des Wert $p_0 = 0,7$ und für die Hypothese H_1 eine Wahrscheinlichkeit von $p_1 < 0,7$ anzunehmen.

- b) Formulieren Sie beide Hypothesen und begründen Sie, warum es sinnvoll ist, die Hüllkurve für die Verteilung der Hypothese H_1 zu skizzieren, obwohl der Wert von p_1 nicht gegeben wird. Ergänzen Sie die Entscheidungsgrenze und fehlende Werte in der Tabelle sowie in der Abbildung und markieren Sie den Bereich für den α -Fehler.



- c) Ermitteln Sie den Annahmebereich für die Nullhypothese und formulieren Sie eine geeignete Antwort.



- d) Diskutieren Sie die Ergebnisse und deren Konsequenzen.

α -Fehler: _____

β -Fehler: _____

Ergebnis: _____

Raum für Notizen:



Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Stochastik

selbstorganisiert lernen



Kapitel

Vertrauensintervall



Einführung in die Stochastik

Kapitel 1

Grundbegriffe 7

Kapitel 2

Baumdiagramme und mehrstufige Zufallsversuche 13

Kapitel 3

Vierfeldertafel 23

Kapitel 4

Kombinatorische Abzählverfahren 35

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Kapitel 5

Einführung in den Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit 47

Kapitel 6

Definition der Wahrscheinlichkeitsverteilung 61

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Kapitel 7

Erwartungswert 63

Kapitel 8

Varianz und Standardabweichung 69

Kapitel 9

Normalverteilung 75

Hypothesentests

Kapitel 10

Zweiseitiger Signifikanztest 97

Kapitel 11

Einseitiger Signifikanztest – Fehler beim Testen 109

Kapitel 12

Vertrauensintervall 135

Erweiternde Betrachtungen zur Normalverteilung

Kapitel 14

Anwendung der Normalverteilung 149

Gesamtheit selbstorganisiert erlernen (Bestenfalls 278)

Stochastik

Alle Rechte vorbehalten. All rights reserved.

Druck, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet

SelbstVerlag

Stochastik & Freunde GmbH, Koblenz (Germany)

Lehrerselbstverlag.de

www.f-druck.de

Kapitel 12: Erweiternde Betrachtungen zur Ermittlung eines Vertrauensintervalls

Aufgabe 12.1

Bei Wahlprognosen stützt sich die Vorhersage für das Abschneiden einer Partei an Wahltag auf repräsentative Umfragen. Hierbei wird auf Grundlage dieser Umfrage ein Intervall ermittelt, in dem mit einer vorgegebenen Sicherheit der zu erwartende Prozentsatz der Wähler, die eine Partei wählen, liegt. Dieses Intervall wird als **Vertrauensintervall** oder **Konfidenzintervall** bezeichnet.

Zahlenbeispiel:

Bei einer repräsentativen Umfrage unter 1000 Personen geben 250 an, dass sie die Partei A wählen wollen. Es soll auf einem Signifikanzniveau von 5%, basierend auf der Verteilung der Stichprobe, ein Vertrauensintervall für den zu erwartenden Anteil p ermittelt werden.

Für die Berechnung des Vertrauensintervalls werden zwei Werte vorgeschlagen:

1. Abschätzen des Vertrauensintervalls über die Stichprobe

Für die Ermittlung des Vertrauensintervalls bzw. der Wahrscheinlichkeit p , mit der die Partei gewählt wird, stehen nur die Umfrageergebnisse zur Verfügung. Man geht für die zugehörige Vertrauensintervall auf Basis der Umfragergebnisse $X = 250$ in der Stichprobe aus, die die Realität widerspiegelt, und verwendet dies als Erwartungswert der Verteilung. Daraus ergibt sich die folgende Abbildung:



Zur Erinnerung:
Wenn die 2σ -Umgebung verwendet wird, teilt sich der Fehler zu je 2,5% auf den linken und rechten Rand auf.

Abb.12.1

Wenn man wissen möchte, wie viele Personen die Partei A wählen zu wollen, erhält man aus diesen Umfrageergebnissen den Anteil bzw. die Wahrscheinlichkeit p , mit der die Partei gewählt wird, $p = \frac{250}{1000} = 25\%$. Der Vertrauensintervall gibt an, um welchen Wert herum schwanken die Abweichungen abzuschätzen, d.h. angegeben werden soll, in welchem Bereich der Wert von p liegen kann, werden die folgenden Betrachtungen durchgeführt. Sie die einzelnen Rechenschritte und Umformungen.

$$(1) \quad \mu = X = 250$$
$$p = \frac{250}{1000} = 0,25$$

$$\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma$$

(3)

$222,6 \leq X \leq 277,4$

(4)

$\frac{222,6}{n} \leq \frac{X}{n} \leq \frac{277,4}{n}$

(5)

$\frac{222,6}{1000} \leq \frac{X}{n} \leq \frac{277,4}{1000}$

(6)

$22,26\% \leq p \leq 27,74\%$

Ergebnis:

Man kann also abschätzen, dass der Stimmenanteil der Partei zum Zeitpunkt der Umfrage zwischen 22,26% und 27,74% liegt.

2. Berechnung des Vertrauensintervalls für p

Die Herleitung einer Formel zur Berechnung des Konfidenzintervalls und die Lösung der entstehenden Gleichung erscheint auf den ersten Blick im Vergleich zum oben beschriebenen Weg aufwendig. Bei Verwendung einer entsprechenden Rechnertechnologie (z.B CAS-System) kann man mithilfe der hergeleiteten Formel das Konfidenzintervall für p lediglich durch Eingabe der beiden Werte von n und X computerunterstützt schnell und einfach berechnen lassen.

a) Herleitung

Die Gleichung (1) ist eine Gleichung für die Anzahl der Stimmen X , die mit der Partei p stimmen. Sie stimmt mit den Überlegungen überein, die oben zur Abschätzung von p angestellt wurden. Es wird hier eine Gleichung für die Berechnung von p hergeleitet. Erläutern Sie die einzelnen Schritte und Umformungen.

(1)

$\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma$

(2)

$X \geq \mu - 2\sigma$

$\mu - 2\sigma$

und

$X - \mu \leq 2\sigma$

(4)

$-(X - \mu) \leq 2\sigma$

und

$X - \mu \leq 2\sigma$

(5)

$|X - \mu| \leq 2\sigma$

(6)

$|X - np| \leq 2\sqrt{np(1 - p)}$

(7)

$\left| \frac{X}{n} - p \right| \leq 2\sqrt{\frac{p(1 - p)}{n}}$

(8)

$\left| \frac{X}{n} - p \right| \leq 2\sqrt{\frac{p(1 - p)}{n}}$

(8) Da nur die beiden Randfälle von p betrachtet werden, kann zur Vereinfachung der Rechnung ein Gleichheitszeichen verwendet werden.

