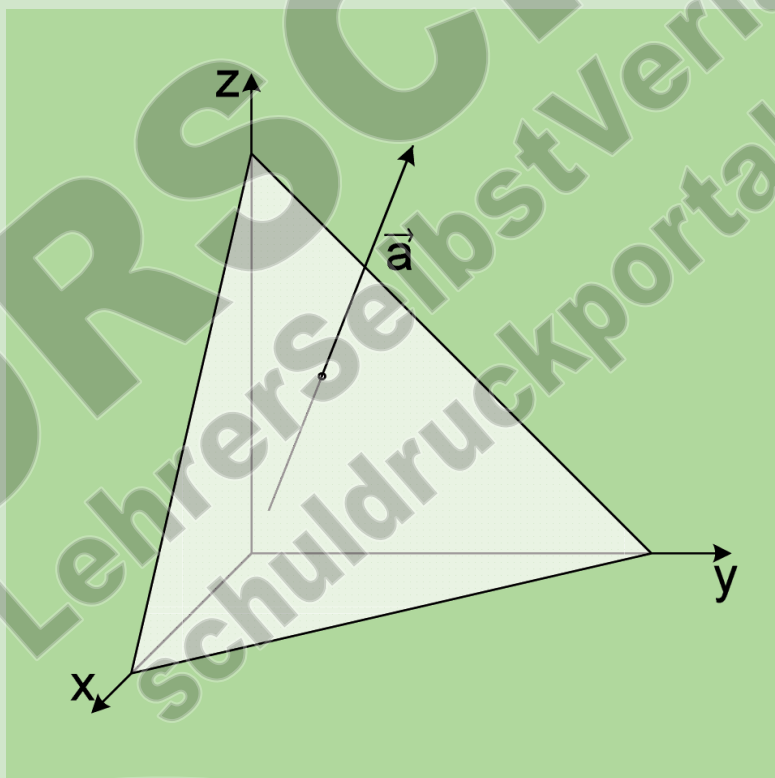


Lineare Algebra

selbstorganisiert erlernen



Ursula Pirkel

Umschlag Vorderseite (Innen) (unbedruckt)

Hier können Sie noch Vorlagen einfügen

Oberstudienrätin Ursula Pirkel
Lineare Algebra
selbstorganisiert lernen

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Lineare Gleichungssysteme
mit zwei Variablen

Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen	9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen	17

Einführung in die Vektorrechnung

Kapitel 3 – Koordinatensysteme	23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu den Vektoren	25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren	33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Linearer Abhängigkeit	43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit	47

Geraden in der Ebene und im Raum

Kapitel 8 – Parameterdarstellung von Geraden	49
Kapitel 9 – Lagebeziehung von Geraden	55
Kapitel 10 – Skalares und Vektorielles Kreuzprodukt	59
Kapitel 11 – Vektorebene und Ebenengleichung	65

Ebenen im Raum

Kapitel 12 – Darstellung von Ebenen	69
Kapitel 13 – Beziehung zwischen Ebenen	81
Kapitel 14 – Lagebeziehung von Ebenen	85
Kapitel 15 – Abstände	99
Kapitel 16 – Schnittwinkel	105
Kapitel 17 – Ebenenschnitte	107

Lineare Abbildungen

Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen	119
Kapitel 19 – Determinanten	125
Kapitel 20 – Lineare Abbildungen	137
Kapitel 21 – Eigenwerte und Eigenvektoren	143
Kapitel 22 – Diagonalisierung	145
Kapitel 23 – Verkettung von linearen Abbildungen	149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen $Ax = x'$	153

Gesamte Verantwortung für die Inhalte dieses Buches liegt bei der Autorin. Alle Rechte vorbehalten. (ISBN 978-3-031-266-001-266)

Alle Rechte vorbehalten. Alle Rechte vorbehalten. Alle Rechte vorbehalten.

Alle Rechte vorbehalten. Alle Rechte vorbehalten. Alle Rechte vorbehalten.

Alle Rechte vorbehalten. Alle Rechte vorbehalten. Alle Rechte vorbehalten.

Alle Rechte vorbehalten. Alle Rechte vorbehalten. Alle Rechte vorbehalten.

Alle Rechte vorbehalten. Alle Rechte vorbehalten. Alle Rechte vorbehalten.

Alle Rechte vorbehalten. Alle Rechte vorbehalten. Alle Rechte vorbehalten.

Alle Rechte vorbehalten. Alle Rechte vorbehalten. Alle Rechte vorbehalten.

Oberstudienrätin Ursula F. H.

Lineare Algebra

selbstorganisiert erlernen

Lineare Mathematik

Bestellnummer 02-031-266



LEHRER
SELBST
VERLAG

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Stand: 21.07.2014

Alle Rechte vorbehalten. All rights reserved.
Nachdruck, Vervielfältigung und Verbreitung,
die sich nicht aus dem Inhalt des Buchs ergibt,
ist ohne schriftliche Genehmigung des Verlags
nicht gestattet.

LehrerSelbstVerlag
LehrerSelbstVerlag GmbH, Koblenz (Germany) 2013
schuldruckportal.de

www.f-druck.de

Vorwort	5
Vorbetrachtungen	7
Lineare Gleichungssysteme	
Kapitel 1 Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen	9
Kapitel 2 Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen	17
Einführung in die Vektoralgebra	
Kapitel 3 Koordinatensystem	23
Kapitel 4 Grundbegriffe des Vektors	25
Kapitel 5 Berechnen mit Vektoren	33
Kapitel 6 Lösen von Vektorgleichungen bei Linearkombinationen	43
Kapitel 7 Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit	47
Geraden in der Ebene und im Raum	
Kapitel 8 Parametendarstellung von Geraden	49
Kapitel 9 Lagebeziehung von Geraden	55
Kapitel 10 Skalarprodukt	59
Kapitel 11 Winkelberechnungen	65
Ebenen im Raum	
Kapitel 12 Darstellung von Ebenen	69
Kapitel 13 Besondere Ebenen	81
Kapitel 14 Lagebeziehungen von Ebenen	85
Kapitel 15 Schnittwinkel	99
Kapitel 16 Schnittwinkel	105
Kapitel 17 Ebenenscharen	107

Lineare Abbildungen

Kapitel 18
Grundlegendes zu Matrizen 125

Kapitel 19
Projektion 125

Kapitel 20
Spiegelung 137

Kapitel 21
Zentrische Streckung aus dem Ursprung 143

Kapitel 22
Drehungen 144

Kapitel 23
Verkettung von linearen Abbildungen 149

Kapitel 24
Überblick linearer Abbildungen $Ax = b$ 153

Vorwort

Die Konzeption des vorliegenden Arbeitsbuches beruht auf meinen langjährigen Unterrichtserfahrungen in der Oberstufe von beruflichen Gymnasien in Südhessen. Im Mittelpunkt der Zielsetzung steht hier, den Schülerinnen und Schülern einen übersichtlichen Weg durch die Vielfalt der Methoden und Lösungswege in der linearen Algebra aufzuzeigen. Demzufolge haben die einzelnen Kapitel eine zusammenhängende, aufeinander aufbauende Struktur, wobei für die jeweilige Problemstellung meist nur ein Lösungsweg zum Ansatz kommt. Ergänzt durch Übungsaufgaben aus Schulbüchern oder anderen Quellen, erhalten die Schülerinnen und Schüler einen umfassenden Überblick über die im Inhaltsverzeichnis aufgeführten Themen, die im Wesentlichen den Anforderungen des hessischen Landesabiturs im Grund- und Leistungskurs entsprechen.

Die Form der Aufgabenstellung stellt eine Anleitung für selbstorganisierte Lernformen dar. In der Praxis bilden sich Lernteams, in denen die Schülerinnen und Schüler im Dialog die Inhalte eigenständig erarbeiten. Häufig kommt es zu Diskussionen in den Lerngruppen, in denen diese Lernform praktiziert wird und zum Standart geworden ist, auch untereinander und zwischen Erkenntnissen sowie Einsichten zur Theorie aus. Während leistungsstärkere Teams die Aufgabenstellungen und zusätzliche Übungen in der Regel ohne weitere Hilfe bewältigen und auch die Nachhilfe bietet diese Unterstützung.

Die Aufgabenstellung ihrer Kompetenzen zu fördern. Die Aufgabenstellungen erfordern zudem, dass die Sachverhalte oder Zusammenhänge zu beschreiben sowie Ansätze zu begründen. Dadurch werden neben rein themenspezifischen auch sprachliche Kompetenzen gefördert. Die Verwendung der Formeln und die Lehrerzentrierte Lernform wird nur noch zu Beginn der Wiederholung und der Besprechung von Hausaufgaben genutzt. Damit wird den Erkenntnissen der Schülerinnen und den daraus resultierenden Formen der selbstorganisierten Lernformen einzusetzen und die umfangreiche Rechnung getragen.

Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Kommentare von Schülerinnen und Schülern

„Ich finde es gut, dass man, wenn man mal krank ist, zuhause das Arbeitsbuch nachvollziehen kann, was im Unterricht gemacht wurde. Dann hat man die Chance, anschließend ohne Unterstützung der Mitarbeiter zu können.“

„Ich finde es gut, dass man los von Blättern zu haben. Man verliert keine Seiten und hat am Schluss alles übersichtlich und kompakt.“

Zielgruppe

Die Unterlagen sind primär für den Unterricht im Grund- und Leistungskurs in der gymnasialen Oberstufe entwickelt worden, können aber auch an allen Einrichtungen, in denen die allgemeine Hochschulreife erworben werden kann, eingesetzt werden.

Ebenfalls ist das Konzept für Fachoberschulabsolventen geeignet, die an Hochschulen bzw. Fachhochschulen einen Studiengang wählen, der Mathematik beinhaltet. Angehende Studentinnen und Studenten, die keine oder nur sehr geringe Kenntnisse im Bereich der Linearen Algebra haben, können sich selbstständig oder im Rahmen von Vorbereitungskursen in die für das Studium notwendige Thematik einarbeiten.

Auch im Bereich der Nachhilfe im Fach Mathematik ist der Einsatz der Lern- und Arbeitsmaterialien vorteilhaft, da die Unterlagen die Bedürfnisse der „Zugangsproblem in Mathematik“

Methodische und didaktische Anmerkungen

Die Unterlagen sind so ausgerichtet, dass die Schülerinnen und Schüler weitgehend eigenständig und individuell in der Schule, aber auch zu Hause die einzelnen Themen erlernen sowie bei Fehlzeiten nacharbeiten können. Hausaufgaben kann der zeitliche Rahmen der Lernzeiten gesteuert werden, da alle vom Lehrplan vorgegebenen Themen im Laufe des zur Verfügung stehenden Halbjahres erarbeitet werden können.

Da alle Kapitel aufeinander aufbauen, ist eine lückenlose Bearbeitung der einzelnen Aufgaben notwendig. Auf eine vollständig umfassende Theorie der linearen Gleichungssysteme wird zugunsten einer exemplarischen und anschaulichen Darstellung der Thematik verzichtet. Die hier angeführten Beispiele orientieren sich überwiegend an Bedürfnissen, die sich aus den Aufgabenstellungen der folgenden Kapitel ergeben.

Die Gestaltung der Unterlagen ermöglicht es, dass Erläuterungen, Erkenntnisse und Ergebnisse von ständig in das Arbeitsbuch hineingeschrieben werden, sodass keine unübersichtlichen Losblätter und Sammlungen entstehen und alle Informationen

ohne Suchaktionen schnell nachgeschlagen werden können. Die Lösungen zu den Aufgaben und Übungen des Arbeitsbuchs werden als eine Darstellung automatisch als Bestandteil mitgeliefert, da die Unterlagen ergänzen und im Arbeitsbuch eingesetzt werden, sind an Stellen, wo dies beispielsweise weitere Vertiefungen durch Lösungsaufgaben gewünscht sind Platzhalter einfügt worden, dass Verweise der Aufgaben und Lehrer auf zusätzliche Übungsaufgaben übersichtlich notiert werden können.

Anregungen und Verbesserungswünsche zu diesem Arbeitsbuch werden gerne entgegengenommen und können dem Verlag per Mail an der Adresse info@lehrerselbstverlag.de zugesendet werden.

Vorbetrachtungen

Der Bezug zur Realität ist im Fach Mathematik häufig die Voraussetzung für das Akzeptieren Neues zu lernen. Daher sollen an dieser Stelle, bevor der Einstieg in das Thema lineare Algebra, dem sehr abstrakt und anwendungsfremd erscheinenden Gebiet der linearen Gleichungssysteme erfolgt, zunächst einige Beispiele für praktische Anwendungen erläutert werden.

Vektoren in der Physik

Der der aus dem Physikunterricht bekannte Begriff des Vektors spielt eine zentrale Rolle in der linearen Algebra. Sie sicherlich wissen, besitzen alle Größen, die eine Richtung haben, einen vektoriellen Charakter. Dies bedeutet beispielsweise bei Kräften, die in unterschiedliche Richtungen wirken, dass man die Kräfte einfach addieren darf.



Wetterkarte und lineare Algebra

Die Erstellung von Wetterkarten mit der Berechnung von Windstärke, Windrichtung und der Bewegung der Tief- und Hochdruckgebiete basiert auf der Anwendung Vektorrechnung.

Computerspiele programmieren

Bei der Programmierung von Computerspielen wird der dreidimensionale Raum auf einem zweidimensionalen Bildschirm abgebildet. Die Abbildung bzw. der linearen Algebra auf dem zweidimensionalen Bildschirm wird durch die Wahl von geeigneten Stellen des Bildschirms erreicht.



Flugsicherung

Die Berechnung von Abständen und Abständen bei Flugbewegungen, falls zusätzlich die Richtung der Flugbewegungen bekannt ist, wird mit Hilfe der linearen Algebra, der Vektorrechnung ermöglicht.

Raum für Notizen



Kapitel 1: Lineare Gleichungssysteme 2. Ordnung

Allgemeines

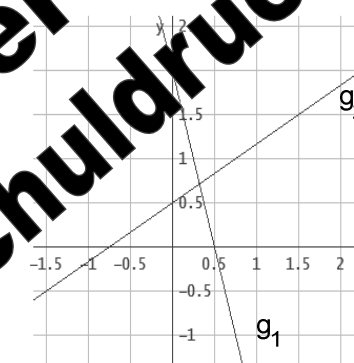
Der Umgang mit linearen Gleichungssystemen (LGS) gehört zu den grundlegenden Arbeitstechniken der linearen Algebra. Neben vielseitiger Verwendung bei Anwendungsproblemen kennen Sie lineare Gleichungssysteme bereits aus Schnittpunktberechnungen von Geraden oder auch aus Rekonstruktionsaufgaben von ganzrationalen Funktionen. In diesem Kapitel werden lineare Gleichungssysteme zunächst anhand von Schnittpunktberechnungen bei Geraden in der Ebene behandelt, um die Bedeutung von Lösungen möglichst anschaulich zu verdeutlichen. Im weiteren Verlauf des Kurses werden Sie feststellen, dass die Lösungen von linearen Gleichungssystemen auch noch andere, auf den jeweiligen Kontext der Aufgabenstellung hin zutreffende, Bedeutungen haben können.

Aufgabe 1.1

Bekanntes aus neuem Blickwinkel: Schnittpunktproblem bei Geraden in der Ebene

Verdeutlichen Sie sich anhand der folgenden Beispiele die Schreibweisen im Umgang mit linearen Gleichungssystemen. Finden Sie die Lösungen für die drei dargestellten Fallbeispiele nachvollziehen und anschließend die Lösungsvorgehensweise erläutern.

a) Beispiel: Zwei Geraden schneiden sich



Schnittpunktproblem in der Schreibweise der linearen Algebra

Die gebildeten Geraden werden der Analysis in der Funktionschreibweise bzw. mit y links von Gleichheitszeichen dargestellt.