$\left(\frac{X}{n} - p \right)^2 = \frac{4}{n} p(1 - p)$

b) Berechnung von p für die gegebenen Umfragewerte

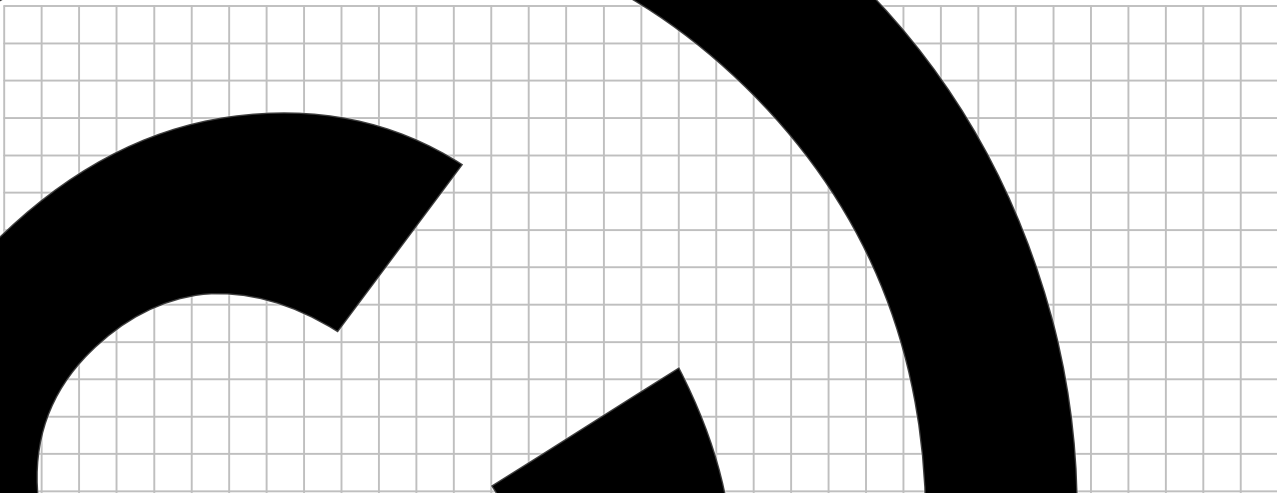
Zeigen Sie, dass die Gleichung nach p bzw. mithilfe Ihres Taschenrechners, das Konfidenzintervall für p ergibt.

$\left(\frac{X}{n} - p \right)^2 = \frac{4}{n} p(1 - p)$

$\left(\frac{222,6}{1000} - p \right)^2 = \frac{4}{1000} p(1 - p)$

p_1

p_2



Raum für Notizen:



Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Stochastik

selbstorganisiert lernen



Kapitel 12

Grundlegende Betrachtung
Normalverteilung



Einführung in die Stochastik

Kapitel 1

Grundbegriffe 7

Kapitel 2

Baumdiagramme und mehrstufige Zufallsversuche 13

Kapitel 3

Vierfeldertafel 23

Kapitel 4

Kombinatorische Abzählverfahren 35

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Kapitel 5

Einführung in den Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit 47

Kapitel 6

Definition der Wahrscheinlichkeitsverteilung 61

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Kapitel 7

Erwartungswert 63

Kapitel 8

Varianz und Standardabweichung 69

Kapitel 9

Normalverteilung 75

Hypothesentests

Kapitel 10

Zweiseitiger Signifikanztest 97

Kapitel 11

Einseitiger Signifikanztest – Fisher beim Testen 109

Kapitel 12

Vertrauensintervall 135

Grundlegende Betrachtungen zur Normalverteilung 139

Kapitel 14

Anwendung der Normalverteilung 149

Gesamtheit selbstorganisiert erlernen (Bestenfalls 278)

Copyright 2014 Lehrerselbstverlag

Alle Rechte vorbehalten. All rights reserved.

Druck, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet

LehrerselbstVerlag

Lehrerselbstverlag GmbH, Koblenz (Germany)

www.lehrerselbstverlag.de

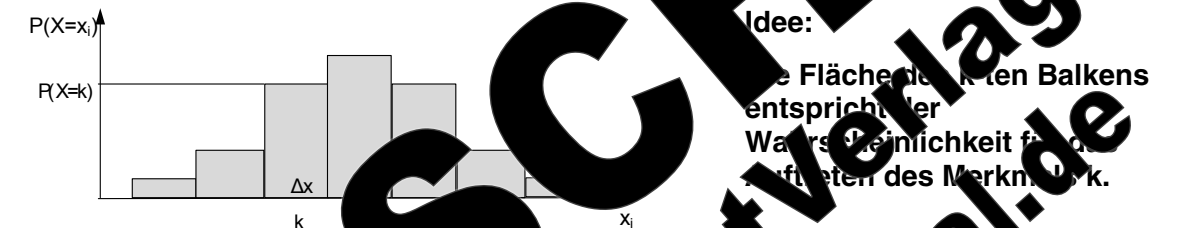
www.f-druck.de

Kapitel 13: Grundlegende Betrachtungen zur Normalverteilung

Aufgabe 13.1 Grundlegende Idee

Die Entwicklung der Normalverteilung wird notwendig, da die Binomialverteilung für alle n und alle p tabelliert vorliegt und für große n nur aufwendig zu berechnen ist.

Für den Übergang von der Binomialverteilung zur Normalverteilung ist folgende Idee grundlegend:



Die Fläche A des gesamten Balkendiagramms kann aus dem Produkt $A = P(X=k) \cdot \Delta x$ berechnet werden. Begründen Sie, warum die Summe der Fläche aller k Balken den Wert 1 ergibt.

$$\sum_{k=1}^n P(X=k) \cdot \Delta x = 1$$

Bereits aus der Integralrechnung wissen, kann man die Fläche unter einer Kurve durch Ober- bzw. Untersummen annähern, wobei der k Balken für große Werte von n immer schmäler wird und sich die Höhe der Balken einer Kurve $f(x)$ annähert. Wendet man dieses Verfahren für die Berechnung der Flächen aller k Balken einer Binomialverteilung an, so geht die Aufgabe für ein ausreichend großes n dazu über, in einem Intervall $[a, b]$ die Fläche einer zur Binomialverteilung passenden Hüllkurve $f(x)$ zu ermitteln. Da diese Fläche aus der Summe aller Balken hervorgeht, hat sie den Wert 1.



Fläche unter der Kurve: $A_a(b) = \int_a^b f(x) dx = 1$

Da die Fläche unter der Kurve für eine beliebige Binomialverteilung gilt, sind die Grenzen a und b von n und p unabhängig. Erläutern Sie diesbezüglich, wie die Grenzen a und b sowie die Form des höchsten Balkens einer Binomialverteilung von n und p abhängen.

Wie Sie sicherlich erkannt haben, verschiebt der Wert von p die Funktion $f(x)$ nach rechts und links und n beeinflusst die Höhe bzw. Breite der Verteilung und damit den Abstand von a nach b . Die Lösung dieses Problems haben auch die Mathematiker De Moivre (1667–1754), Laplace (1743–1827) und Gauß (1777–1855) erkannt. Überlegungen dieser drei Mathematiker waren die Grundlage dafür, eine Funktion $f(x)$ zu entwickeln, die unabhängig von den Werten p und n ist und somit eine standardisierte bzw. normierte Verteilung darstellt, mit der Wahrscheinlichkeiten für beliebige Werte von n und p berechnet werden können. Diese Verteilung wird heute als **Normalverteilung** bezeichnet.

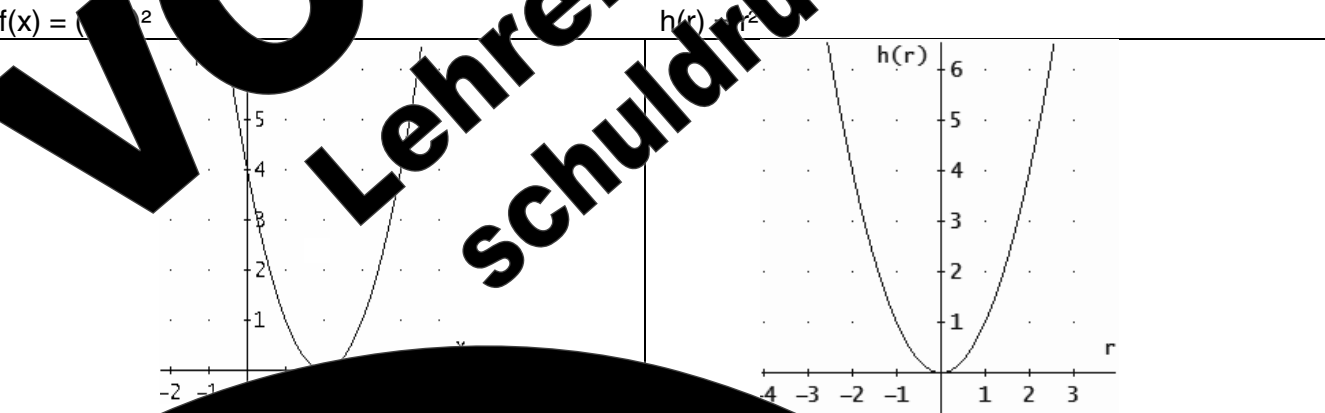
In den nun folgenden Aufgaben wird das Verfahren der Normierung erläutert und somit erläutert, warum man aus dem Wert der Zufallsvariablen X mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ eine neue Variable z erhält, mit der man dann ähnlich wie bei der Binomialverteilung die Tabelle für Normalverteilung nutzen kann. Hier jedoch einige Kenntnisse bezüglich der Transformation von Koordinatensystemen benötigt werden. (Fort mit Aufgabe 13.2 zunächst ein Einschub, der die notwendigen Schritte hierfür erklärt bzw. wiederholt.)

Aufgabe 13.2 Transformation von Koordinatensystemen für das Verschieben von Funktionen

Am Beispiel einer Parabel wird erläutert, welche Transformation eine Funktion verschoben wird.

Achtung: Im transformierten Koordinatensystem wird die horizontale Achse mit r bezeichnet.

Koordinatensystem waagrecht: x-Achse Koordinatensystem waagrecht: r-Achse



Gegeben seien die folgenden

$f(0) = 4$	$f(0) = h(-2) = (-2)^2 = 4$
$f(1) = 1$	$f(1) = h(-1) = (-1)^2 = 1$
$f(2) = 0$	$f(2) = h(0) = 0^2 = 0$
$f(3) = 1$	$f(3) = h(1) = 1^2 = 1$
$f(4) = 4$	$f(4) = h(2) = 2^2 = 4$
$f(x_0) = h(r_0) = r_0^2$	$f(x_0) = h(r_0) = r_0^2$

Sie erkennen, dass die Funktionswerte von $h(r)$ und $f(x)$ identisch sind, wenn man die Verschiebung von $f(x)$ um 2 in Richtung positiver x-Achse berücksichtigt. Das heißt, für die Stelle $r_0 = x_0 - 2$ den gleichen Funktionswert hat die Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 .

Aus $f(x) = (x-2)^2$ folgt

Aufgabe 13.3 Normierung der Binomialverteilung

a) Verschieben der Binomialverteilung in den Ursprung eines Koordinatensystems

Das Balkendiagramm wird durch eine Verschiebung, entsprechend dem in dem Beispiel, so verschoben, dass der höchste Balken, also der Erwartungswert, an der x-Achse liegt. In der Abbildung werden nur der höchste Balken und die Hüllkurve dargestellt.



Zeichnen Sie an einer beliebigen Stelle $X = k$ im linken Diagramm und an der entsprechenden Stelle im rechten Diagramm einen senkrechten Balken ein und begründen Sie, warum sich auf den horizontalen Achsen aus der x-Koordinate $X = k$ im linken Diagramm, die y-Koordinate $Y = k - \mu$ im rechten Diagramm ergibt.

Begründen Sie, warum für die Wahrscheinlichkeiten $P(X)$ und $P(Y)$ gilt: $P(X = k) = P(Y = k - \mu)$

b) Normierung der Breite

Wie Sie bei der Binomialverteilung für jedes n eine andere Breite und andere Höhe.

Bestimmen Sie für die Binomialverteilungen den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ . Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Erwartungswertes, also $P(X = \mu)$, ist

Wie aus der F-Tabelle jeweils die ersten Werte $k = a$ und $k = b$ ab, die die Wahrscheinlichkeit $F_{n,p}(a) > 0$ und $F_{n,p}(b) \leq 1$ sind. Ermitteln Sie die um μ verschobenen Werte $a - \mu$ und $b - \mu$ und tragen Sie alle Werte an vorgesehenen Stellen ein.