Gerade g_1 : $y = -4x + 2$

Gerade

In der linearen Algebra können Gleichungen für Geraden auch wie folgt vorliegen, wobei je nach Kontext x_1 und y als x_2 bezeichnet werden können. Für die gebildeten Geraden gilt dann:

Gerade g_1 : $4x_1 + y = 2$ oder $4x + y = 2$

Gerade g_2 : $4x_1 - 6x_2 = -3$ oder $4x - 6y = -3$

Umformen der Gerade II

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4x - 6y = -3$$

In der Analysis werden Schnittpunkte in der Regel durch Gleichsetzen berechnet:

$$\begin{aligned} g_1 &= g_2 \\ -4x + 2 &= \frac{2}{3}x + \frac{1}{2} \\ \frac{14}{3}x &= \frac{3}{2} \\ x &= \frac{9}{28} \approx 0,32 \end{aligned}$$

Einsetzen von x in eine der beiden Gleichungen liefert $y = \frac{5}{7} \approx 0,71$

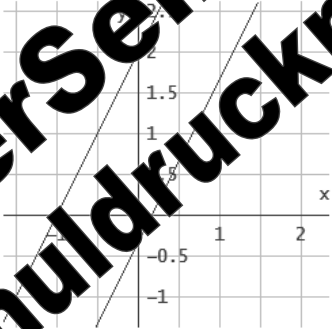
In der linearen Algebra löst man die Gleichungssysteme meist mit Hilfe des Additionsverfahrens oder Einsetzungsverfahrens. Für dieses Beispiel bietet sich das Additionsverfahren an, wenn man die zweite von der ersten Gleichung subtrahiert:

$$\begin{array}{rcl} \text{I} & 4x + y & = 2 \\ \text{II} & 4x - 6y & = -1 \\ \hline & 7y & = 3 \end{array}$$

Einsetzen von y in eine der beiden Gleichungen liefert wie bei dem Gleichsetzungsverfahren der Analysis $x = \frac{9}{28} \approx 0,32$

Der Begriff des Additionsverfahrens wird auch verwendet, wenn man die Gleichungen subtrahiert.

b) Beispiel 2: Zwei Geraden sind parallel



Schreibweise in der Analysis

Schreibweise in der linearen Algebra

Die Abbildung

Die beiden abgebildeten Geraden können auch folgendermaßen dargestellt werden.

Schnittpunkt durch Gleichsetzen berechnen:

$$\begin{aligned} 2x + 2 &= 2x + \frac{1}{3} \\ \text{aus:} & 2 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

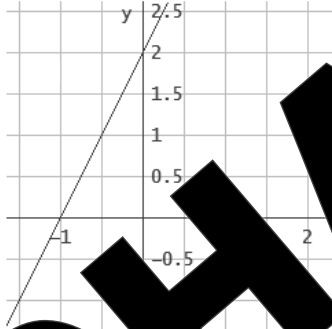
Wenn es keine Lösung gibt, dann sind die Geraden parallel.

Mit Hilfe des Additionsverfahrens erhält man hier analog zum Einsetzungsverfahren einen Widerspruch.

$$\begin{array}{rcl} \text{I} & -2x + y & = 2 \\ \text{II} & 6x - 3y & = 1 \\ \hline \text{I} & -6x + 3y & = 6 \\ \text{II} & 6x - 3y & = 1 \\ \hline & 0 & = 7 \end{array}$$

Wenn das Additionsverfahren zu einem Widerspruch führt kann man im Text der Aufgabenstellung auf parallel hinweisen.

c) Beispiel 3: Zwei Geraden sind identisch



Schreibweise in der Analysis

Schreibweise in der linearen Algebra

Bei zwei identischen Geraden kann man in der Analysis auch identische Gleichungen schreiben vor:

$$\begin{aligned} g_1: & y = 2x + 2 \\ g_2: & y = 2x + 2 \end{aligned}$$

Man erkennt sofort, dass man durch Gleichsetzen die Lösung $2 = 2$ oder $0 = 0$, also eine allgemeingültige Lösung erhält. D.h. bei zwei identischen Geraden in dieser Form kann man sofort schließen, dass die beiden Geraden identisch sind. Damit ist das LGS für unendlich viele Werte von x und y lösbar, da jeder Punkt auf der Geraden eine Lösung für das LGS ist.

Bei zwei identischen Geraden können sich die Gleichungen in der linearen Algebra durch ein Gleiches unterscheiden:

$$\begin{aligned} g_1: & -2x + y = 2 \\ g_2: & 4x - 2y = -4 \end{aligned}$$

Mit Hilfe des Additionsverfahrens erhält man, wenn man die Gleichungen links nebeneinander schreibt, den allgemeingültigen Ausdruck $0 = 0$ und die gleiche Interpretation für das Ergebnis.

Zusammenfassung: Zwei Gleichungssystemen mit 2 Gleichungen und 2 Variablen

1. Wenn es eine Lösung für jede der beiden Geraden gibt, dann gibt es eine eindeutige Lösung, da bei der Rechnung ein Widerspruch entsteht, und es keine Lösung gibt.
2. Wenn es eine Lösung für jede der beiden Geraden gibt, dann gibt es eine eindeutige Lösung, da bei der Rechnung ein Widerspruch entsteht, und es keine Lösung gibt.
3. Wenn es eine Lösung für jede der beiden Geraden gibt, dann gibt es eine eindeutige Lösung, da bei der Rechnung ein Widerspruch entsteht, und es keine Lösung gibt.

Aufgabe 1.2

Allgemeine Betrachtungen zu linearen Gleichungssystemen mit zwei Variablen und mehr als zwei Gleichungen

Die Lösungsansätze vieler Aufgaben in der linearen Algebra führen auf lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen aber mehr als zwei Gleichungen. Man bezeichnet solche Gleichungssysteme auch als **überbestimmte** lineare Gleichungssysteme. Veranschaulichen Sie sich anhand der folgenden Beispiele, wie die Lösung schrittweise berechnet wird und was dabei beachtet werden muss. Übertragen Sie Ihre Überlegungen jeweils auf die Aufgabenstellungen in folgender Tabelle.

Beispiel 1: Überbestimmtes LGS mit eindeutiger Lösung

Schritt 1: Die gegebenen Gleichungen mit den römischen Ziffern I und II kennzeichnen und feststellen, dass Gleichung I und II linear unabhängig sind.

Schritt 4: Additionsverfahren mit den zwei ausgewählten Gleichungen.

Schritt 5: Die Gleichungen I und II addieren, um die Variable y zu eliminieren. Nach Wahl der Gleichungen kann der Widerspruch auch sofort auftreten.

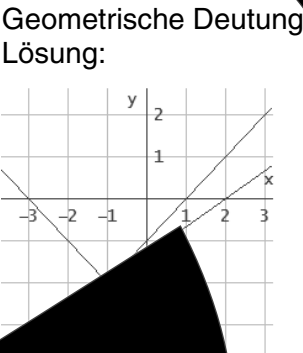
Schritt 6: Beide Gleichungen in die dritte Gleichung einsetzen. Da die dritte Gleichung nicht erfüllt wird, gibt es keine Lösung für das LGS.

Schritt 2: Zunächst die Gleichung I und II addieren, um die Variable y zu eliminieren. Man wählt die Gleichung I und II, da sie die einfachsten Koeffizienten für y haben. Die Gleichung III wird zunächst weggelassen.

Schritt 3: Rechts neben den Gleichungen angeben, welche Gleichungen addiert oder subtrahiert werden.

I: $2x - y = 4$
II: $x - y = 1$
III: $x + y = -3$
II + III:
 $2x = -2$
 $x = -1$

x und y in I einsetzen:
Lösung: $(-1/-2)$



Die drei Geraden schneiden sich im Punkt $S(-1/-2)$.

Beispiel 2: Überbestimmte lineare Gleichungssysteme ohne Lösung

Oftmals hängen die notwendigen Schritte bei der Lösung von Gleichungssystemen davon ab, welche Gleichungen für das Additionsverfahren verwendet werden und welche Gleichungen zunächst weglässt. Dies soll durch die Lösungswege 1 und 2 für die folgenden überbestimmten linearen Gleichungssysteme verdeutlicht werden. Die einzelnen Lösungsschritte erfolgen analog zu Beispiel 1.

Lösungsweg 1:

I: $-2x + 4y = 6$
II: $x - 2y = 3$
III: $3x + 2y = 1$
IV: $4x = 4$
 $x = 1$

I zunächst weglassen
II + III

x in II einsetzen:

x und y in I einsetzen:

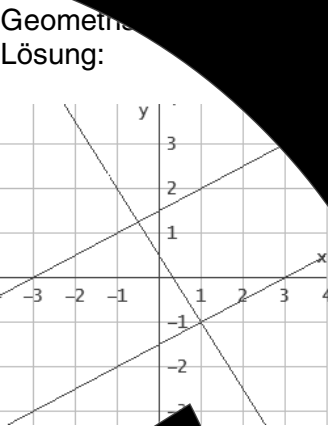
Lösung: keine

Lösungsweg 2:

I: $-2x + 4y = 6$
II: $x - 2y = 3$
III: $3x + 2y = 1$
IV: $4x = 4$
 $x = 1$

I + 2II
I zunächst weglassen

Nach Wahl der Gleichungen kann der Widerspruch auch sofort auftreten.



Die drei Geraden schneiden sich im Punkt $S(1/1)$.

Bei einem überbestimmten LGS müssen die mit zwei Gleichungen ermittelten Lösungen immer in der nicht verwendeten Gleichung getestet werden. (Vgl. Schritt 5 bei Beispiel 1) Bei einem Widerspruch ist das gesamte LGS nicht lösbar.

Beispiel 3: Überbestimmte LGS mit unendlich vielen Lösungen

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad -2x + 4y = -6 \\ \text{II} \quad x - 2y = 3 \\ \text{III} \quad 3x - 6y = 9 \\ \text{IV} \quad 0 = 0 \end{array}$$

3II - III oder I + 2II oder 3I + 2III

Je nach Addition
Summe führt zum
Ergebnis 0, da alle drei
Gleichungen identisch sind.

Da alle drei Gleichungen identisch sind, steht man dem Problem, nur eine Gleichung für die Bestimmung von x und y zu haben. Wie Sie sicherlich bereits wissen, benötigt man für die Bestimmung von zwei Variablen auch zwei Gleichungen. Die folgenden Überlegungen zeigen, wie man vorgehen kann, um dieses Problem zu lösen.

Ermittlung einer allgemeingültigen Lösung:

y frei wählen:

$$y = r$$

y in II einsetzen

$$x = 6 + 2r$$

Lösung:

$$(6 + 2r / r)$$

Info: Da es unendlich viele Lösungen geben kann, wählt man als Lösung für y eine beliebige Zahl in Form eines **Parameters** $r \in \mathbb{R}$.

Alternative Lösung:

x frei wählen:

$$x = r$$

x in II einsetzen:

$$\begin{aligned} r - 2y &= 3 \\ -2y &= 3 - r \\ y &= \frac{1}{2}r - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$(r / \frac{1}{2}r - \frac{3}{2})$$

Man nennt diese Lösung auch als parametrisierte Lösung, da sie vom Parameter r abhängt. Parametrisierte Lösungen hängen von der Wahl des Parameters ab und können damit unterschiedlich sein. Wählt man, wie in der ersten Lösung, $x = r$, ergibt sich:

Geometrische Bedeutung der parametrisierten Lösung:

Fasst man jede Gleichung des LGS als Geradengleichung auf, so handelt es sich um die gleichen Geraden, da alle drei Gleichungen identisch sind. Formt man jede Gleichung in die Normalform um, erhält man für alle drei Gleichungen die gleiche Gerade. Ein

Vergleich der parametrisierten Lösung bei alternativer Lösung mit der Wahl $y = r$ zeigt, dass sich bei y der gleiche Ausdruck wie für die Gerade ergibt. Daraus folgt, dass eine parametrisierte Lösung eine Gerade beschreiben kann.

Beispiel 4

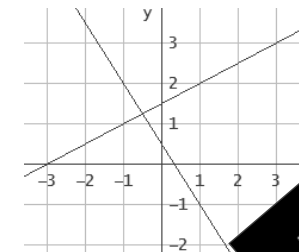
Im folgenden Beispiel entsteht durch Addition von Zeile I und II ein Ausdruck in Form $0 = 0$. Begründen Sie anhand der Abbildung und durch Vervollständigung des Textes, warum es trotzdem eine eindeutige Lösung gibt, die als Schnittpunkt von drei Geraden interpretiert werden kann.

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad -2x + 4y = 6 \\ \text{II} \quad x - 2y = -3 \\ \text{III} \quad 3x + 2y = 1 \\ \text{IV} \quad 0 = 0 \end{array}$$

I + 2II

III zunächst weglassen

Bei einem überbestimmten LGS bedeutet eine $0 = 0$ Zeile nicht, dass es unendlich viele Lösungen gibt, da die zusätzlichen Gleichungen nicht berücksichtigt werden müssen.



Gleichung I und Gleichung II repräsentieren die Gerade. Die beiden Geraden schneiden sich also in einem Punkt, und diesen über-einander Schnittpunkt haben daher genau einen Schnittpunkt. Dieser Schnittpunkt ist also der Schnittpunkt der Geraden, die durch Gleichung III repräsentiert wird. Dieser Schnittpunkt ist also der Schnittpunkt des LGS.

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad -2x + 4y = 6 \\ \text{II} \quad x - 2y = -3 \\ \text{III} \quad 3x + 2y = 1 \end{array}$$

III zunächst weglassen

II + III

Einsetzen in II liefert $y = \frac{5}{4}$. Damit ist $(-0,5 / 1,25)$ die Lösung des LGS.

Wenn bei einem überbestimmten LGS eine $0 = 0$ Zeile entsteht, muss man das Lösungsverfahren mit anderen Gleichungen neu beginnen.

Übungen:

Prüfen Sie, ob die folgenden Lineare Gleichungssysteme eine eindeutige oder eine parametrisierte Lösung haben. Ordnen Sie die Lösungen den Abbildungen 1 bis 4 zu, die in den Beispielen dargestellt, auf eine

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & x + y = -2 \\ & 3x - y = -1 \\ & x + 2y = 9 \end{aligned}$$

(Lösung: (1/4))

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & x + 2y = 8 \\ & -x + 3y = 6 \\ & 2x + y = 4 \end{aligned}$$

(Lösung: keine)

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad & 4x + 2y = 8 \\ & 2x = 4 - y \\ & 3y = 12 - 6x \end{aligned}$$

(Lösung: $(r / 4 - 2r)$)

Abbildung 1

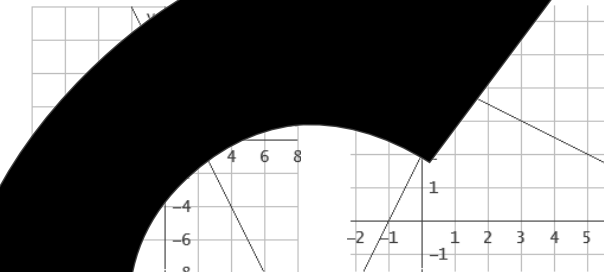


Abbildung 3

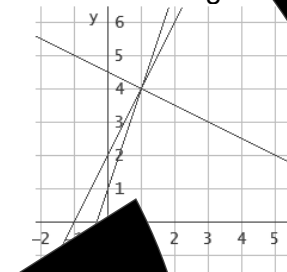
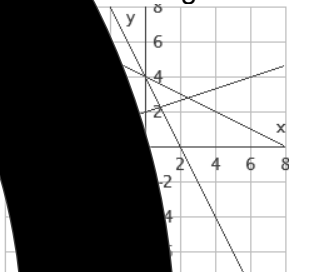


Abbildung 4



Rechnungen auf der folgenden Seite

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkel
Lineare Algebra
selbstorganisiert lernen

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Kapitel 1
**Lineare Gleichungssysteme
mit drei Variablen**

Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen	9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen	17

Einführung in die Vektorrechnung

Kapitel 3 – Koordinatensysteme	23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu den Vektoren	25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren	33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Linearer Abhängigkeit	43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit	47

Geraden in der Ebene und im Raum

Kapitel 8 – Parameterdarstellung von Geraden	49
Kapitel 9 – Lagebeziehung von Geraden	55
Kapitel 10 – Skalares und Vektoriell-Produkt	59
Kapitel 11 – Vektorprodukt und Kreuzprodukt	65

Ebenen im Raum

Kapitel 12 – Darstellung von Ebenen	69
Kapitel 13 – Beziehung von Ebenen	81
Kapitel 14 – Lagebeziehungen von Ebenen	85
Kapitel 15 – Abstände	99
Kapitel 16 – Schnittwinkel	105
Kapitel 17 – Ebenenscharen	107

Lineare Abbildungen

Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen	119
Kapitel 19 – Determinanten	125
Kapitel 20 – Lineare Abbildungen	137
Kapitel 21 – Lineare Abbildungen	143
Kapitel 22 – Lineare Abbildungen	145
Kapitel 23 – Verkettung von linearen Abbildungen	149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen $Ax = x'$	153

Gesamte Verantwortung für das Erlernen der Inhalte liegt bei den Studierenden (031-266)

Alle Rechte vorbehalten. All rights reserved.

Druck, auch auszugsweise, vorbehalten. All rights reserved.

aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet

SelbstVerlag

tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germany)

Lehrerselbstverlag.de

www.f-druck.de

Kapitel 2: Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen

Erweitert man die Betrachtungen der Ebene auf den dreidimensionalen Raum, kommt die dritte Richtung z hinzu. Damit entstehen bei Aufgabenstellungen der linearen Algebra Gleichungssysteme mit drei Variablen. Im Folgenden werden die für lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen erfolgten Untersuchungen auf die Betrachtung von linearen Gleichungssystemen mit drei Variablen erweitert.

Um die Lösungsverfahren, wie bei den Geraden der Ebene, anschaulich zu deuten, sollen die bei der Lösung eines LGS erhaltenen Ergebnisse geometrisch interpretiert werden. Gleichungen der Form $ax + by + cz = d$ oder $ax + by = c$ oder $ax + by + cz = 0$ können als Ebenen im Raum aufgefasst werden. Damit kann man hier, entsprechend zu Geraden der Ebene, das Lösen von linearen Gleichungssystemen als Schnittpunktprobleme von Ebenen im Raum betrachten.

Aufgabe 2.1

Wie in der Ebene können auch bei der Lösung eines LGS die Möglichkeiten keine Lösung, genau eine Lösung und unendlich viele Lösungen auftreten. Man muss allerdings die Interpretation der Lösung auf die Ebene übertragen.

- ① Keine Lösung bedeutet, dass die betrachteten Ebenen keinen gemeinsamen Punkt haben.
 - ② Eine eindeutige Lösung bedeutet, dass sich die betrachteten Ebenen genau in einem Punkt schneiden.
 - ③ Eine unendliche Lösung bedeutet, dass es unendlich viele Lösungen gibt, die als gemeinsame Schnittgerade der betrachteten Ebenen aufgefasst werden können.
- Man kann zur Veranschaulichung der drei Lösungsmöglichkeiten von linearen Gleichungssystemen im Raum die folgenden Lösungsziffern ①, ② und ③ zu.

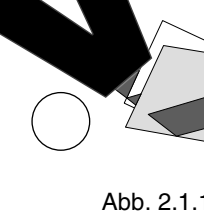


Abb. 2.1.1

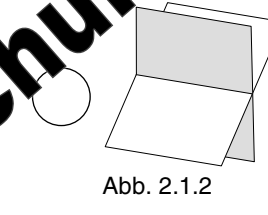


Abb. 2.1.2

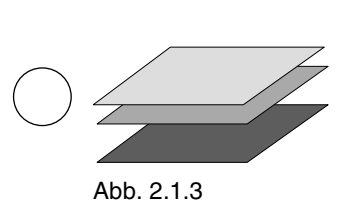


Abb. 2.1.3

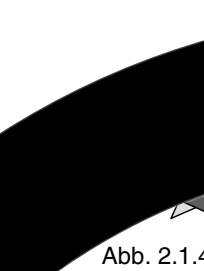


Abb. 2.1.4

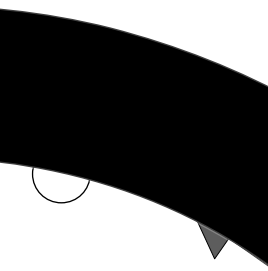


Abb. 2.1.5

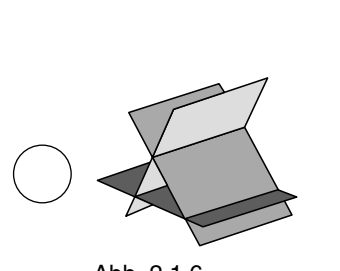


Abb. 2.1.6

Aufgabe 2.2

Gleichungssysteme mit drei Variablen und genau eine Lösung

Bei der Lösung linearer Gleichungssysteme höherer Ordnung kann man systematisch vorgehen. Eine Möglichkeit hierzu stellt das Additionsverfahren nach Gauß dar, das auch als **Gauß-Verfahren** bekannt ist.

Prüfen Sie sich anhand des folgenden Beispiels, wie das Additionsverfahren verwendet wird, und wenden Sie es auf die folgenden Aufgaben an.

Beispiel:

$$\begin{aligned} 2x + y + 3z &= -3 \\ x - y - z &= 4 \\ 3x - 2y + 2z &= 5 \end{aligned}$$

Lineare Gleichungssystem mit dem Additionsverfahren lösen:

Schritt 1:
Die Gleichungen fortlaufend durchnummerieren

Schritt 2:
Gleichung I mit Gleichungen II und III so addieren oder subtrahieren, dass die Variable x eliminiert wird.

Schritt 3:
Mit den Gleichungen IV und V wie bei einem LGS mit zwei Variablen weiterrechnen und damit eine der verbleibenden Variablen eliminieren.

Schritt 4:
Das Ergebnis, je nach Rechenaufwand, in die Gleichung IV oder V einsetzen und die nächste Variable berechnen.

Schritt 5:
Beide Ergebnisse in die erste Gleichung einsetzen und die Variable x berechnen.

Es existiert eine eindeutige Lösung. Die Lagebeziehung der Ebenen entspricht damit der Abb. 2.1.1

I $2x + y + 3z = -3$
II $x - y - z = 4$
III $3x - 2y + 2z = 5$
IV $3y + 5z = -11$
V $7y + 5z = -19$
VI $-4y = -2$

y in IV einsetzen: $3(-1/2) + 5z = -11 \Rightarrow -3/2 + 5z = -11 \Rightarrow 5z = -11 + 3/2 = -19/2 \Rightarrow z = -19/10$

z in V einsetzen: $7y + 5(-19/10) = -19 \Rightarrow 7y - 19/2 = -19 \Rightarrow 7y = -19 + 19/2 = -19/2 \Rightarrow y = -19/14$

y und z in I einsetzen: $2x - 19/14 - 57/10 = -3 \Rightarrow 2x = -3 + 19/14 + 57/10 = 1/70 \Rightarrow x = 1/140$

Lösung: $(1/140, -19/14, -19/10)$

Übungen:

Ü2.1 Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme:

a)

Zur Kontrolle: $(-1/3, 3/2)$

b)

$$\begin{aligned} 5x - 3y + z &= 19 \\ 2x + 3y + z &= 4 \\ x - 2z &= 1 \end{aligned}$$

Zur Kontrolle:
 $(3/-1/1)$

Lineare Gleichungssysteme ohne Additionsverfahren lösen

Können in einem LGS in jeder Zeile nicht alle Variablen vor, so kann man die Lösung oft auch ohne Additionsverfahren ermitteln.

Gegeben ist das folgende LGS

Zeile 2 liefert schon das Ergebnis für y .

I $3x - 5y + z = 1$
II $2x + 3y + z = 4$
III $x - 2z = 1$

Einsetzen in III:

$$\begin{aligned} 2x + 2 &= 0 \\ 2x &= -2 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

y und x einsetzen:

$$\begin{aligned} -1 - 5 \cdot 2 - 2z &= -1 \\ -10 - 2z &= -1 \\ -2z &= 9 \\ z &= -4.5 \end{aligned}$$

$(-1/2/-4.5)$

Ü2.2 Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme:

a)

Zur Kontrolle: $(-1/3, 3/2)$

Ü2.2 Lösen Sie das folgende LGS ohne Anwendung des Additionsverfahrens

$$\begin{aligned} 2x + 3z &= 3 \\ 4x &= 6 \\ 2x + 3y - 2z &= 2 \end{aligned}$$

Zur Kontrolle:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} / - \frac{1}{3} / 0$$

Aufgabe 2.3

Gleichungssysteme mit drei Gleichungen, drei Variablen und keiner Lösung

Bei zwei linearen Gleichungssystemen mit zwei Variablen kann es bei der Lösung eines linearen Gleichungssystems mit drei Variablen zu Widersprüchen kommen. Das LGS ist dann nicht lösbar.

Zeigen Sie durch Ergänzen der folgenden Rechnung, dass ein Widerspruch entsteht und das LGS nicht lösbar ist.

$$\begin{array}{lcl} \text{I} & x + 2y - z & = 1 \\ \text{II} & x + y & = 2 \\ \text{III} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} & y - z & = 1 \\ & & \text{IV - III} \end{array}$$

$$\quad = \quad \Rightarrow \text{Widerspruch, kein LGS}$$

Es existiert keine Lösung. Die Lagebeziehung der Ebenen entspricht damit der Abb. 2.1.3 oder 2.1.6 entsprechen.

Aufgabe 2.4

Gleichungssysteme mit drei Variablen und unendlich vielen Lösungen

Abbildung 2.1.5 zeigt drei Ebenen, die als gemeinsame Punkte eine Gerade enthalten. Das bedeutet, dass es unendlich viele Punkte gibt, die gleichzeitig zu allen drei Ebenen gehören. Interpretiert man jede der drei Gleichungen eines linearen Gleichungssystems als Ebene, so gibt es unendlich viele Werte, die dieses LGS lösen, nämlich alle Punkte, die auf der Schnittgeraden liegen. Entsprechend zur Aufgabe 1.2 Beispiel 3 erhält man eine parametrisierte Lösung.

Bearbeiten Sie das Beispiel, indem Sie die fehlenden Schritte ergänzen.

$$\begin{array}{lcl} \text{I} & x + 2y + 2z & = 1 \\ \text{II} & 2x & + z = 3 \\ \text{III} & 3x + 2y + 3z & = 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{II} - \text{I} & & \\ \text{III} - \text{I} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{IV} & & = \\ \text{V} & & \end{array}$$

$$\text{IV} - \text{V}$$

$$0 = 0$$

$$z \text{ frei wählen.} \quad z = 4r$$

$$\text{in II einsetzen:} \quad 4r + z = -1$$

$$4y = -1 - 4r$$

$$y = -\frac{1}{4} - r$$

$$z \text{ und } y \text{ in I einsetzen:} \quad x + 2\left(-\frac{1}{4} - r\right) + 2 \cdot 4r = -1$$

$$\left(-\frac{1}{2} - 2r / -\frac{1}{4} - 3r / 4r\right)$$

mögliche Lösung:

werden. Aus dieser Lösung eine Gleichung erzeugt.

Beachten Sie, dass die parametrisierte Lösung von der Wahl des Parameters r bzw. vom Vielfachen von r abhängt und sich hier unterschiedliche Lösungen ergeben können.

Aufgabe 2.5

Unterbestimmte lineare Gleichungssysteme mit 3 Variablen

Während bei den späteren Aufgabenstellungen überbestimmte lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen praktisch keine Bedeutung haben, werden jedoch häufiger unterbestimmte lineare Gleichungssysteme auftreten. Das sind lineare Gleichungssysteme, bei denen weniger Gleichungen als Variablen vorhanden sind. Da das Beispiel von Aufgabe 2.4. strenggenommen zu dieser Sorte von linearen Gleichungssystemen zählt, ist das Lösungsverfahren veranschaulicht.

Bearbeiten Sie das Beispiel, indem Sie die fehlenden Rechenschritte ergänzen.

Beispiel:

I

$x + 2y + z = 3$

II

$2x + y + z = 1$

+

=

z = 5

mit

ergibt sich

z:

$z = -3$

einschreiben in

$2x + y + z = 1$

$2x + y - 3 = 1$

x = _____

Lösung

$(r - 2 / r, -3r)$

Wird nur noch eine Gleichung für zwei Variablen vorhanden ist, kann eine Variable (hier ist es günstig r für y zu wählen) frei gewählt werden.

Begründen Sie, warum die geometrische Deutung dieser Aufgabe der Abbildung Abb.2.1.2 entspricht, und erläutern Sie, wie man die Lösung anschaulich interpretieren kann.

Ergänzen Sie:

Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Lineare Algebra

selbstorganisiert lernen



Koordinatensystem

Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen	9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen	17

Einführung in die Vektorrechnung

Kapitel 3 – Koordinatensysteme	23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu den Vektoren	25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren	33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Linearer Abhängigkeit	43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit	47

Geraden in der Ebene und im Raum

Kapitel 8 – Parameterdarstellung von Geraden	49
Kapitel 9 – Lagebeziehung von Geraden	55
Kapitel 10 – Skalare Produkte	59
Kapitel 11 – Vektorprodukt und Kreuzprodukt	65

Ebenen im Raum

Kapitel 12 – Darstellung von Ebenen	69
Kapitel 13 – Beziehung zwischen Ebenen	81
Kapitel 14 – Lagebeziehung von Ebenen	85
Kapitel 15 – Abstände	99
Kapitel 16 – Schnittwinkel	105
Kapitel 17 – Ebenenscharen	107

Lineare Abbildungen

Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen	119
Kapitel 19 – Determinanten	125
Kapitel 20 – Lineare Abbildungen	137
Kapitel 21 – Eigenwerte und Eigenvektoren	143
Kapitel 22 – Lineare Abbildungen	145
Kapitel 23 – Verkettung von linearen Abbildungen	149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen $Ax = x'$	153

Gesamte Darstellung ist urheberrechtlich geschützt und darf nicht ohne schriftliche Genehmigung des Lehrerselbstverlags (Lehrerselbstverlag, 031-266) veröffentlicht werden.

Alle Rechte vorbehalten. All rights reserved.

Druck, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,

aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

LehrerselbstVerlag

LehrerselbstVerlag & Freunde GmbH, Koblenz (Germany)

Lehrerselbstverlag.de

www.f-druck.de

Kapitel 3: Koordinatensysteme**1. Koordinaten in der Ebene**

Die Darstellung von Punkten in der Ebene ist Ihnen hinlänglich bekannt. Alle Punkte liegen in der Papierebene, und man kann bei gegebenen Koordinaten einen Punkt $p(x/y)$ im Koordinatensystem eintragen und die Koordinaten eines markierten Punktes, hier $A(2/3)$, direkt ablesen.

Die x-Achse kann auch mit x_1 -Achse und die y-Achse auch mit x_2 -Achse bezeichnet werden.

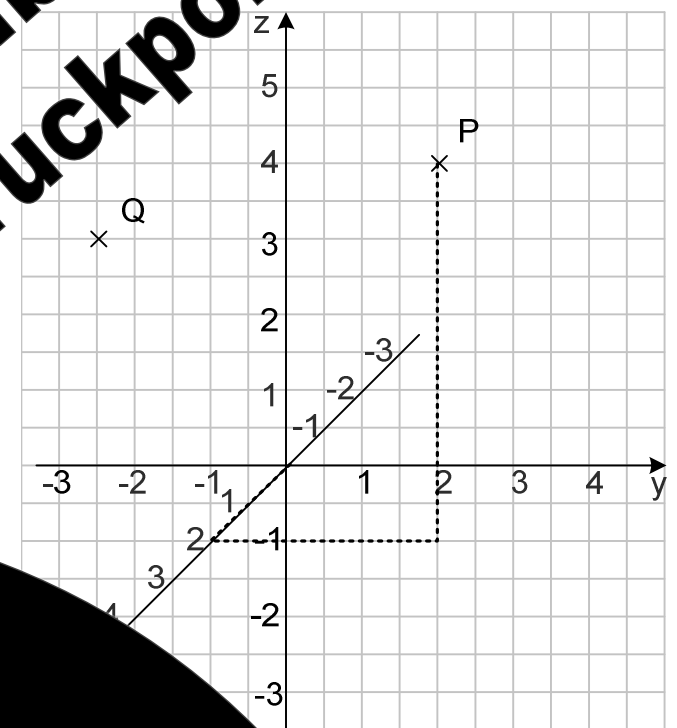
**2. Koordinaten im Raum**

Für die Darstellung von Punkten im Raum trifft man in der Regel auf eine dreidimensionale Darstellung.

Die ersten beiden y - und x_2 -Koordinaten und die z - bzw. x_3 -Koordinate liegen in der Papierebene.

Die x_1 -Achse wird als diagonale Achse bezeichnet und zeigt sich nach vorne aus der Papierebene nach vorne heraus, wobei die Achse der Skala verkürzt gezeichnet werden. Die Form der Darstellung wird auch als Kavalierperspektive bezeichnet.

Hier: Abstand y- und z-Achse zwei Kästchen
Abstand x-Achse ein Kästchen diagonal



Die Punkte P und Q sind in der Papierebene eingezeichnet.

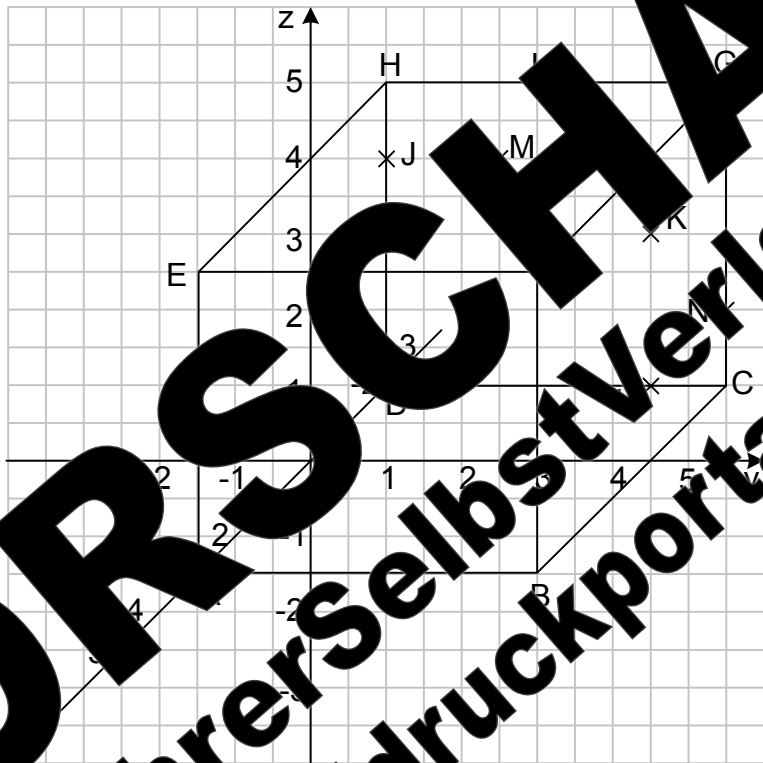
Das Eintragen bzw. Ablesen von Punkt $P(2/3/5)$ erfolgt mit Hilfe der gestrichelten Hilfslinie: vom Ursprung ausgehend 2 Einheiten nach vorne entlang der x-Achse, 3 Einheiten nach rechts parallel zur y-Achse, 5 Einheiten nach oben parallel zur z-Achse.