Berechnen Sie auch die Breite d der Verteilung über die Bildung der Differenz $a - b = a$ und ergänzen Sie die Werte an den vorgesehenen Stellen ein. Ergänzen Sie den nachfolgenden

Bsp. 1 $n = 100$
 $p = 0,3$
 $\mu =$ _____
 $P(X = \mu) =$ _____
 $\sigma =$ _____
 $a =$ _____
 $b =$ _____
 Breite $d =$ _____

Bsp.2 $n = 100$
 $p = 0,5$
 $\mu =$ _____
 $P(X = \mu) =$ _____
 $a =$ _____
 $b =$ _____
 Breite $d =$ _____

Anhand der beiden Werte a und b sowie p für die Breite erkennt man, dass hier beispielsweise die Randwerte $a - \mu$ unterschiedlich sind und die $B_{100;0,5}(k)$ -Verteilung _____ als die $B_{100;0,3}(k)$ - Verteilung ist.

Damit ergibt sich die Aufgabe 13.1 schon erwähnt, bei der Flächen unter bestimmten Grenzen. Um dieses Problem zu lösen, betrachtet man die Breite der Hüllenkurve für alle k und erkennt, dass sie gleich ist und somit $a - \mu$ und $b - \mu$ gleich groß sein müssen.

Wenn man die Ihnen bereits bekannten Zusammenhänge zwischen den Sigma-Bereichen an. Bei einer Binomialverteilung mit $\sigma > 3$ (Laplacebedingung vgl. Aufgabe 9.) gilt die Wahrscheinlichkeit, dass ein Wert für k in einen der Sigma-Bereiche fällt, für den 1σ -Bereich 68,3%, für den 2σ -Bereich 95,4% und für den 3σ -Bereich 99,7%. Interpretiert man diese Wahrscheinlichkeiten dann decken bei diesen Binomialverteilungen jeweils die gleiche Breite der Normalverteilung ab. Diese Eigenschaft kann man zur Normierung der Breite verwenden.

Berechnen Sie den Quotient h aus d und σ und vergleichen Sie die beiden

für $B_{100;0,3}$ mit $h_{0,3} = \frac{d}{\sigma} =$ _____ $\approx$ _____ und für $B_{100;0,5}(k)$ gilt $h_{0,5} = \frac{d}{\sigma} =$ _____

Das Ergebnis zeigt, dass sich bei einer Division durch σ für beide Hüllenkurven etwa der gleiche Wert ergibt, also nach Anwendung des Stauchungsfaktors $\frac{1}{\sigma}$ beide Verteilungen in Hüllenkurven die gleiche Breite annehmen.

Man bezeichnet die waagerechte Achse der mit dem Faktor $\frac{1}{\sigma}$ gestauchten Hüllenkurve nun mit z und die senkrechte Achse mit $P(Z)$. Ergänzen Sie die Skalierung der z -Achse in der Abbildung mit den entsprechenden Zahlenwerten.

Vergleich des $P(Z)$ -Diagramm mit dem $P(X)$ -Diagramm und der Ausgangsverteilung im $P(X)$ -Diagramm

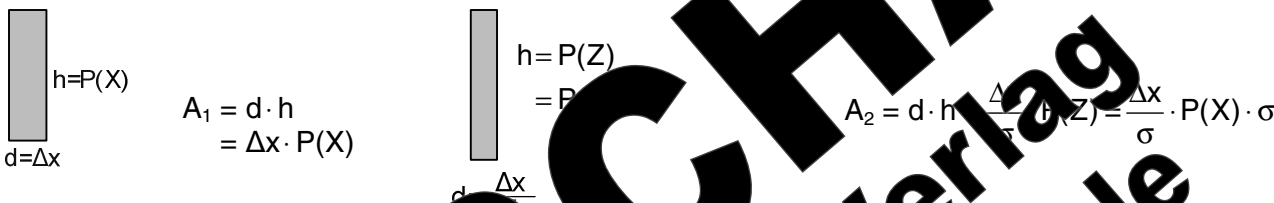
- Im $P(X)$ -Diagramm wird für die Berechnung von $P(X = x_i)$ für x_i ein beliebiger Wert k festgelegt, so dass gilt: $X = k$
- Das $P(Y)$ -Diagramm wird nach links um μ verschoben und nun mit y bezeichnet. Für die Berechnung von y bei bekanntem k gilt: $y =$ _____
- Im $P(Z)$ -Diagramm werden die ursprünglich im $P(X)$ -Diagramm festgelegten Werte von k mit z bezeichnet. Die Werte von z sind bezüglich der ursprünglichen Lage von k um μ nach links verschoben, und die Abstände werden aufgrund der Division durch σ gestaucht. Die Position der Werte von z können daher aus dem ursprünglich vorgegeben Wert k wie folgt berechnet werden: $z = \frac{k - \mu}{\sigma}$

Die Hüllenkurve

Die Hüllenkurve der Verteilung mit dem Faktor $\frac{1}{\sigma}$ ist die Hüllenkurve, die auch jeder Balken in der ursprünglichen $P(X)$ -Verteilung genau um diesen Faktor $\frac{1}{\sigma}$ gestaucht ist. Die Höhe der Verteilung bzw. der Balken gleich geblieben ist. Erläutern Sie, welche Bedeutung dies für die Summe der Fläche aller Balken bzw. die Fläche unter der Hüllenkurve hinsichtlich der Normierung für die Fläche, nämlich: $A_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^n P(X = x_i) = 1$ bzw. $A_a(b) = \int_a^b f(x)dx = 1$ (Aufgabe 13.1) hat.

c) Normierung der Höhe der Verteilung

Durch das Stauchen der Verteilung ist die ursprüngliche Balkenbreite d geworden Δx . Die ursprüngliche Höhe der Balken wird die Gesamtfläche aller Balken daher kleiner. Um die Fläche bei einer Veränderung auszugleichen, muss die Höhe der Balken um den gleichen Faktor vergrößert werden. Begründen Sie anhand der Abbildung unten, dass für die neue Höhe $P(Z)$ der Balken gilt $P(Z) = P(X) \cdot \sigma$.



Die Höhe der Hüllkurve wird durch die Höhe des höchsten Balkens der Binomialverteilung bestimmt. Begründen Sie, warum die Höhe des höchsten Balkens in den beiden Beispielverteilungen aus $B_{100;0,3}$ und $B_{100;0,5}$ (k) jeweils durch den Wert für die Wahrscheinlichkeit $P(X = \mu)$ berechnet wird.

Berechnen Sie nun für beide Verteilungen das Produkt aus $P(X = \mu)$ und σ . Vergleichen Sie die beiden Werte und interpretieren Sie das Ergebnis hinsichtlich der Normierung der Binomialverteilung.