Für die Darstellung ist eine deutliche Aussage zu machen, wenn keine Hilfslinien eingezeichnet werden.

In der Wahl der Skalierung können räumliche Verhältnisse verzerrt erscheinen. Beispielsweise kann ein Würfel wie ein Quader aussehen.

Übungen

Ü3.1 Koordinaten ablesen und eintragen.



- a) Nennen Sie die Eckpunkte des Quaders.
- A (/ /) B (/ /) C (/ /) D (/ /)
- E (/ /) F (/ /) G (/ /) H (/ /)
- b) Bestimmen Sie die Koordinaten der eingezeichneten Punkte.
- I (/ /) J (/ /) K (/ /) L (/ /)
- M (/ /) N (/ /) O (/ /)

c) Tragen Sie die folgenden Punkte ein. Verwenden Sie, wenn nötig, die Hilfslinien:

P(1/0/0) Q(4/-1/3) R(3/4,5/-2) S(-1/1/3)

Die Lösungen der Übungen:

Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Lineare Algebra
selbstorganisiert lernen



Grundlegendes zu den

Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen	9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen	17

Einführung in die Vektorrechnung

Kapitel 3 – Koordinatensysteme	23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu den Vektoren	25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren	33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Linearer Abhängigkeit	43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit	47

Geraden in der Ebene und im Raum

Kapitel 8 – Parameterdarstellung von Geraden	49
Kapitel 9 – Lagebeziehung von Geraden	55
Kapitel 10 – Skalares und Vektorielles Produkt	59
Kapitel 11 – Vektorielles Kreuzprodukt	65

Ebenen in der Ebene

Kapitel 12 – Darstellung von Ebenen	69
Kapitel 13 – Beziehung zwischen Ebenen	81
Kapitel 14 – Lagebeziehungen von Ebenen	85
Kapitel 15 – Abstände	99
Kapitel 16 – Schnittwinkel	105
Kapitel 17 – Ebenenbüscheln	107

Lineare Abbildungen

Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen	119
Kapitel 19 – Determinanten	125
Kapitel 20 – Lineare Abbildungen	137
Kapitel 21 – Eigenwerte und Eigenvektoren	143
Kapitel 22 – Lineare Abbildungen	145
Kapitel 23 – Verkettung von linearen Abbildungen	149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen $Ax = x'$	153

Gesamte Verantwortung für das Erlernen der Inhalte liegt bei den Studierenden (031-266)

Alle Rechte vorbehalten. All rights reserved.

Druck, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte, aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet

SelbstVerlag

Lehrers & Freunde GmbH, Koblenz (Germany)

Lehrerselbstverlag.de

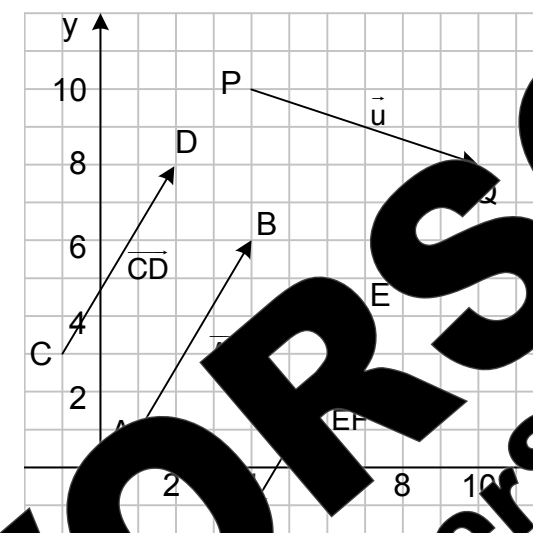
www.f-druck.de

Kapitel 4: Grundlegendes zu Vektoren

Vektoren in der Ebene

Aufgabe 4.1

In der folgenden Abbildung sind Vektoren in der Ebene dargestellt. Ergänzen Sie die Zusammenhänge, indem Sie die gegebenen Informationen in der Tabelle nachfolgend ergänzen.



Die Punkte: $A(1/2)$, $B(4/6)$, $C(-1/2)$, $D(2/8)$, $E(7/4)$, $F(4/-1)$, $P(10/10)$, $Q(12/8)$

Vektoren werden durch einen Pfeil über einem Buchstaben, der immer von links nach rechts zeigt, gekennzeichnet. Wie bei Strecken verwendet man entweder die großen Buchstaben von Anfangs- und Endpunkt oder einen kleinen Buchstaben.

Kenntnisse von Vektoren:

Der Pfeil von A nach B wird als Vektor $\overrightarrow{AB}$ bezeichnet.

Der Pfeil von C nach D wird als Vektor $\overrightarrow{CD}$ bezeichnet.

Der Pfeil von E nach F wird als Vektor $\overrightarrow{EF}$ bezeichnet.

Der Pfeil von P nach Q wird als Vektor $\overrightarrow{PQ}$ bezeichnet.

Spaltenvektoren

Die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ bewirken die gleiche Verschiebung eines Punktes im Koordinatensystem an. Diese

Verschiebung wird mit Hilfe der Spaltenschreibweise

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Verschiebung um -3 in x-Richtung und -5 in y-Richtung

Fazit

Die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ bewirken die gleiche Verschiebung. Sie gehören zur gleichen Klasse.

Die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ bzw. $\overrightarrow{CD}$ und der Vektor $\overrightarrow{EF}$ sind gleich lang, aber entgegengesetzt. Man bezeichnet solche Vektoren als **Gegenvektoren**.

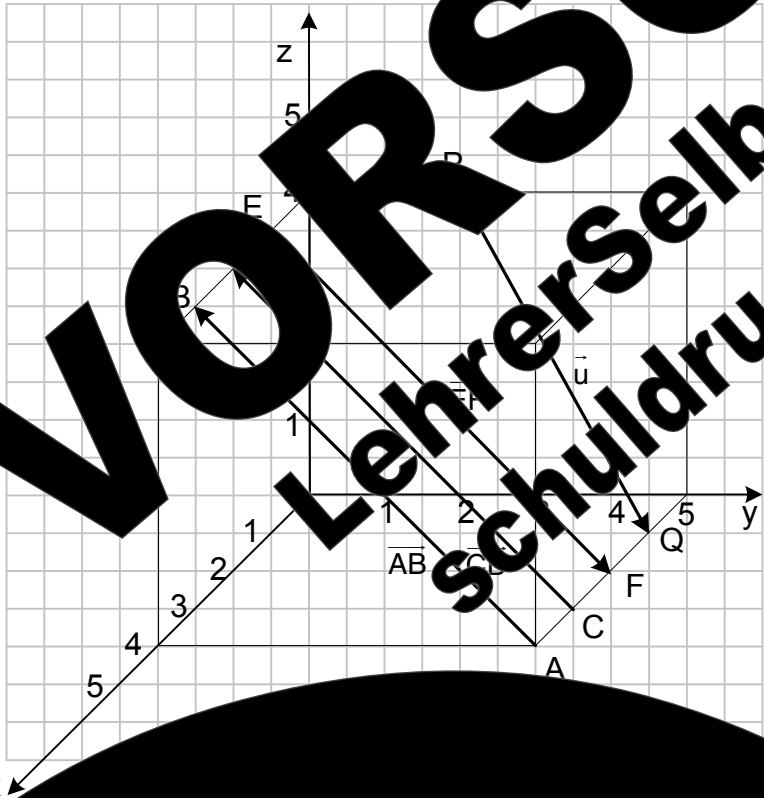
Vektoren im Raum

Aufgabe 4.2

Die Betrachtungen zur Vektordarstellung in der Ebene können direkt auf den Raum übertragen werden. Man muss lediglich beachten, dass die Vektoren im Raum drei Komponenten haben und in der

Spaltenschreibweise in der Form $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dargestellt werden.

In der folgenden Abbildung sind Vektoren im Raum dargestellt. Mitteln Sie die Koordinaten, deren Anfangs- und Endpunkte C, D, E, F, P sowie Q und bestimmen Sie die Vektoren $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{EF}$ sowie $\overrightarrow{PQ}$ in Spaltendarstellung.



- A(4/5/0)
- B(3/0/4)
- C(____/____/____)
- D(____/____/____)
- E(____/____/____)
- F(____/____/____)
- P(____/____/____)
- Q(____/____/____)

$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} ______ \\ ______ \\ ______ \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} ______ \\ ______ \\ ______ \end{pmatrix}$

Ergänzen Sie:
Die Vektoren $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{EF}$ sind _____ vektoren, da sie gleich
entgegen gerichtet sind.

Berechnen von Vektoren aus den Koordinaten der Endpunkte

Aufgabe 4.3

Der Vektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ aus Aufgabe 4.1 wurde durch Abzählen der Einheiten im Koordinatensystem ermittelt. Sie haben bei Aufgabe 4.2 vielleicht schon festgestellt, dass die Vektoren auch direkt aus dem Anfangs- und Endpunkt des Vektors ermittelt werden können.

Koordinate der Pfeilspitze: B(4/6) Koordinate des Pfeilendes: A(1/1)

Koordinaten des Vektors

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 6-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Koordinaten
des Pfeilendes

Koordinaten
des Pfeilendes

Überprüfen Sie, ob es auch für den Vektor $\overrightarrow{AC}$ aus Aufgabe 4.2

Grundlegende Definitionen und Zusammenhänge

- Die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ sind jeweils **Repräsentanten** der gleichen Klasse von Vektoren $\vec{v}$, die eine Verschiebung eines Punktes um die Richtung bzw. v_3 in z-Richtung bewirken. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \vec{v}$
- Die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind gleich lang, wenn $|\vec{u}| = |\vec{v}|$. Der Vektor $-\vec{u}$ hat die gleiche Länge wie $\vec{u}$, zeigt aber in die entgegengesetzte Richtung. Er heißt daher den Vektor $\vec{u}$ **Gegenvektor** oder **Antivektor** (die Spaltenschreibweise für Ebene entsprechend)
- Ein Vektor, der einen Punkt A auf sich selbst abbildet (also keine Verschiebung bewirkt), heißt **Nullvektor** und ist mit $\vec{0}$ bezeichnet.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$-\vec{u} = -\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_1 \\ -u_2 \\ -u_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ werden aus den Koordinaten der Punkte A($a_1/a_2/a_3$) und B($b_1/b_2/b_3$) durch die Berechnung der einzelnen Komponenten a_1 , a_2 und a_3 und b_1 , b_2 und b_3 berechnet:
 $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$ (für die Ebene gilt Entsprechendes.)

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$$

Übungen

Ü4.1 Gegeben ist der Vektor $\vec{AB}$

- a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors $\vec{AB}$ in Spaltendarstellung.

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{pmatrix}$$

- b) Zeichnen Sie einen weiteren beliebigen Repräsentanten der Klasse des Vektors $\vec{AB}$ ein.

- c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Gegenvektors von $\vec{AB}$ in Spaltendarstellung und zeichnen Sie einen beliebigen Repräsentanten des Gegenvektors von $\vec{AB}$ ein.

Gegenvektor: $\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{pmatrix}$

- d) Zeichnen Sie ausgehend vom Punkt $P(4/0/0)$ einen Repräsentanten des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ein.

- e) Bestimmen Sie die Koordinaten des Gegenvektors an. Gegenvektor: $\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{pmatrix}$

Ü4.2 Bestimmen Sie den Vektor $\vec{AB}$ aus den Koordinaten der Punkte $A(a_1/a_2)$ und $B(b_1/b_2)$ der Ebene bzw. $A(a_1/a_2/a_3)$ und $B(b_1/b_2/b_3)$ des Raumes für folgende Punkte:

- | | | | | | |
|----------|-------------|-------------|--------------|--------------|----|
| a) | b) | c) | f) | g) | h) |
| $A(2/1)$ | $B(1/2)$ | $A(2/7/4)$ | $A(3/1/-2)$ | $A(0/-3/1)$ | |
| $B(1/2)$ | $B(3/-2/0)$ | $B(3/-2/0)$ | $B(-1/4/-1)$ | $B(-2/-1/3)$ | |

Ergebnisse:

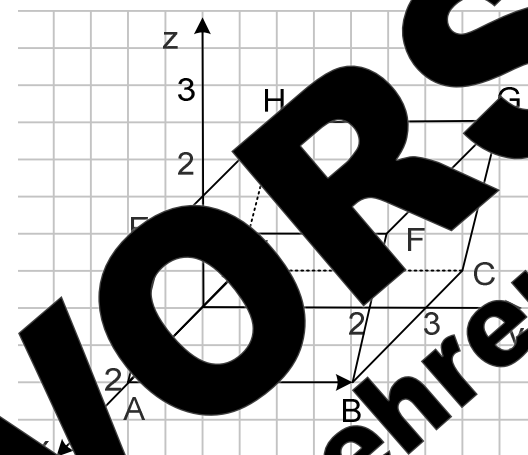
Ortsvektoren

Aufgabe 4.4

Gegeben ist der unten dargestellte verzerrte Quader. Man bezeichne den Körper als **Spat**. Gegeben sind die Punkte $A(2/0/0)$, $B(2/3/0)$, $C(-1/3/0)$ und $E(2/0/5/2)$. Bearbeiten Sie die Aufgabenstellung unter Anwendung der folgenden Definition:

Definition Ortsvektor:

Ein Vektor $\vec{a}$, der im Ursprung O des Koordinatensystems beginnt und dessen Pfeilspitze am Punkt A endet, wird als Ortsvektor bezeichnet. Der Ortsvektor erhält je nach Namen des Punktes zugehörigen kleinen Buchstaben: $\vec{a} = \vec{OA}$.

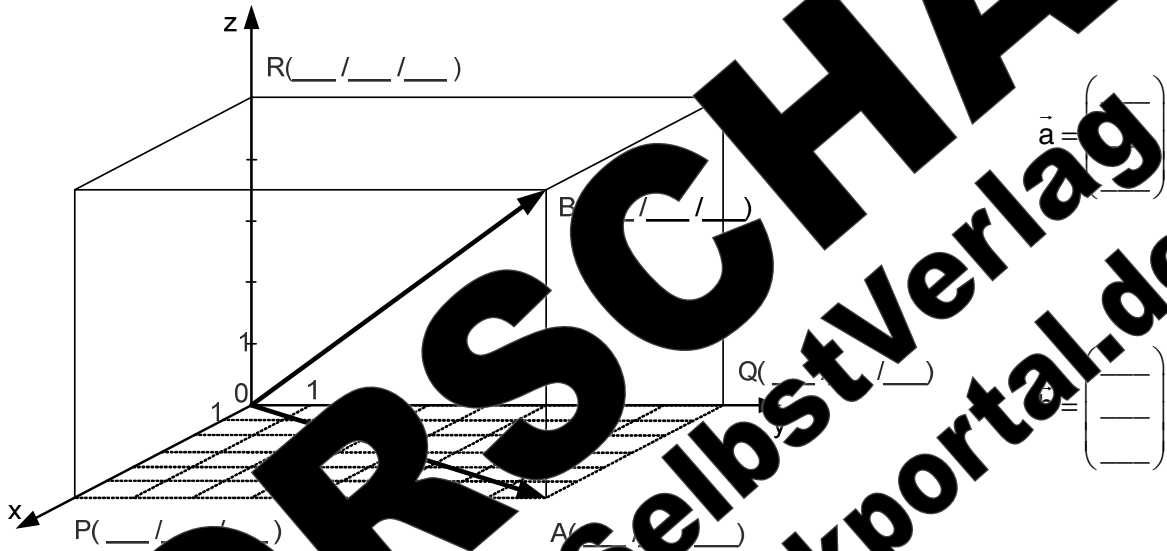


- a) Geben Sie die Ortsvektoren zu allen Eckpunkten an.
- b) Bestimmen Sie die Koordinatendarstellung der Vektoren $\vec{u} = \vec{AB}$, $\vec{v} = \vec{AD}$ und $\vec{w} = \vec{AE}$. Welche weiteren Vektoren gehören zur gleichen Vektorklasse wie $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$?
- c) Bestimmen Sie die Vektoren $\vec{BF}$, $\vec{AC}$, $\vec{AH}$, $\vec{CH}$, $\vec{BD}$ und $\vec{HF}$.