Für $B_{100;0,3}$ (k) gilt: $P(X = \mu) \cdot \sigma =$ _____

Für $B_{100;0,5}$ (k) gilt: $P(X = \mu) \cdot \sigma =$ _____

Für größere Werte von n zeigt sich, dass die Höhe des größten Balkens der Binomialverteilung also die Höhe der Hüllkurve $\phi(z)$ annimmt. Um die Balkenbreite ergibt sich $\Delta x = d/n$. Nebenabgebildete Normalverteilung



7. Lösung:

entspricht die Summe aller Balken

d) Die Glockenkurve von Gauß und ihre Näherungsformel als Funktion Hüllkurve

Gauß hat für die Hüllkurve, die der Form einer Glocke ähnelt und die den Bedingungen enthält, die folgende Funktionsgleichung entwickelt und mit $\phi(z)$ bezeichnet.

Glockenkurve von Gauß $\phi(z) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}$

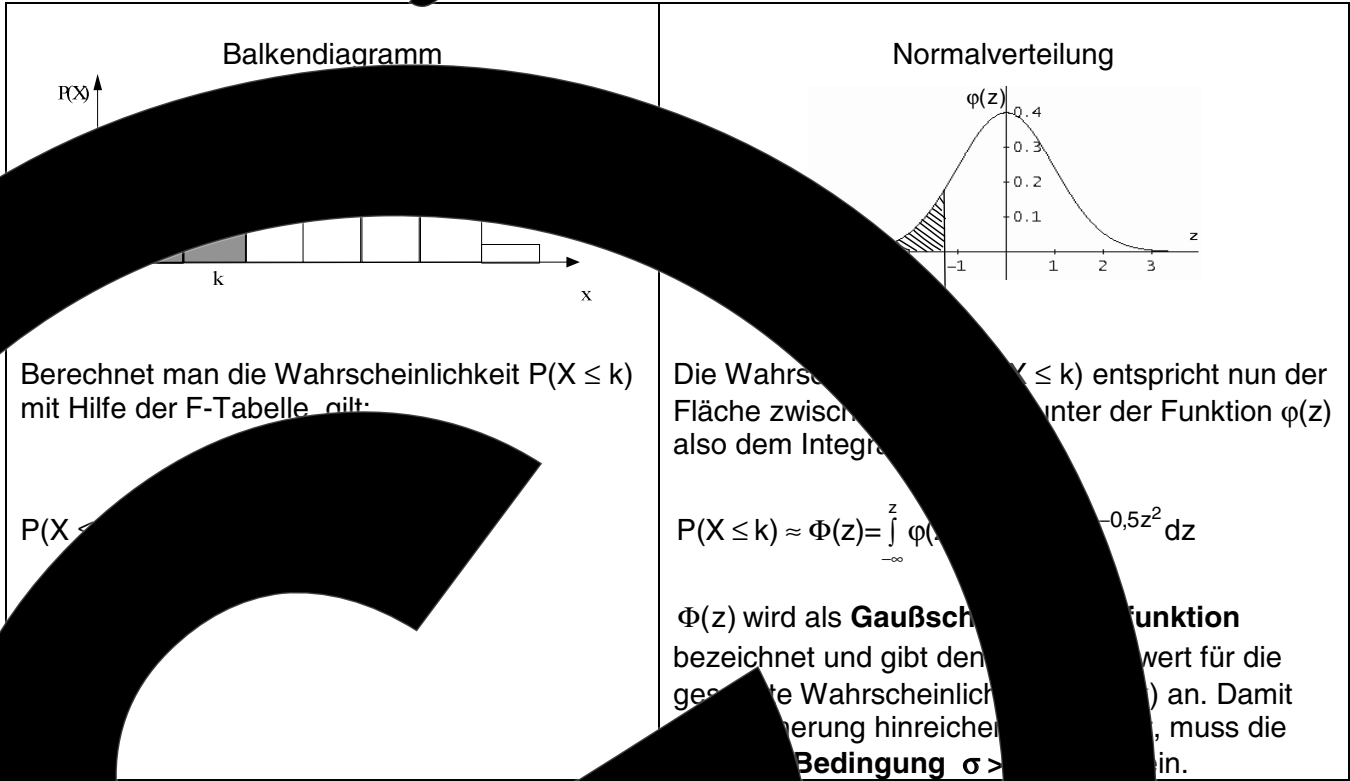
Da $\phi(z)$ aus einer Verdichtung (Stauchen) der Binomialverteilung entstanden ist, wird $\phi(z)$ auch als **Dichtefunktion** bezeichnet.

Begründen Sie, warum für die Berechnung der gesamten Fläche unter dieser Exponentialfunktion bzw. Glockenkurve der folgende Ansatz verwendet wird:

$A_{\text{ges}} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(z) dz = 1$

Aufgabe 13.4 Die Glockenkurve von Gauß und die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten

Die Abbildung zeigt die Berechnung der Wahrscheinlichkeit $P(X \leq k)$ entsprechend zu Aufgabe 13.1 ein Balkendiagramm mit der normierten Hüllkurve der Normalverteilung verglichen.



Da die Funktion $\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0,5z^2}$ keine Stammfunktion besitzt, kann man $\phi(z)$ nicht integrieren. Die Werte für $\Phi(z)$ liegen daher in der **Tabelle zur Gaußschen Summenfunktion** tabellarisch vor.

Damit gilt für die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten:

$$P(X \leq k) = F_{n;p}(k) \approx \Phi(z)$$

Für sehr große Werte von n (Richtwert $n > 1000$) ist die Dichte der Binomialverteilung extrem schmal und die Glockenkurve deckt die Fläche der Balken weitgehend exakt ab. In diesem Fall ist die Variable z durch die Standardisierung der Binomialverteilung bestimmt, und die Berechnung erfolgt über den bereits hergeleiteten Zusammenhang:

$$z = \frac{k - np + 0,5}{\sqrt{np(1-p)}}$$

Die Laplace-Bedingung $\sigma > 3$ muss erfüllt sein.

Für Binomialverteilungen mit $n = 500$ ist die Annäherung der Glockenkurve an die Balken der Binomialverteilung extrem genau. Um diese Ungenauigkeit auszugleichen, verwendet man in der Regel die Ausgleichszahl 0,5. Das heißt:

Beispiel:
 Eine Zufallsgröße sei $B_{500;0,3}(k)$ verteilt.
 Für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 140)$ bzw. $P(X > 140)$ ergibt sich:

$$P(X \leq 140) = F_{500;0,3}(140)$$

Genauer Wert mit dem Taschenrechner oder der F-Tabelle ermittelt.

$$P(X > 140) = 1 - P(X \leq 140)$$

Steht keine passende F-Tabelle oder kein Taschenrechner zur Verfügung, wird die WK näherungsweise über die Normalverteilung bestimmt.

Bestimmen der Variablen z für $k = 140$ mit der Formel für z:

$$z = \frac{k - \mu + 0,5}{\sigma} = \frac{k - np + 0,5}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{140 - 500 \cdot 0,3 + 0,5}{\sqrt{500 \cdot 0,3 \cdot 0,7}} = -0,93$$

(2) Bestimmung des Wertes $\Phi(-0,93)$ durch Ablesen aus der Tabelle der Standardnormalverteilung:

$$P(X \leq 140) = \Phi(-0,93) = 0,1761 = 17,61\%$$

$$P(X > 140) = 1 - \Phi(-0,93) = 1 - 0,1761 = 0,8239 = 82,39\%$$

An dem Wert $\Phi(-0,93)$ vom genau ermittelten Wert nimmt man, dass die Normalverteilung nur eine Näherung für die gesuchte Wahrscheinlichkeit liefert.

Beispiel 2

Die Fernsehshow Mutantenstadel hat in der Zielgruppe Ü70 eine Einschaltquote von 35%. Nach dem Austausch des Moderators befürchtet man, dass die Beliebtheit der Show gesunken ist und als Folge die Einschaltquote zukünftig sinken wird, was einer Verringerung der Werbeeinnahmen für den Sender bedeutet. Daher führt man eine Befragung unter 500 Personen der Zielgruppe durch. Man will von einer gesunkenen Beliebtheit ausgehen, wenn weniger als 335 Personen bei dieser Umfrage angeben, dass ihnen die Sendung noch gefällt. Mit welcher Irrtumswahrscheinlichkeit arbeitet der Test?

Lösung:

Begründen Sie, warum es sich um einen einseitigen Test handelt.

Erläutern Sie die einzelnen Rechenschritte (1) bis (6).

(1) $\alpha = 0,05$

(2) $F_{500;0,35}(g)$

(3) $\alpha \approx \Phi(-1,51)$

(4) $\frac{334 - 350 + 0,5}{10,25} = -1,51$

(5) $\alpha \approx \Phi(-1,51)$

(6) $\alpha \approx 0,0655 = 6,55\%$

Antwort: Die Irrtumswahrscheinlichkeit beträgt 6,6%.

Übungen:

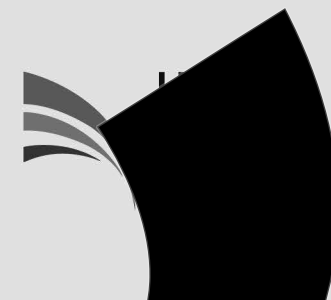
Raum für Notizen:



Oberstudienrätin Ursula Pirkel
Stochastik
selbstorganisiert lernen



Kapitel
Anwendung der Normalverteilung



Einführung in die Stochastik

Kapitel 1

Grundbegriffe 7

Kapitel 2

Baumdiagramme und mehrstufige Zufallsversuche 13

Kapitel 3

Vierfeldertafel 23

Kapitel 4

Kombinatorische Abzählverfahren 35

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Kapitel 5

Einführung in den Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit 47

Kapitel 6

Definition der Wahrscheinlichkeitsverteilung 61

Wahrscheinlichkeitsverteilung

Kapitel 7

Erwartungswert 63

Kapitel 8

Varianz und Kovarianz 69

Kapitel 9

Normalverteilung 75

Hypothesentests

Kapitel 10

Zweiseitiger Signifikanztest 97

Kapitel 11

Einseitiger Signifikanztest – Fehler beim Testen 109

Kapitel 12

Vertrauensintervall 135

Die Betrachtungen zur Normalverteilung

Kapitel 14

Anwendung der Normalverteilung 149

Gesamtwerk selbstorganisiert erlernen (Bestenfalls 278)

S

Alle Rechte vorbehalten. All rights reserved.

Druck, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet

SelbstVerlag

F. D. Druck & Freunde GmbH, Koblenz (Germany)

Lehrerselbstverlag.de

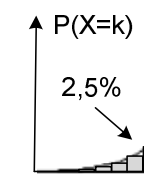
www.f-druck.de

Kapitel 14: Anwendung der Normalverteilung

Aufgabe 14.1

Bestimmen der Hilfsgröße z bei gesuchtem kritischen Werta) Bestimmen eines linksseitigen kritischen Wertes $k = g_l$ bei vorgegebenem α -Fehler

Gegeben sei:

Darstellung anhand der
Binomialverteilung

Rechnung:

Bestimmen von z

$$P(X \leq g_l) \leq 0,025$$

$$P(g_l) \leq 0,025$$

$$\Phi(z) \leq 0,025$$

$$z \leq -1,96$$

2. Bestimmen der Formel für z

$$g_l = \mu + 0,5 -$$

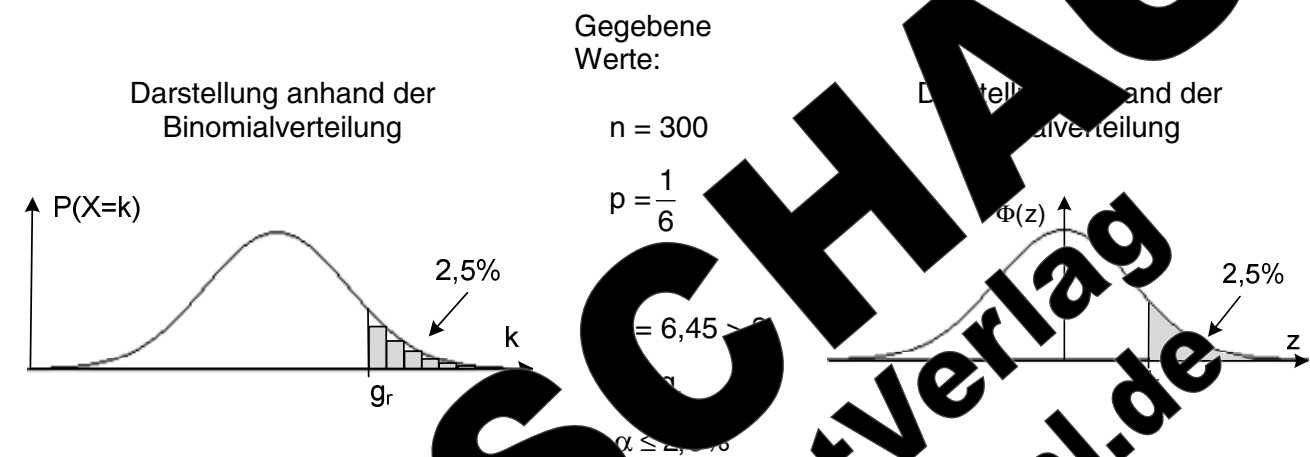
$$g_l \leq -1,96$$

$$g_l \leq -1,96 \cdot 6,45$$

$$g_l \leq 36,84$$

3. Runden auf nächsten Wert, der $P(X \leq g_l)$ also erfüllt,

b) Bestimmen eines rechtsseitigen kritischen Wertes $k = g_r$ bei vorgegebenem Fehler