Der Betrag von Vektoren

Aufgabe 4.5

Gegeben ist das folgende Koordinatensystem mit den Ortsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.



a) Die Punkte P, Q, R, und B liegen an den Ecken des eingezeichneten Quaders. Tragen Sie die Koordinaten der Punkte in der Abbildung sowie die Koordinaten der Ortsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ein. Bestimmen Sie dann die Länge der folgenden Strecken:

$|\overline{OP}| = \quad \text{LE}$ $|\overline{OQ}| = \quad \text{LE}$ $|\overline{OR}| = \quad \text{LE}$

b) Erläutern Sie, wie die Länge der Strecken $\overline{OA}$, $\overline{AB}$ und $\overline{OB}$ berechnet wurden.

$ \overline{OA} = \sqrt{36 + 64} = 10$	$ \overline{AB} = 5$	$ \overline{OB} = \sqrt{100 + 25} = 11,2$

Definition

Der Betrag eines Vektors $\vec{a}$ im Koordinatensystem wird als Länge der Strecke $|\overline{OA}|$ bezeichnet, wobei O der Ursprung und A der Endpunkt des Vektors $\vec{a}$ ist. Übertragen auf die Vektorrechnung gilt Entsprechendes für den Ortsvektor $\vec{a}$. Der Anfangs- und Endpunkt eines Vektors $\overline{AB}$ entspricht der Länge des Vektors und der Betrag des Vektors $\overline{AB}$ bezeichnet. Man schreibt z. B.:

$|\overline{OA}| = 10 \text{ LE}$ oder einfach $|\vec{a}| = 10$

$|\overline{AB}| = 5$

c) Erläutern Sie den folgenden Ansatz für die Berechnung der Strecke $\overline{OB}$ bzw. des Betrages des Vektors $\vec{b}$. Formulieren Sie dabei auch, welcher Zusammenhang mit den Koordinaten des Ortsvektors $\vec{b}$ besteht. $|\overline{OB}| = |\vec{b}| = \sqrt{|\overline{OP}|^2 + |\overline{OQ}|^2 + |\overline{AB}|^2} = \sqrt{10^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{100 + 16 + 25} = \sqrt{141} \approx 11,8$

d) Erläutern Sie unter Verwendung der mathematischen Fachausdrücke *Summe, Komponenten des Vektor, Wurzel* in eigenen Worten, wie der Betrag eines Vektors berechnet wird.

Berechnen des Betrages eines Vektors

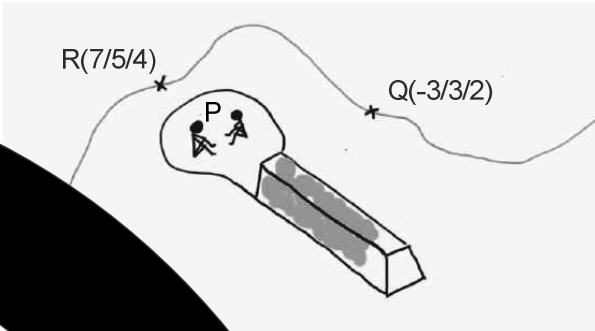
Betrag eines Vektors in der Ebene: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

Betrag eines Vektors $\vec{a}$ im Raum: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Übungen

Ü4.3 In einem Bergwerk sind nach dem Einsturz eines Schachtes Bergleute an der Stelle P(5/8/3) verschüttet. Um sie zu befreien, soll Sauerstoff zu ihnen geleitet werden.

Zeichnen Sie durch Rechnung die Stelle R für die Bohrung am günstigsten aus.



Ende Übungen:

Die Definition des Einheitsvektors

Aufgabe 4.6

Zeigen Sie mit Hilfe der folgenden Definition, dass die Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \\ 15 \end{pmatrix}$ Einheitsvektoren sind.

Definition Einheitsvektor:
Ein Vektor der Länge 1 bzw. mit dem Betrag 1 wird als Einheitsvektor bezeichnet. Dafür gilt:
in der Ebene: $|\vec{a}| = 1$ also $\sqrt{a_1^2 + a_2^2} = 1$
im Raum $|\vec{a}| = 1$ also $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = 1$



Ergänzen:

Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Lineare Algebra
selbstorganisiert lernen



Rechnen mit Vektoren



Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen	9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen	17

Einführung in die Vektorrechnung

Kapitel 3 – Koordinatensysteme	23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu des Vektoren	25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren	33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Linear	43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit	47

Geraden in der Ebene und im Raum

Kapitel 8 – Parameterdarstellung von Geraden	49
Kapitel 9 – Lagebeziehung	55
Kapitel 10 – Skalare	59
Kapitel 11 – Vektorprodukt	65

Ebermann

Kapitel 12 – Darstellung von Ebenen	69
Kapitel 13 – Besondere Ebenen	81
Kapitel 14 – Beziehungen zwischen Ebenen	85
Kapitel 15 – Abstände	99
Kapitel 16 – Schnittwinkel	105
Kapitel 17 – Ebenenfamilien	107

Lineare Abbildungen

Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen	119
Kapitel 19 – Diagonalisierung	125
Kapitel 20 – Eigenwerte und Eigenräume	137
Kapitel 21 – Jordan-Normalform	143
Kapitel 22 – Lineare Abbildungen	145
Kapitel 23 – Verkettung von linearen Abbildungen	149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen $Ax = x'$	153

Gesamte Kosten für die Teilnahme an der Online-Kursreihe selbstorganisiert erlernen (Bsp. 1000 €) - 031-266

State

Alle Rechte vorbehalten. All rights reserved.

... auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet

SelbstVerlag

tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germany)

LehrerSelbstVerlag.de

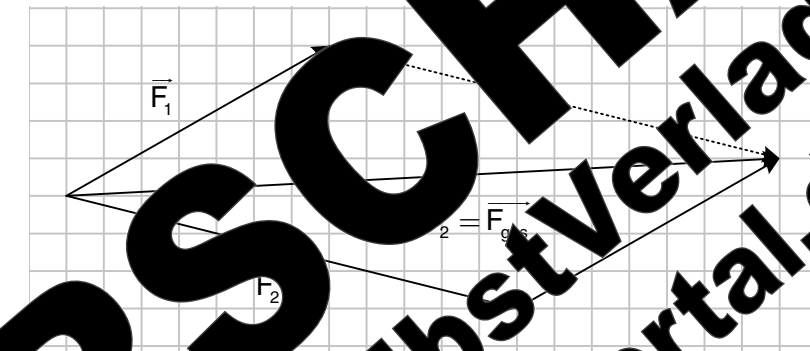
www.f-druck.de

Kapitel 5: Rechnen mit Vektoren

Addition und Subtraktion von Vektoren

Aufgabe 5.1

Aus dem Physikunterricht ist Ihnen bereits die Addition und Subtraktion zweier Vektoren mit Hilfe von Kräfteparallelogrammen bekannt. Die Addition und Subtraktion von Vektoren beruht auf dem gleichen Prinzip.



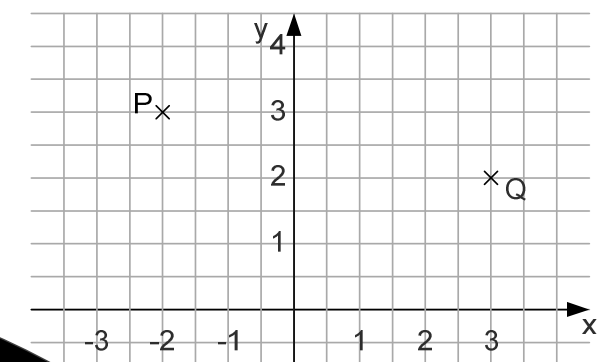
1. Addition von Vektoren

a) Zeichnen Sie Achsen in der Ebene

Zeichnen Sie die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

ausgangspunkt von Punkt P aus des Koordinatensystem ein

Zeichnen Sie auch den Vektor $\vec{c}$ ausgehend von der Spitze des Vektors $\vec{b}$ und den Vektor $\vec{b}$ ausgehend von der Spitze des Vektors $\vec{a}$ ein zweites Mal ein. Diese beiden Repräsentanten von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ treffen mit ihren Spitzen den Punkt Q. Verbinden Sie die Punkte P und Q.



b) Rechnerische Addition in der Ebene

Rechnerisch kann man zwei Vektoren addieren, indem man die Komponenten der Vektoren komponentenweise addiert. Führen Sie dies anhand der Werte des Beispiels oben durch und vergleichen Sie den resultierenden Vektor mit dem Vektor, den Sie grafisch erhalten haben.

$$2 = \begin{pmatrix} - \\ - \\ - \end{pmatrix}$$

gleich: _____

2. Subtraktion von Vektoren $\vec{a} - \vec{b} = \vec{d}$

a) Zeichnerische Subtraktion

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Zeichnen Sie den Vektor $\vec{a}$

ausgehend von Punkt P in das Koordinatensystem ein.

Zeichnen Sie danach den Gegenvektor von

also $-\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ausgehend von der Spitze des

Vektors $\vec{a}$ ein. Die Spitze des Gegenvektors

von $\vec{b}$ liegt im Punkt Q. Verbinden Sie P und Q

durch den Vektor $\vec{PQ} = \vec{d}$ und notieren Sie die

Koordinaten von $\vec{d}$ auf. Zeichnen Sie

$\vec{d} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$

b) Rechnerische Subtraktion in der Ebene

Die Subtraktion entspricht der Addition des Gegenvektors. Berechnen Sie $\vec{d}$ und vergleichen Sie mit dem zeichnerisch ermittelten Wert.

$$\vec{d} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$$

Vergleich: _____

Die in der Ebene und im Raum Subtraktion von Vektoren können direkt auf Basis der Koordinaten und die Merksätze.

Addition von Vektoren:

Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ werden addiert, indem man die Koordinaten komponentenweise addiert:

$$\text{Ebene: } \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} \quad \text{Raum: } \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

Subtraktion von Vektoren:

Der Vektor $\vec{b}$ wird vom Vektor $\vec{a}$ subtrahiert, indem man zu $\vec{a}$ den

Aufgabe 5.2

Addiert man zu einem Vektor seinen Gegenvektor, so erhält man in der Ebene und im Raum den Nullvektor. Ergänzen Sie die fehlenden Angaben:

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad + \quad \\ \quad + \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Aufgabe 5.3

Für das Rechnen mit reellen Zahlen gelten das Kommutativ- und das Assoziativgesetz. Prüfen Sie anhand der Informationen in Ihrem Buch oder anderen geeigneten Quellen, ob diese Gesetze auch für das Rechnen mit Vektoren Gültigkeit haben, und notieren Sie diese Gesetze.

Kommutativgesetz: _____

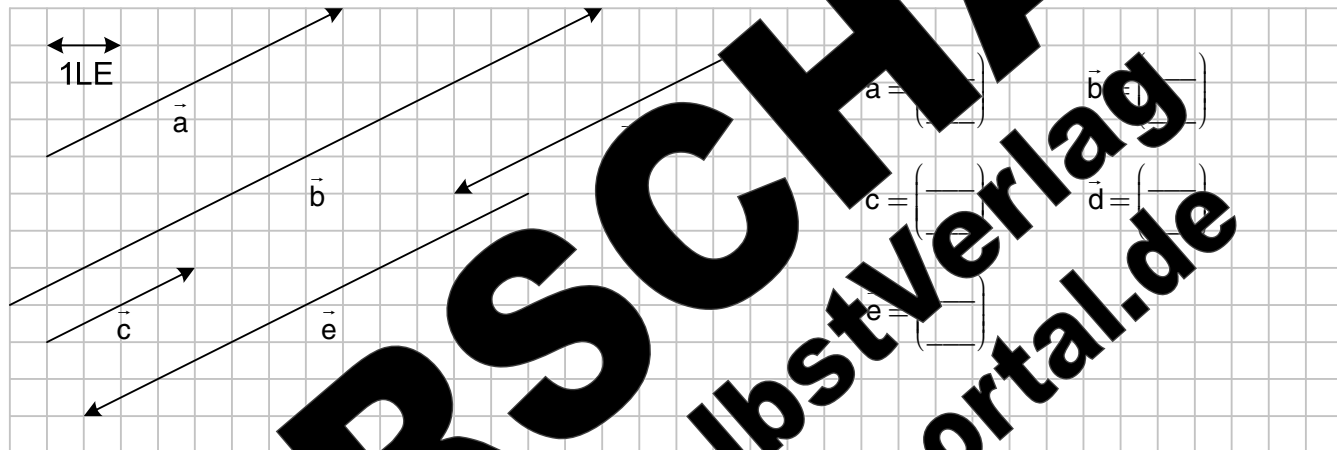
Assoziativgesetz: _____

Ergänzende Übungsaufgaben: _____

Multiplizieren von Vektoren mit reellen Zahlen

Aufgabe 5.4

- Bestimmen Sie die Koordinaten der abgebildeten Vektoren durch Ablesen der Zeichnung und tragen Sie die Werte ein.



- Nennen Sie die Vielfachheit zwischen dem Vektor $\vec{a}$ und den Vektoren $\vec{b}$ bis $\vec{e}$.

- Geben Sie die Vielfachheit zwischen dem Vektor $\vec{a}$ und den Vektoren $\vec{b}$ bis $\vec{e}$ an.

- Stellen Sie die Vektoren $\vec{b}$ bis $\vec{e}$ wie im Beispiel für Vektor $\vec{b}$ durch das Vielfache des Vektors $\vec{a}$ dar.

$$\vec{b} = 2\vec{a} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \underline{\quad} = \underline{\quad} \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$$

$$\vec{d} = \underline{\quad} = \underline{\quad} \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$$

Benutzen Sie im Merksatz die Angaben für den Raum.

Vektoren werden vervielfacht, wenn sie mit einer reellen Zahl r multipliziert, indem jede Komponente mit r multipliziert wird.

Für die Basis $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ gilt: $r\vec{a}_i = \begin{pmatrix} r \cdot a_{i1} \\ r \cdot a_{i2} \\ \vdots \\ r \cdot a_{in} \end{pmatrix}$

Für den Raum gilt: $r\vec{a} = \begin{pmatrix} r \cdot a_1 \\ r \cdot a_2 \\ \vdots \\ r \cdot a_n \end{pmatrix}$

Aufgabe 5.6

Erarbeiten Sie sich mit Hilfe Ihres Schulbuchs oder anderen geeigneten Quellen die Rechenregeln hinsichtlich der Multiplikation von Vektoren mit reellen Zahlen, und notieren Sie diese hier.



Übungen

Üb 11 Schreiben Sie die Vektoren als Produkt aus einer reellen Zahl und einem Vektor mit möglichst kleinen ganzzahligen Koordinaten:

a) $\begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 500 \end{pmatrix}$

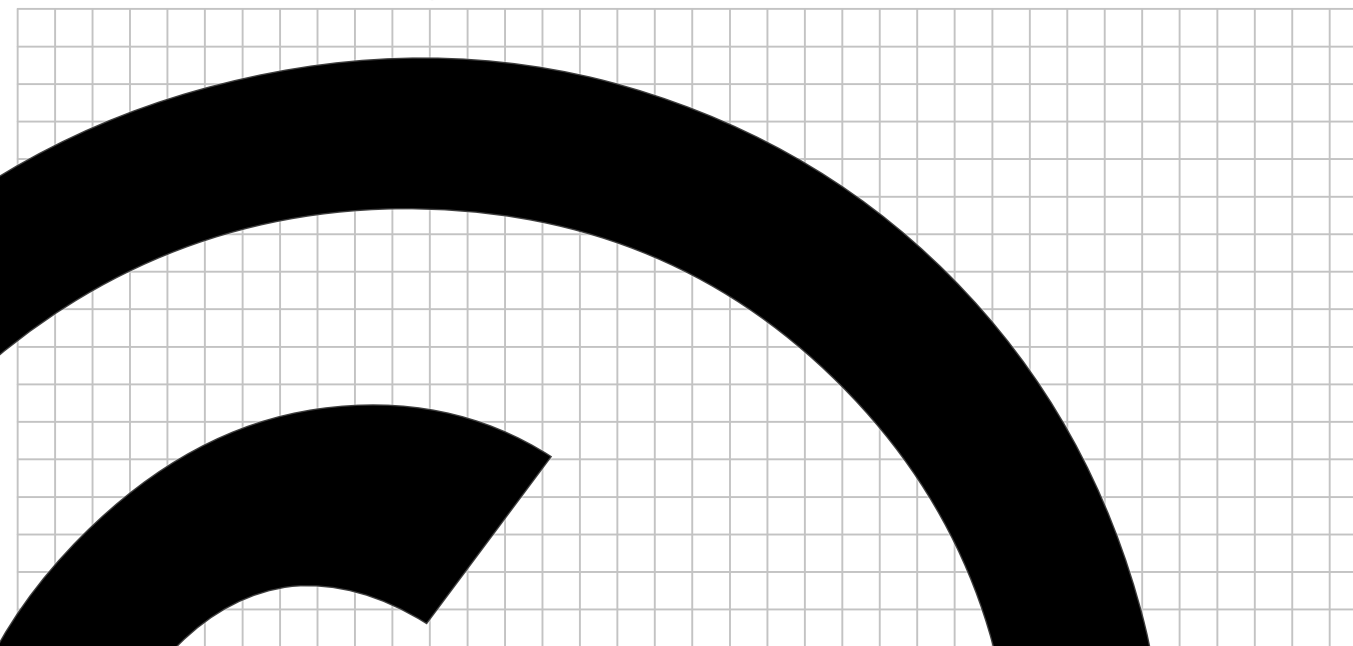
b) $\begin{pmatrix} 726 \\ -84 \\ 144 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2,5 \\ 0,5 \\ 1,5 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 3 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$



Notierte Übungen: _____

Berechnen des Einheitsvektors zu einem gegebenen Vektor

Aufgabe 5.7

Verdeutlichen Sie sich die folgenden Informationen und berechnen Sie $\vec{a}_0$ und $\vec{b}_0$.