Rechnung

1. Bestimmen von z

$$P(X \geq g_r) = 0,025$$

$$1 - P(X \leq g_r - 1) = 0,025$$

$$P(X \leq g_r - 1) = 0,975$$

$$\Phi(z) \geq 0,975$$

$$z \geq 1,96$$

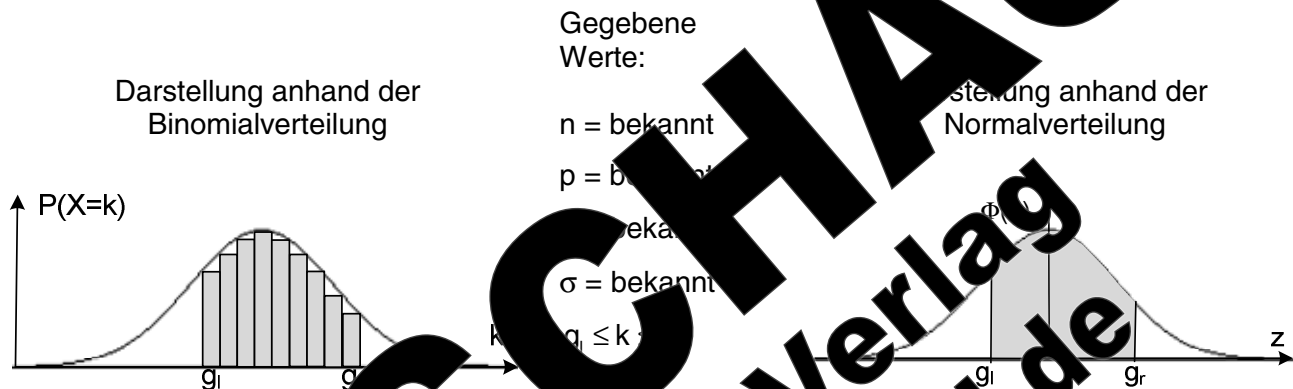
2. Bestimmen von g_r durch Einsetzen in die Formel für z

$$z = \frac{g_r - 1 - \mu + 0,5}{\sigma} \Rightarrow \frac{g_r - 1 - \mu + 0,5}{\sigma} \geq 1,96$$

$$g_r \geq 63,15$$

3. Runden auf den nächsten ganzzahligen Wert, der $P(X \geq g_r)$ als Fehler erfüllt, liefert $g_l = 64$.

c) Allgemeine Betrachtungen zum Umgang mit der Normalverteilung und Berechnung der kritischen Werte g_l und g_r bei einer $B_{n;p}(k)$ -Verteilung



1. Berechnung der Wahrscheinlichkeit $P(g_l \leq X \leq g_r)$

$$P(g_l \leq X \leq g_r) = P(X \leq g_r) - P(X \leq g_l - 1)$$

$$= F_{n;p}(g_r) - F_{n;p}(g_l - 1)$$

$$= \Phi(z_r) - \Phi(z_l)$$

Berechnen von z_l und z_r

$$z_l = \frac{g_l - 1 - \mu + 0,5}{\sigma}$$

$$z_l = \frac{g_l - 1 - np + 0,5}{\sqrt{np(1-p)}}$$

$$z_l = \frac{g_l - np - 0,5}{\sqrt{npq}}$$

Bei Ausdrücken der Form $P(X \geq k)$ ergibt sich ein negativer Ausgleichssummand.

$$z_r = \frac{g_r - \mu + 0,5}{\sigma}$$

$$z_r = \frac{g_r - np + 0,5}{\sqrt{np(1-p)}}$$

$$z_r = \frac{g_r - np + 0,5}{\sqrt{npq}}$$

mit z_l und z_r die Werte von $\Phi(z_r)$

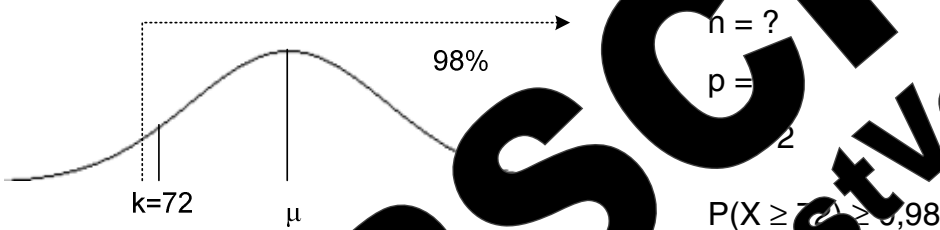
Er

Aufgabe 14.2

Bestimmen des Stichprobenumfangs bei bekanntem p

Von einem hochwirksamen Schlafmittel ist durch Testreihen bekannt, dass es von 6 Personen keine Nebenwirkungen erzeugt. Für die Zulassung des Arzneimittels soll durch eine Stichprobe überprüft werden, ob diese Angabe zutrifft. Welchen Umfang muss die Stichprobe haben, wenn man mit einer Sicherheit von mindestens 98% mehr als 71 nebenwirkungsfreie Personen erhalten will.

Aufgabenstellung anhand einer Skizze:



a) Die Normalverteilung kann verwendet werden, wenn die Laplace-Bedingung erfüllt ist. Da die Wahrscheinlichkeit p vorgegeben ist, kann man nur über die Größe der Stichprobe den Wert von σ beeinflussen. Sie führen Rechnung (1) und der folgenden Überlegung, dass der minimale Stichprobenumfang, die Anwendbarkeit der Laplace-Bedingung 65 Personen beträgt.

Aus Laplace-Bedingung

Verwenden der Normalverteilung
Hier gilt: $\sigma = \sqrt{\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}} \Rightarrow \sigma^2 = \frac{5}{36} \Rightarrow n \cdot \frac{5}{36} \geq 9 \Rightarrow n = \underline{\hspace{1cm}}$ (minimale Stichprobe)

b) Verdeutlichen Sie sich die Herleitung der Ungleichung (1). Formen Sie die Ungleichung (1) so um, dass sich die Ungleichung (2) ergibt, mit der sich dann n berechnen lässt. Lösen Sie die Ungleichung (2) nach n auf und bestätigen Sie damit die auf der folgenden Seite angegebenen Lösungen.