Informationen:

- In der Abbildung nebenan sind Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sowie die zugehörigen Einheitsvektoren $\vec{a}_0$ und $\vec{b}_0$ eingezeichnet.
- Den Einheitsvektor zum Vektor $\vec{a}$ bezeichnet man mit $\vec{a}_0$.
- Der Vektor $\vec{a}$ bzw. $\vec{b}$ und ihr Einheitsvektor $\vec{a}_0$ bzw. $\vec{b}_0$ zeigen in die gleiche Richtung.
- Der Einheitsvektor $\vec{a}_0$ hat den Betrag 1, also gilt: $|\vec{a}_0| = 1$.
- Man berechnet den Einheitsvektor zum Vektor $\vec{a}$, indem man den Vektor $\vec{a}$ durch seinen Betrag dividiert.



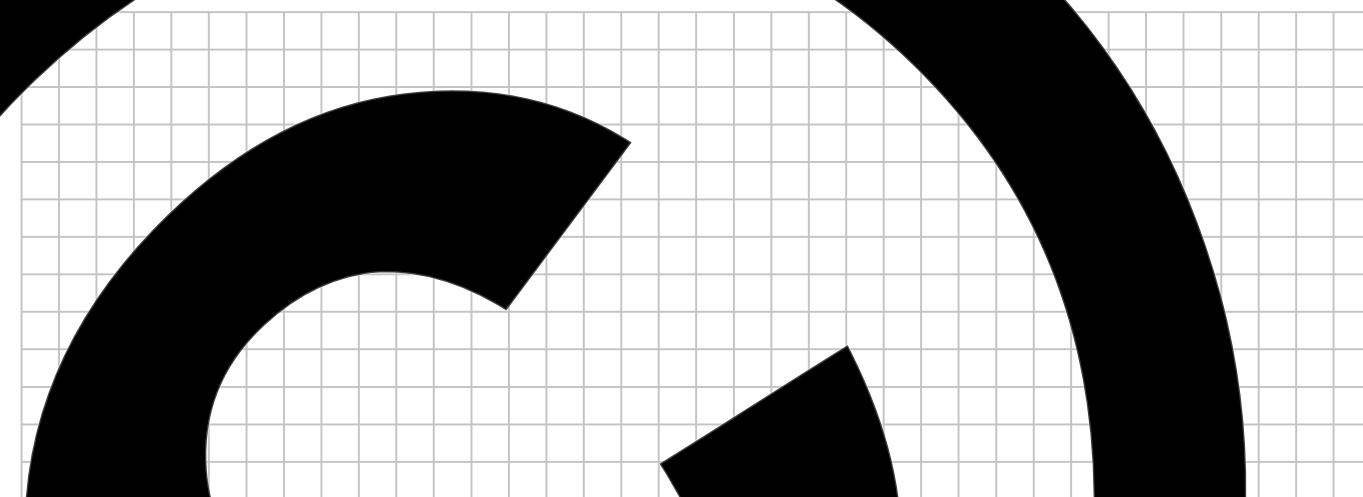
$$\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{6^2 + 8^2}} \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{100}} \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,8 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie $\vec{b}_0$ analog:

$$\vec{b}_0 =$$

Übung:

1. Berechnen Sie die Einheitsvektoren zu $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.



Addition vervielfachter Vektoren

Aufgabe 5.8

Beispiel

In der Abbildung neben wird der Vektor $\vec{w}$ durch eine Kombination aus den Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ erzeugt, indem man das Vierfache des Vektors $\vec{u}$ zum Zweifachen des Vektors $\vec{v}$ addiert. Durch Abzählen der Kästchen erhält man folgende

$$\text{Koordinaten für } \vec{w}: \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Rechnerisch lässt sich der Vektor $\vec{w}$ wie folgt ermitteln:

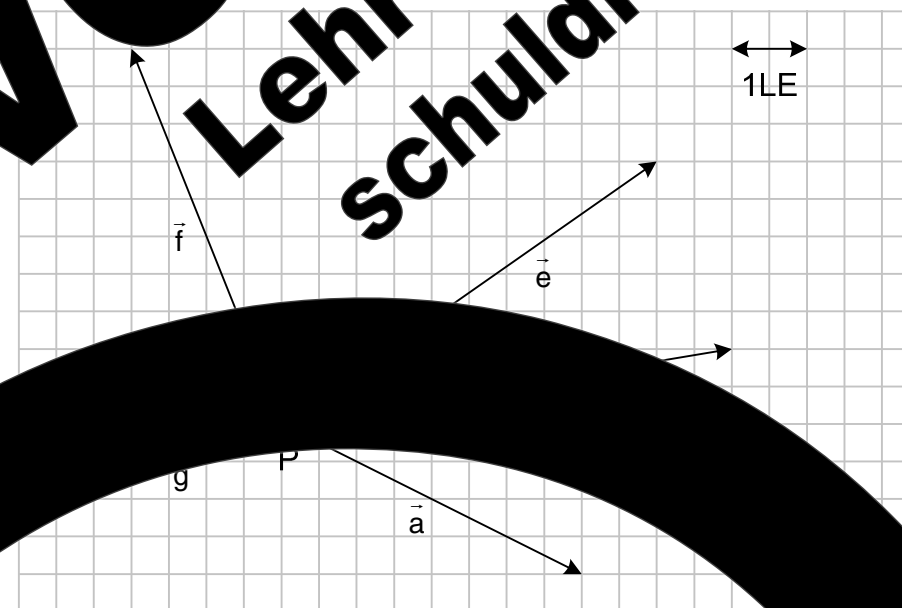
$$\vec{w} = 4\vec{u} + 2\vec{v} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ -0,5 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Aufgabenstellung

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$, $\vec{f}$ und $\vec{g}$.

1. Geben Sie die Koordinaten der abgebildeten Vektoren durch Ablesen aus der Abbildung an



$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$$

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$$

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$$

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$$

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$$

2. Zeichnen Sie den Vektor $\vec{w}$ wie im Beispiel durch Vektoraddition in der Abbildung ein.

3. Berechnen Sie den Vektor $\vec{w}$ von Vektor $\vec{c}$ durch Rechnung

$$\vec{w} = 2\vec{c} + 3\vec{d} = 2 \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} \text{ und prüfen Sie durch Abzählen der Kästchen, ob das Ergebnis mit der Zeichnung übereinstimmt.}$$

4. In Aufgabe 2 und 3 wurde der Vektor $\vec{c}$ mit Hilfe der gegebenen Beziehung $\vec{c} = \vec{a} + 3\vec{b}$ zur Hand eingezeichnet und dann berechnet. Nun sollen Sie umgekehrt vorgehen. Ermitteln Sie, wie sich die bereits gezeichneten Vektoren $\vec{d}$, $\vec{e}$, $\vec{f}$ und $\vec{g}$ aus einer Kombination der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellen lassen. Zeichnen Sie dazu wie im Beispiel die entsprechenden Hilfslinien ein und überprüfen Sie die Ergebnisse mit den unter 1. berechneten Koordinaten.

$\vec{d} =$ _____
 $\vec{e} =$ _____
 $\vec{f} =$ _____
 $\vec{g} =$ _____

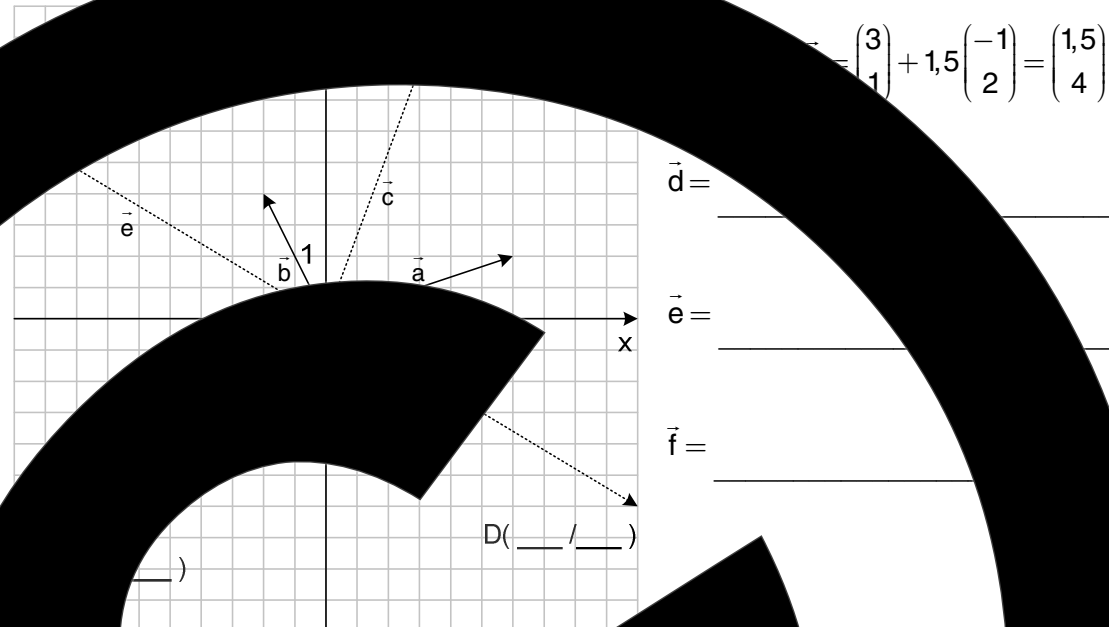
Fachbegriff für die Summe aus vervielfachten Vektoren:

Definition Linearkombination:

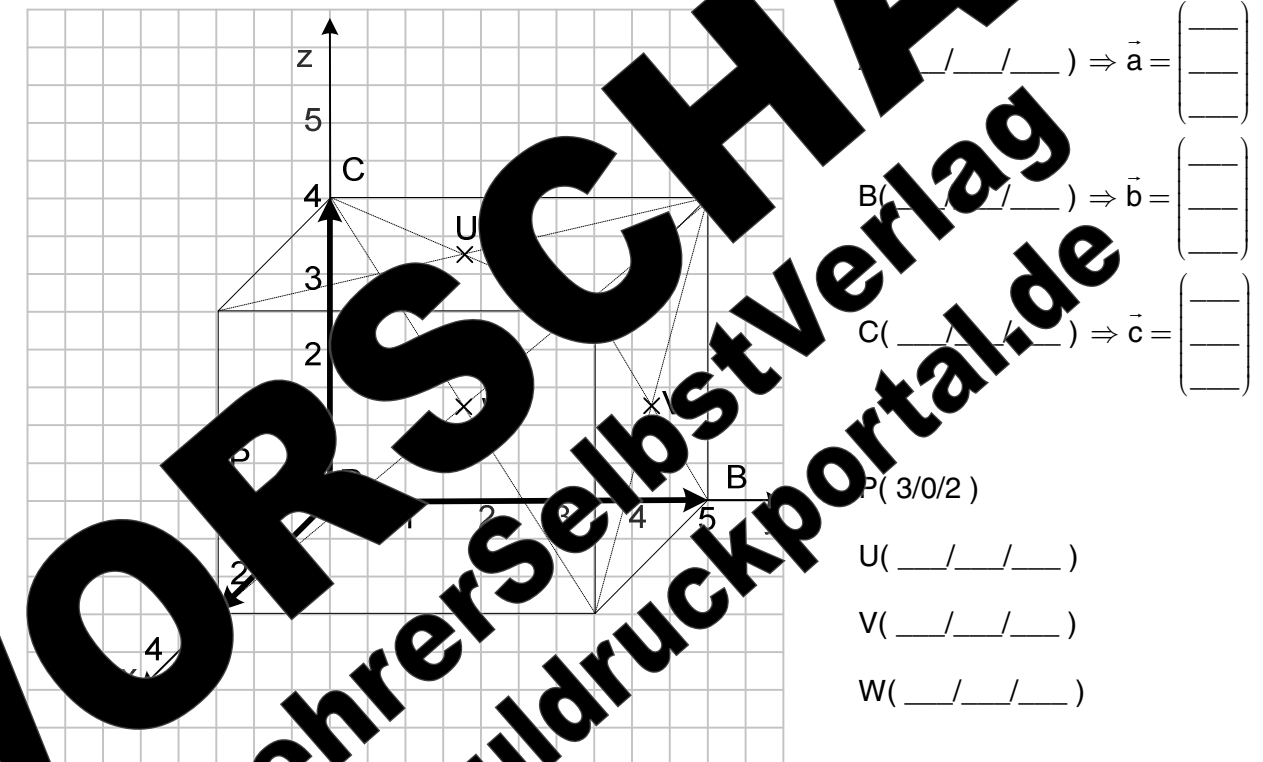
Eine Summe $r_1 \vec{a} + \dots + r_n \vec{a}_n$ für die reellen Zahlen $r_1, \dots, r_n$ und die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$ nennt man eine **Linearkombination** der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$.

Übungen

- Ü5.3 Gegeben sind die Ortsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Stellen Sie alle anderen eingezeichneten Ortsvektoren, wie im Beispiel für $\vec{c}$, als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dar. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie die Koordinaten der Punkte D, E und F eintragen.



- Ü5.4 Gegeben sind die Ortsvektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ zu den Punkten A, B und C. Ermitteln Sie durch Abzählen zunächst die Koordinaten aller eingezeichneten Punkte. Stellen Sie anschließend die Ortsvektoren zu den Punkten U, V und W, wie im Beispiel für $\vec{p}$, als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar. Überprüfen Sie das Ergebnis jeweils mit den unter 1. eingelesenen Koordinaten.



Beispiel für $\vec{p}$:

$$\vec{p} = 1 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} + 0,5 \cdot \vec{c} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0,5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1 \\ 1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\vec{v} =$ _____

Die Übungen: _____

Raum für Notizen



Kapitel 6: Lösen von Vektorgleichungen bei Linearkombinationen

1. Lösen einer Vektorgleichung durch "genaues Hinsehen"

Die folgenden Vektorgleichungen haben so einfache Lösungen, dass sie durch genaues Hinsehen ohne größeren Rechenaufwand lösen kann.

Beispiele:

- a) $\begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$
Man erkennt sofort, dass $r = 3$ die Gleichung erfüllt.
- b) $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 15 \\ -25 \\ 5 \end{pmatrix}$
Man erkennt sofort, dass $s = -1$ die Gleichung erfüllt.
- c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$
Man erkennt sofort, dass es **keine** Zahl r gibt, welche die Gleichung erfüllt.
- d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$
Man kann keinen Vektor der Ebene mit einem Vektor des Raumes verknüpfen.

Aufgaben 6.1

Geben Sie die Lösungen der folgenden Vektorgleichungen ohne ausführliche Rechnungen an:

- a) $\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -12 \\ -34 \\ -16 \end{pmatrix}$
t = ____
- b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
s = ____
- c) $\begin{pmatrix} 13 \\ 17 \\ -23 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 117 \\ -153 \\ 207 \end{pmatrix}$
r = ____
- d) $\begin{pmatrix} 12 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$
s = ____

2. Lösen von Vektorgleichungen durch Klammerauflösung

Beispiel 1: Die folgenden Vektorgleichungen haben einfache Lösungen, die Verhältnisse jedoch nicht so einfach, dass man die

gleichzeitig für Vektorgleichungen mit

Beispiel 1:

$$\begin{pmatrix} 12 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Man löst die Klammern auf, so auf, dass sich drei Gleichungen ergeben, also ein Gleichungssystem (LGS) entsteht.

$$\begin{aligned} 12 &= 9r &\Rightarrow r &= \frac{4}{3} \\ 16 &= 12r &\Rightarrow r &= \frac{4}{3} \\ 8 &= 6r &\Rightarrow r &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Da ein überbestimmtes LGS vorliegt, muss überprüft werden, ob alle drei Gleichungen das gleiche Ergebnis liefern. Das ist für $r = \frac{4}{3}$ erfüllt. Damit ist $r = \frac{4}{3}$ die Lösung des LGS.

Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Lineare Algebra selbstorganisiert erlernen



Lösen von Vektorgleichungen
bei Linearkombination

Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen	9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen	17

Einführung in die Vektorrechnung

Kapitel 3 – Koordinatensysteme	23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu den Vektoren	25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren	33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Linearer Kombination	43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit	47

Geraden in der Ebene und im Raum

Kapitel 8 – Parameterdarstellung von Geraden	49
Kapitel 9 – Lagebeziehung von Geraden	55
Kapitel 10 – Skalares und Vektorielles Produkt	59
Kapitel 11 – Vektorielles und Kreuzprodukt	65

Ebenen im Raum

Kapitel 12 – Darstellung von Ebenen	69
Kapitel 13 – Besondere Ebenen	81
Kapitel 14 – Lagebeziehungen von Ebenen	85
Kapitel 15 – Abstände	99
Kapitel 16 – Schnittwinkel	105
Kapitel 17 – Ebenenfamilien	107

Lineare Abbildungen

Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen	119
Kapitel 19 – Determinanten	125
Kapitel 20 – Inverse Matrizen	137
Kapitel 21 – Lineare Abbildungen	143
Kapitel 22 – Lineare Abbildungen	145
Kapitel 23 – Verkettung von linearen Abbildungen	149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen $Ax = x'$	153

Gesamte Verantwortung für die Inhalte dieses Buches liegt bei der Autorin selbstorganisiert erlernen (ISBN 978-3-031-266-031-266)

Copyright

Alle Rechte vorbehalten. All rights reserved.

Keine Weitergabe, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet

SelbstVerlag

Verlag des Autors & Freunde GmbH, Koblenz (Germany)

www.lehrerselbstverlag.de

www.f-druck.de

Kapitel 6: Lösen von Vektorgleichungen bei Linearkombinationen

1. Lösen einer Vektorgleichung durch "genaues Hinsehen"

Die folgenden Vektorgleichungen haben so einfache Lösungen, dass sie durch genaues Hinsehen ohne größeren Rechenaufwand lösen kann.

Beispiele:

- a) $\begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ Man erkennt sofort, dass $r = 3$ die Gleichung erfüllt.
- b) $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 15 \\ -25 \\ 5 \end{pmatrix}$ Man erkennt sofort, dass $s = -1$ die Gleichung erfüllt.
- c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ Man erkennt sofort, dass es **keine** Zahl r gibt, welche die Gleichung erfüllt.
- d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Man kann keinen Vektor der Ebene mit einem Vektor des Raumes verknüpfen.

Aufgaben 6.1

Finden Sie die Lösungen der folgenden Vektorgleichungen ohne ausführliche Rechnungen an:

- a) $\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -12 \\ -34 \\ -16 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 13 \\ 17 \\ -23 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 117 \\ -153 \\ 207 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 12 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$
- t = ____ s = ____ r = ____ s = ____

2. Lösen von Vektorgleichungen

Beispiele für Vektorgleichungen mit zwei Variablen. Die Verhältnisse jedoch nicht so einfach, dass man die

Beispiel 1:

$$\begin{pmatrix} 12 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Man löst die Klammern der Vektoren auf, dass sich drei Gleichungen ergeben, also ein lineares Gleichungssystem (LGS) entsteht.

Da ein überbestimmtes LGS vorliegt, muss überprüft werden, ob alle drei Gleichungen das gleiche Ergebnis liefern.

Das ist für $r = \frac{4}{3}$ erfüllt. Damit ist $r = \frac{4}{3}$ die Lösung des LGS.

$$12 = 12r \Rightarrow r = \frac{4}{3}$$

$$16 = 12r \Rightarrow r = \frac{4}{3}$$

$$8 = 6r \Rightarrow r = \frac{4}{3}$$

Beispiel 2:

$$\begin{pmatrix} 12 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Man löst die Klammern der Vektoren auf, dass sich drei Gleichungen ergeben, also ein lineares Gleichungssystem (LGS) entsteht.

$$\begin{array}{lcl} \text{I: } 12 = 9r & \Rightarrow & r = \frac{4}{3} \\ \text{II: } 16 = 12r & \Rightarrow & r = \frac{4}{3} \\ \text{III: } 8 = 15r & \Rightarrow & r = \frac{8}{15} \end{array}$$

Aus I und II folgt $r = \frac{4}{3}$. In Gleichung III ergibt sich für $r = \frac{8}{15}$ also ein Widerspruch. Damit ist die Vektorgleichung nicht lösbar.

b) Beispiele für Vektorgleichungen mit zwei Variablen

Beispiel 1:

$$r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Auflösen der Vektorgleichung in drei einzelne Gleichungen

$$\begin{array}{lcl} \text{I: } 2r + s & = & 3 \\ \text{II: } r + s & = & 0 \\ \text{III: } r & = & 0 \end{array}$$

weil $s = -r$ in III eingesetzt wird, ergibt sich $r = 0$ und $s = 0$.

$$\begin{array}{lcl} \text{IV: } -s = 1 & \Rightarrow & s = -1 \\ \text{II-II: } 2s = 0 & \Rightarrow & s = 0 \end{array}$$

Einsetzen von $s = -1$ in II ergibt $r = 2$.

Da es sich um ein überbestimmtes LGS handelt, müssen die Lösungen in der für die Rechnung bisher nicht verwendeten Gleichung I überprüft werden. Da sich kein Widerspruch ergibt, sind $s = -1$ und $r = 2$ Lösungen des LGS.

Einsetzen von r und s in I:

$$r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Auflösen der Vektorgleichung in drei einzelne Gleichungen

$$\begin{array}{lcl} \text{I: } 2r + s & = & 3 \\ \text{II: } r + s & = & 0 \\ \text{III: } r & = & 0 \end{array}$$

weil $s = -r$ in III eingesetzt wird, ergibt sich $r = 0$ und $s = 0$.

$$\begin{array}{lcl} \text{IV: } -s = 1 & \Rightarrow & s = -1 \\ \text{II-II: } 2s = 0 & \Rightarrow & s = 0 \end{array}$$

Einsetzen von $s = -1$ in II ergibt $r = 2$.

Einsetzen in I: $3 = 4$

Auch hier ergibt sich aus II und III das Ergebnis $r = 2$ und $s = -1$. Einsetzen in I ergibt hier $3 = 4$, also einen **Widerspruch**. Damit ist die Vektorgleichung nicht lösbar.

Keine Lösung

3. Lösen Sie die folgenden Vektorgleichungen:

a) $\begin{pmatrix} 6 \\ 21 \\ -9 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 15 \\ 49 \\ -21 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 6 \\ 21 \\ -9 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 14 \\ 49 \\ -21 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 18 \\ 21 \\ 3 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Lösungen in unsortierter Reihenfolge:

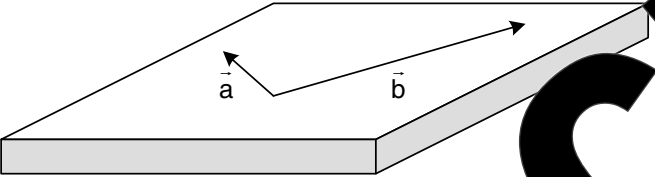
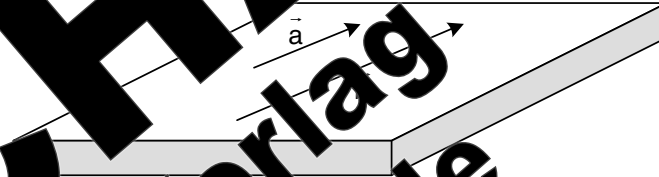
keine Lösung
keine Lösung
r = 15 und s = 1

keine Lösung
r = 3 und s = 1
r = 2/7

keine Lösung
r = 0,5 und s = 0,5
r = -3 und s = 1

Blank grid area for solving the vector equations.

Kapitel 7: Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit

Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit in der Ebene	
Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 	Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ 
Der Ansatz $r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ bedeutet, dass der Vektor $\vec{b}$ als Vielfaches des Vektors $\vec{a}$ dargestellt werden kann und führt zum folgenden LGS: LGS: $\begin{aligned} 0 &= 1 \\ r &= 2 \end{aligned} \Rightarrow \text{Widerspruch}$ Welches das LGS erfüllt. Vektor $\vec{b}$ kann _____ durch Vervielfachen von Vektor $\vec{a}$ erzeugt werden.	Der Ansatz $r \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ bedeutet anschaulich, dass der Vektor $\vec{b}$ als Vielfaches des Vektors $\vec{a}$ dargestellt werden kann und führt zum folgenden LGS: LGS: $\begin{aligned} 2r &= 4 \\ 4r &= 8 \end{aligned}$ Das LGS ist für $r = \underline{\hspace{2cm}}$ erfüllt. Vektor $\vec{b}$ ist ein _____ von Vektor $\vec{a}$. Man sagt auch, die Vektoren sind kollinear.
Wenn in der Ebene ein Vektor $\vec{b}$ durch ein Vielfaches eines Vektors $\vec{a}$ dargestellt werden kann, sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear abhängig.	Wenn in der Ebene ein Vektor $\vec{b}$ durch ein Vielfaches eines Vektors $\vec{a}$ dargestellt werden kann, sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear abhängig.
Mathematischer Ansatz für die Untersuchung auf linear Abhängigkeit und Unabhängigkeit in der Ebene	
	$r \cdot \vec{a} = \vec{b}$ Lösung für r
Satz: Drei Vektoren in einer Ebene sind immer linear _____.	

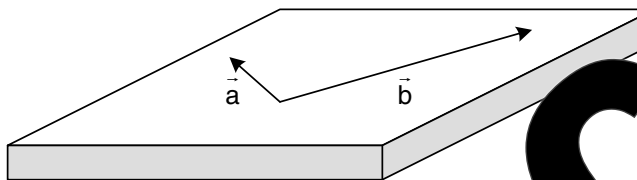
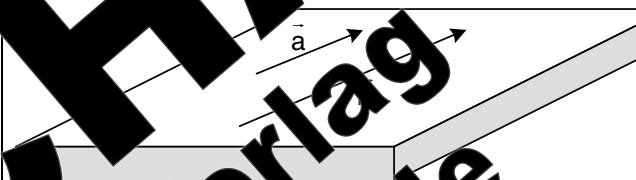
Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Lineare Algebra
selbstorganisiert lernen



Lineare Abhängigkeit
und Unabhängigkeit

Kapitel 7: Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit

Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit in der Ebene	
Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  Der Ansatz $r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ bedeutet, dass der Vektor $\vec{b}$ als Vielfaches des Vektors $\vec{a}$ dargestellt werden kann und führt zum folgenden LGS: LGS: $\begin{matrix} 0 = 1 \\ r = 2 \end{matrix} \Rightarrow \text{Widerspruch}$ Vektor $\vec{b}$ kann _____ durch Vervielfachen von Vektor $\vec{a}$ erzeugt werden.	Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$  Der Ansatz $r \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ bedeutet anschaulich, dass der Vektor $\vec{b}$ als Vielfaches des Vektors $\vec{a}$ dargestellt werden kann und führt zum folgenden LGS: LGS: $\begin{matrix} 2r = 4 \\ 4r = 8 \end{matrix}$ Das LGS ist für $r = \underline{\hspace{2cm}}$ erfüllt. Vektor $\vec{b}$ ist ein _____ von Vektor $\vec{a}$. Man sagt auch, die Vektoren sind kollinear.
Wenn in der Ebene ein Vektor $\vec{b}$ durch ein Vielfaches eines Vektors $\vec{a}$ dargestellt werden kann, sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear abhängig.	Wenn in der Ebene ein Vektor $\vec{b}$ durch ein Vielfaches eines Vektors $\vec{a}$ dargestellt werden kann, sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear abhängig.
Mathematischer Ansatz für die Untersuchung auf lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit in der Ebene	
	$r \cdot \vec{a} = \vec{b}$ Lösung für r
Merksatz: Drei Vektoren in einer Ebene sind immer linear abhängig.	

Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen	9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen	17

Einführung in die Vektorrechnung

Kapitel 3 – Koordinatensysteme	23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu den Vektoren	25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren	33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Linearer Abhängigkeit	43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit	47

Geraden in der Ebene und im Raum

Kapitel 8 – Parameterdarstellung von Geraden	49
Kapitel 9 – Lagebeziehung von Geraden	55
Kapitel 10 – Skalares Produkt	59
Kapitel 11 – Vektorielles und Kreuzprodukt	65

Ebenen im Raum

Kapitel 12 – Darstellung von Ebenen	69
Kapitel 13 – Beziehung zwischen Ebenen	81
Kapitel 14 – Lagebeziehungen von Ebenen	85
Kapitel 15 – Abstände	99
Kapitel 16 – Schnittwinkel	105
Kapitel 17 – Ebenenbüscheln	107

Lineare Abbildungen

Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen	119
Kapitel 19 – Determinanten	125
Kapitel 20 – Lineare Abbildungen	137
Kapitel 21 – Lineare Abbildungen	143
Kapitel 22 – Lineare Abbildungen	145
Kapitel 23 – Verkettung von linearen Abbildungen	149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen $Ax = x'$	153

Gesamte Verantwortung für das Erlernen (Lernprozess) liegt bei Ihnen (031-266)

Staat

Alle Rechte vorbehalten. All rights reserved.

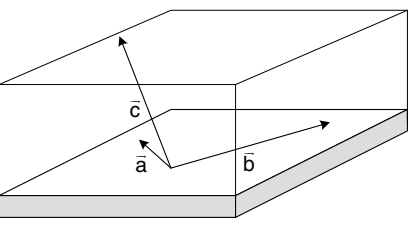
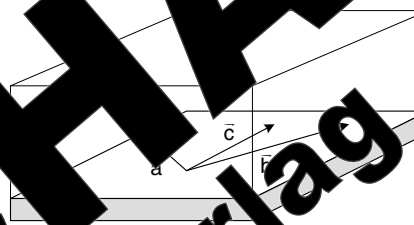
Druck, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte, aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet

SelbstVerlag

tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germany)

Lehrerselbstverlag.de

www.f-druck.de

Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit im Raum	
Gegeben sind: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 	Gegeben sind: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 
Der Ansatz $r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bedeutet anschaulich, dass der Vektor $\vec{c}$ als Linearkombination aus den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dargestellt werden kann und führt zum folgenden LGS: $\begin{matrix} r + s & = & -1 \\ s & = & -1 \\ 0 & = & 1 \end{matrix}$ Widerspruch! Es gibt also keine r und s, die das LGS erfüllen. Der Vektor $\vec{c}$ kann nicht als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dargestellt werden.	Der Ansatz $r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bedeutet anschaulich, dass der Vektor $\vec{c}$ als Linearkombination aus den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dargestellt werden kann und führt zum folgenden LGS: $\begin{matrix} r + s & = & 1 \\ r + s & = & 1 \\ 0 & = & 0 \end{matrix}$ Das LGS ist für $s = 0$ und $r = 1$ erfüllt. Der Vektor $\vec{c}$ kann als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dargestellt werden, da alle drei Vektoren in einer Ebene liegen. Man sagt auch, die Vektoren sind komplanar.
Wenn ein Vektor $\vec{c}$ im Raum nicht durch eine Linearkombination zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dargestellt werden kann, sind die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear unabhängig.	Wenn ein Vektor $\vec{c}$ im Raum durch eine Linearkombination zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dargestellt werden kann, da er in der Ebene wie $\vec{a}$ und $\vec{b}$ liegt, sind die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear abhängig.
Mathematischer Ansatz für die Untersuchung der Linearität und Abhängigkeit im Raum	
$r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} = \vec{c}$ hat keine Lösung	$r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} = \vec{c}$ hat eine Lösung für r und s
Ergänzen Sie: _____ und _____ sind linear _____. _____ und _____ sind linear _____, wenn sie _____ komplanar sind. _____ Vektoren im Raum sind linear _____, wenn sie _____ in einer Ebene liegen. Einsetzen in die Gleichung: _____	

Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Lineare Algebra
selbstorganisiert lernen



Parameterdarstellung von Ebenen

02-031-266

www.f-druck.de

24.11.2013 Ursula Pirkel

Information: Parameterdarstellung der Gerade

Parameterdarstellung einer Geraden:

$$\vec{x} = \vec{p} + r\vec{u}$$

Der Parameter r dient der Ortsänderung und bei negativen Vorzeichen auch zur Umkehrung des Ortsvektors $\vec{p}$. Setzt man $r = 0$, so gelangt man zu dem Punkt P auf der Geraden.

Stützvektor $\vec{p}$

Der Stützvektor $\vec{p}$ ist ein Ortsvektor zu einem beliebigen, aber bekannten Punkt auf der Geraden. Der Stützvektor $\vec{p}$ damit die Position der Geraden im Koordinatensystem fest.

Der Vektor $\vec{p}$ ist ein Ortsvektor zu einem beliebigen Punkt P auf der Geraden.