$P(X \geq 72) \geq 0,98$

$\Phi\left(\frac{71 - n \cdot \frac{5}{6} + 0,5}{\sqrt{n \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}}}\right) \leq 0,02$

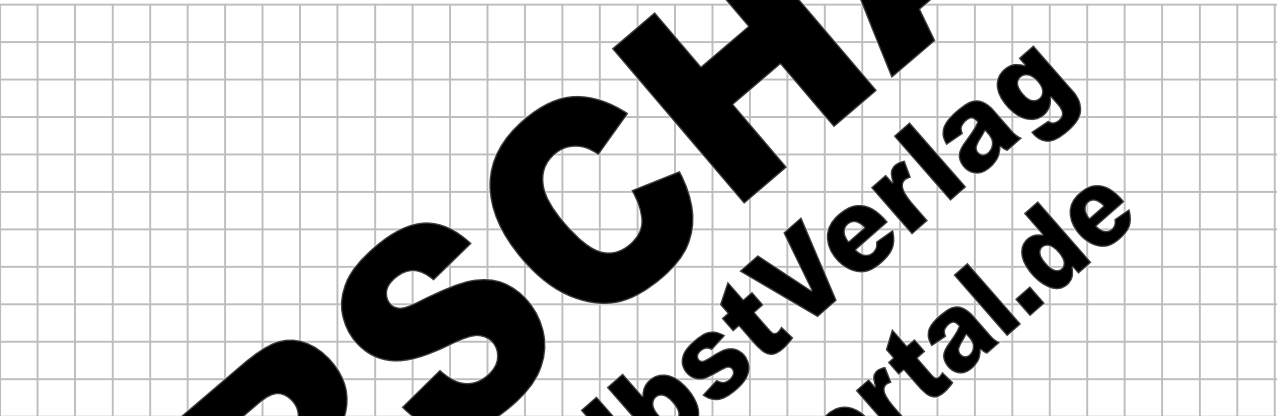
$\Phi(z) \leq 0,02$

$z \leq -2,06$ Einsetzen der Werte in Hilfsfkt.

(1) $\frac{71 - n \cdot \frac{5}{6} + 0,5}{\sqrt{n \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}}} \leq -2,06$

(2) $429 - 5n + 4,606\sqrt{n} \leq 0$ Hinweis : Substitution $\sqrt{n} = m$

Lösen Sie die Ungleichung (2) unter Verwendung des Hinweises nach auf und bestätigen Sie damit die angegebene Lösung.



$\Rightarrow m \geq 8,808$ oder $m \leq -8,808$

Damit ergibt sich für die gesuchte Anzahl n
 $n \geq 81$ also $n = 95$ Personen.

Anmerkung:

Um n zu erhalten, müssen die Werte von m quadriert werden. Da Quadrieren keine Äquivalenzumformung ist, sollte für Gleichungen, bei denen die Lösungen durch Quadrieren der Lösungsvariablen gefunden wurden, eine Probe durch Einsetzen der Ergebnisse in die Ausgangsgleichung (2) vorgenommen werden.

Bei der Probe erkennt man, dass nur $n_1 = 95$ die Ausgangsgleichung (2) löst. Damit ist ab einem Mindeststichprobenumfang von $n = 95$ Personen, gewarant, dass man mit 98% Sicherheit mindestens 72 Personen ohne Nebenwirkungen erhält. Bei einem Stichprobenumfang ist auch die Laplace-Bedingung erfüllt.

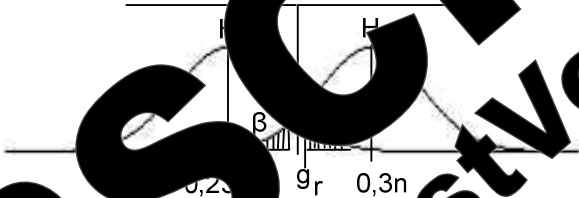
Übungen: _____

Aufgabe 14.3

Stichprobenumfang bei einem rechtsseitigen Test ermitteln, wenn α - und β -Fehler gleichzeitig fest vorgegeben sind

Eine Partei vermutet vor der Wahl, dass ihre Quote von 23% auf 30% gestiegen ist. Um unnötige Wahlkampfkosten zu vermeiden, soll diese Vermutung mit einer Umfrage geprüft werden. Es soll berechnet werden, wie viele Personen befragt werden müssen, wenn der Fehler 1. Art und der Fehler 2. Art gleichzeitig unter 5% liegen sollen.

Verdeutlichen Sie sich den Ansatz und lösen Sie vorstehende Aufgaben anhand dieses Verfahrens.



Beide Fehler sollen unter 5% liegen, also gilt:

$$P(X \geq g_r) \leq \alpha$$

$$P(X \geq g_r - 1) \leq 0,05$$

$$P(X \leq g_r - 1) \geq 0,95$$

$$F_{n,0,3}(g_r - 1) \geq 0,95$$

$$\Phi(z) \geq 0,95$$

$$z \geq 1,65$$

$$\frac{g_r - 1 - 0,23n + 0,5}{\sqrt{n \cdot 0,23 \cdot 0,77}} \geq 1,65$$

$$g_r - 0,23n - 0,5 \geq 0,694\sqrt{n}$$

$$P(X < g_r) \leq \beta$$

$$P(X \leq g_r - 1) \leq 0,05$$

$$F_{n,0,3}(g_r - 1) \leq 0,05$$

$$\Phi(z) \leq 0,05$$

$$z \leq -1,65$$

$$\frac{g_r - 1 - 0,3n + 0,5}{\sqrt{n \cdot 0,3 \cdot 0,7}} \leq -1,65$$

$$g_r - 0,3n - 0,5 \leq -0,7561\sqrt{n}$$

Der Ansatz liefert zwei Gleichungen mit den Variablen g_r und n . Zeigen Sie, dass man durch Elimination von g_r und anschließender Einsetzung in die angegebene Ungleichung erhält. Begründen Sie, warum man hier $n \geq 429,4$ erhält.

II $g_r - 0,3n - 0,5$

I $g_r - 0,23n - 0,5 \geq 0,694\sqrt{n}$

II $-g_r + 0,3n + 0,5 \geq 0,7561\sqrt{n}$

$$\sqrt{n} \geq 20,72$$

$$n \geq 429,4 \Rightarrow n = 430$$

Antwort: Es muss mindestens 430 Leute befragen, um mit der geforderten Sicherheit ausgehen können, dass sich die Quote verbessert hat.

Erläuterungen: _____

**Umschlag
Rückseite
(Innen)**

(unbedruckt)

Hier können Sie noch Vorlagen einfügen

2014-15

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