Richtungsvektor $\vec{u}$

Der Richtungsvektor $\vec{u}$ gibt die Richtung (Steigung) der Geraden im Koordinatensystem fest. Man zeichnet $\vec{u}$ in der Regel ausgehend von P ein.

Man kann $\vec{u}$ berechnen, wenn zwei Punkte A und B auf der Geraden bekannt sind.
 $\vec{u} = \vec{AB} = \vec{b} - \vec{a}$

Parameterdarstellung von Geraden in der Ebene und im Raum

Gerade in der Ebene und Gerade im Raum

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

Anmerkung: In der Analysis verwendete Form $y = mx + b$ findet in der linearen Algebra keine Anwendung, da diese Form nur Geraden in der Ebene und nicht für Geraden im Raum beschreibt.

Aufgabe 8.2

Standardaufgaben bei Geraden

Arbeiten Sie die unten aufgeführten Beispiele zu den Standardaufgaben bei Geraden durch und lösen Sie anschließend mit Hilfe dieser Beispiele Aufgaben aus dem Schulbuch.

- Erstellen der Parameterdarstellung der Geraden durch die bekannten Punkte $P(1/0/2)$ und $Q(1/2/3)$

Der Richtungsvektor $\vec{u}$ entspricht dem Vektor von P nach Q .

mit $\vec{p}$ als Stützvektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ergibt sich als Richtungsvektor

$$\vec{u} = \vec{PQ} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 2-0 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit $\vec{q}$ als Stützvektor $\vec{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ergibt sich als Richtungsvektor

$$\vec{u} = \vec{QP} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 0-2 \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Beide Darstellungen sind äquivalent, jedoch gleichwertige Lösungen:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. Die Koordinaten eines Punkte B auf der Geraden berechnen, indem man für den Parameter r einen vorgegebenen Wert einsetzt

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für r = 4 folgt:
$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 \\ 0+8 \\ 2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Der Vektor $\overrightarrow{PB}$ ist viermal so lang wie der Vektor $\vec{u}$, wenn man für r den Wert 4 einsetzt.

3. Punktprobe: Prüfe, ob ein Punkt auf einer Geraden liegt

a) Gegeben sind die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und der Punkt A(1/4/4)

Schritt 1:

$$\vec{a} = \vec{p} + r\vec{u}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

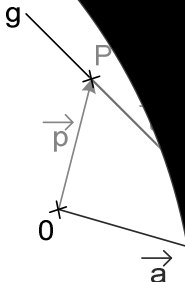
Für $\vec{x}$ wird der Ortsvektor $\vec{a}$ zum Punkt A eingesetzt.

Schritt 2:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 + r \\ 4 &= 0 + 2r \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} r &= 0 \\ r &= 2 \end{aligned}$$

Ergebnis: Kein Widerspruch, also liegt der Punkt A auf der Geraden.

Interpretation des Ergebnisses:
 Da die Vektorgleichung lösbar war, ist der Vektor $\vec{a}$ nach A derart vergrößert worden, so lang wie der Richtungsvektor $\vec{u}$.



b) Gegeben sind die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und der Punkt B(1/2/2)

Schritt 1:

$$\vec{b} = \vec{p} + r\vec{u}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

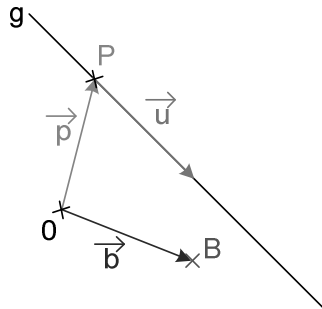
Schritt 2:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 2 &= 0 + 2r \\ 2 &= 2 + r \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} r &= 0 \\ r &= 1 \\ r &= 0 \end{aligned}$$

Ergebnis: Widerspruch, also liegt der Punkt B nicht auf der Geraden g.

Interpretation des Ergebnisses:

Punkt B kann durch Vervielfachen des Richtungsvektors nicht erreicht werden.



Übungen

Ü8.1 Begründen Sie, warum beliebig viele Gleichungen in Parameterdarstellung haben können, die unterschiedlich und die Richtungsvektoren kollinear sind.

Übungen:

Raum für Notizen



Oberstudienrätin Ursula Pirkel
Lineare Algebra
selbstorganisiert lernen



Kapitel 8
Lagebeziehung von Geraden



Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen	9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen	17

Einführung in die Vektorrechnung

Kapitel 3 – Koordinatensysteme	23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu den Vektoren	25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren	33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Linearer Abhängigkeit	43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit	47

Geraden in der Ebene und im Raum

Kapitel 8 – Parameterdarstellung von Geraden	49
Kapitel 9 – Lagebeziehung von Geraden	55
Kapitel 10 – Skalares und Vektorielles Produkt	59
Kapitel 11 – Vektorielles Produkt	65

Ebenen im Raum

Kapitel 12 – Darstellung von Ebenen	69
Kapitel 13 – Beziehungen zwischen Ebenen	81
Kapitel 14 – Lagebeziehungen von Ebenen	85
Kapitel 15 – Abstände	99
Kapitel 16 – Schnittwinkel	105
Kapitel 17 – Ebenenscharen	107

Lineare Abbildungen

Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen	119
Kapitel 19 – Determinanten	125
Kapitel 20 – Lineare Abbildungen	137
Kapitel 21 – Lineare Abbildungen	143
Kapitel 22 – Lineare Abbildungen	145
Kapitel 23 – Verkettung von linearen Abbildungen	149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen $Ax = x'$	153

Gesamte Inhalte können selbstorganisiert erlernt werden (031-266)

Alle Rechte vorbehalten. All rights reserved.
Nachdruck, auch auszugsweise, vorbehalten. Rechte,
aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.
LehrerselbstVerlag
LehrerselbstVerlag GmbH, Koblenz (Germany)
www.f-druck.de

Kapitel 9: Lagebeziehung von Geraden

Aufgabe 9.1

Sie wissen aus Untersuchungen in der Ebene bereits, dass sich zwei Geraden schneiden können und dass sie parallel oder identisch sein können. Im Raum kommt eine weitere Lagebeziehung hinzu, die man als **windschief** bezeichnet. Die Lagebeziehungen von Geraden lassen sich anschaulich an Flugrouten von Flugzeugen, die sich hier zur Vereinfachung Geraden bewegen, veranschaulichen. Ergänzen Sie dazu in den folgenden Texten fehlende Informationen:



Die Geraden g und h sind Die Geraden g und h sind
Die Richtungsvektoren von g und h sind Die Richtungsvektoren von g und h sind
linear linear



Die Geraden g und h sind Die Geraden g und h sind
Die Richtungsvektoren von g und h sind Die Richtungsvektoren von g und h sind
linear linear

Um rechnerisch zu bestimmen, welche Lagebeziehung bei zwei Geraden vorliegt, gibt es mehrere Wege. Hier soll der Weg beschrieben werden, der den geringsten Rechenaufwand mit sich bringt und damit am wenigsten anfällig für Rechenfehler ist.

Schema für die Untersuchung der Lagebeziehung von Geraden



Aufgabe 2
Beispiel für Berechnungen zur Lagebeziehung von Geraden

Ergänzen Sie bei den folgenden Untersuchungen zur der Lagebeziehung von Geraden fehlende Angaben bzw. Rechnungen.

a) Untersuchen Sie die Lagebeziehung der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

1. Untersuchen Sie die Richtungsvektoren auf lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit.

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} -2r = 2 \\ r = -1 \\ -3r = 1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} r = -1 \\ r = -1 \\ r = -1 \end{matrix}$$

Die Richtungsvektoren sind linear abhängig.

2. Punktprobe: Setzen Sie $r = 1$ in g ein und prüfen Sie, ob die Gerade g parallel oder identisch ist. Da die Richtungsvektoren linear abhängig sind, liegen die Geraden in der Ebene.

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 3 + r = 5 \\ 2 + -3r = -4 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} r = 2 \\ r = 2 \end{matrix}$$

Kein Widerspruch $\Rightarrow g$ ist identisch mit h .

b) Untersuchen Sie die Lagebeziehung der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $n: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

1. Wie bei a) erkennt man auch ohne Rechnung, dass die Richtungsvektoren linear abhängig sind.

Zur Erinnerung:
Sowas wie ein Widerspruch auftaucht, wird nicht weitergerechnet.

2. Punktprobe

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 5 - 2r = 4 \\ 3 + r = -2 \\ 2 - 3r = 6 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} -2r = -1 \\ r = -5 \\ -3r = 4 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} r = 0.5 \\ r = -5 \\ r = -1.33 \end{matrix} \Rightarrow \text{Widerspruch}$$

3. Ergebnis: Widerspruch $\Rightarrow$ Die Geraden g und n sind windschief.

c) Untersuchen Sie die Lagebeziehung der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $n: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Durch genaues Hinschauen erkennt man ohne Rechnung, dass die Richtungsvektoren linear unabhängig sind.

2. Gleichsetzen $g = n$ ergibt:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \text{LGS:} \\ \text{I: } 5 - 2r = 7 + 3s \\ \text{II: } 3 + r = 2 + 2s \\ \text{III: } 2 - 3r = 5 + 0s \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} -2r = 2 + 3s \\ r = -1 - 1.5s \\ -3(-1 - 1.5s) = 5 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} -3r = 3 \Rightarrow r = -1 \end{matrix}$$

$$r \text{ in II} \Rightarrow -1 - 1.5s = 2 + 2s \Rightarrow -3 = 3.5s \Rightarrow s = -0.857$$

$$r \text{ und } s \text{ in I} \Rightarrow 5 - 2(-1 - 1.5s) = 7 + 3(-0.857) \Rightarrow 7 = 7$$

Kein Widerspruch $\Rightarrow$ die Geraden g und n schneiden sich.

3. Schnittpunkt: Setzen Sie $s = 0$ in n ein und prüfen Sie, ob die Gerade g parallel oder identisch ist. Da die Richtungsvektoren linear unabhängig sind, liegen die Geraden nicht in der Ebene.

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 5 - 2r = 7 \\ 3 + r = 2 \\ 2 - 3r = 5 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} -2r = 2 \\ r = -1 \\ -3r = 3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} r = -1 \\ r = -1 \\ r = -1 \end{matrix}$$

Man kann auch sehen, dass so kein Schnittpunkt entsteht; hier ist die Gerade n eine Ebene.

d) Untersuchen Sie die Lagebeziehung der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $m: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. Untersuchung der Richtungsvektoren auf _____

$$r \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} r = 0,5 \\ r = 2 \end{matrix} \Rightarrow \text{Widerspruch}$$

es kommt man auch durch
 genaues Hinsehen.

2. Gleichsetzen $g = n$ ergibt:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

LGS lösen:

I	$5 - 2r = 1 + s$	$4 - s = 2r$
II	$3 + r = 0 + s$	$3r = s$
III	$2 - 3r = 1 - s$	$1 - 3s = -r$

III-II: $1 - 4s = -r$

IV: $s = -r$

s in II $\Rightarrow r - 2 = -3 \Rightarrow r = -1$

r und s in I $\Rightarrow$ _____ = _____

_____ = _____ Widerspruch

Die Geraden g und m sind _____.

In den Büchern gibt es eine große Anzahl von Aufgaben zur Lagebeziehung von Geraden. Lösen Sie diese Aufgaben mit Hilfe der Beispiele.

Ergänzen Sie:

Kapitel 10: Skalarprodukt

1. Physikalische Betrachtungen und Begründung des Ausdrucks für das Skalarprodukt

Wie viele andere mathematische Verfahren, findet das Produkt zweier Vektoren eine Anwendung in der Physik. Aus dem Physikunterricht wissen Sie, dass man die Arbeit W mit der Formel $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$ berechnen kann. Diese Formel gilt in dieser Form jedoch unter der Bedingung, dass $\vec{F}$ und $\vec{s}$ die gleiche Richtung haben, da man in diesem Sonderfall den Vektorcharakter von $\vec{F}$ und $\vec{s}$ vernachlässigen darf.

Im allgemeinen Fall muss man berücksichtigen, dass $\vec{F}$ und $\vec{s}$ Vektoren sind, und damit in unterschiedliche Richtungen zeigen können. Man schreibt die Formel dann wie folgt:

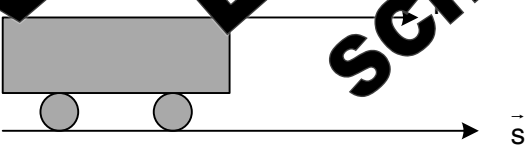
Arbeit: $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$

Das Produkt der beiden Vektoren in diesem Anwendungsfall hat keinen Vektor, sondern einen so genannten **Skalar**, da die Arbeit keine Richtung hat. Aus dieser Eigenschaft bei der Multiplikation zweier Vektoren leitet man den Ausdruck **Skalarprodukt** ab.

2. Eigenschaften des Skalarprodukts veranschaulicht am Beispiel der Kraft

Die folgenden Abbildungen zeigen jeweils einen Wagen, der sich waagrecht nach rechts in Richtung des Weges $\vec{s}$ bewegt und mit der Kraft $\vec{F}$ gezogen wird. Die Wirkung der Kraft für die gewünschte Bewegung ist in den drei Fällen übrigens unterschiedlich groß. Ergänzen Sie fehlende Angaben:

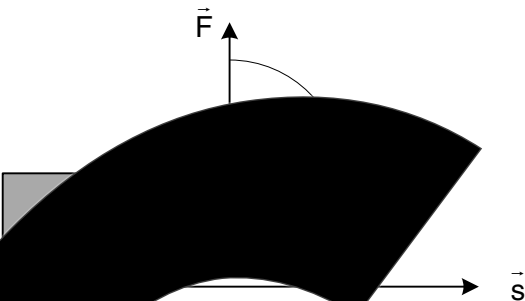
Fall 1: $\vec{F} \parallel \vec{s}$



$\vec{F}$ zeigt in die Richtung des Weges $\vec{s}$, d.h. Die Kraft $\vec{F}$ und der Weg $\vec{s}$ schließen einen Winkel von $\alpha = \underline{\hspace{1cm}}^\circ$ ein. Die gesamte Kraft ist für die Bewegung wirksam und man kann ohne Beachtung des Vektorcharakters mit den Beträgen rechnen.

Es gilt: $W = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}|$, wenn $\vec{F} \parallel \vec{s}$

$\vec{F} \perp \vec{s}$



Mit einer Kraft, die nach oben zeigt, kann man den Wagen nicht in die Richtung des horizontalen Weges $\vec{s}$ ziehen, sondern nur hochheben. Damit ist die Kraft für die gewünschte Bewegung nicht wirksam und es wird in physikalischer Hinsicht keine Arbeit verrichtet.

Es gilt: $W = \vec{F} \cdot \vec{s} = \underline{\hspace{1cm}}$ wenn $\vec{F} \perp \vec{s}$

Dieses Anwendungsbeispiel zeigt anschaulich eine wichtige Eigenschaft des Skalarprodukts:

Das Skalarprodukt zweier orthogonalen Vektoren ist immer _____

Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Lineare Algebra selbstorganisiert erlernen

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de



Kapitel

Skalarprodukt

02-031-266

Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen	9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen	17

Einführung in die Vektorrechnung

Kapitel 3 – Koordinatensysteme	23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu den Vektoren	25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren	33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Linearer Abhängigkeit	43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit	47

Geraden in der Ebene und im Raum

Kapitel 8 – Parameterdarstellung von Geraden	49
Kapitel 9 – Lagebeziehung von Geraden	55
Kapitel 10 – Skalares und Vektorielles Produkt	59
Kapitel 11 – Vektorielles Produkt	65

Ebenen im Raum

Kapitel 12 – Darstellung von Ebenen	69
Kapitel 13 – Besondere Ebenen	81
Kapitel 14 – Lagebeziehungen von Ebenen	85
Kapitel 15 – Abstände	99
Kapitel 16 – Schnittwinkel	105
Kapitel 17 – Ebenenfamilien	107

Lineare Abbildungen

Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen	119
Kapitel 19 – Determinanten	125
Kapitel 20 – Lineare Abbildungen	137
Kapitel 21 – Lineare Abbildungen	143
Kapitel 22 – Lineare Abbildungen	145
Kapitel 23 – Verkettung von linearen Abbildungen	149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen $Ax = x'$	153

Gesamt: 02-031-266
Selbstorganisiert erlernen (02-031-266)

Alle Rechte vorbehalten. All rights reserved.

Keine Haftung, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet

LehrerSelbstVerlag

Lehrer & Freunde GmbH, Koblenz (Germany)

LehrerSelbstVerlag.de

www.f-druck.de

Kapitel 10: Skalarprodukt

1. Physikalische Betrachtungen und Begründung des Ausdrucks für die Arbeit

Wie viele andere mathematische Verfahren, findet das Produkt zweier Vektoren eine Anwendung in der Physik. Aus dem Physikunterricht wissen Sie, dass man die Arbeit W mit der Formel $W = F \cdot s$ berechnen kann. Diese Formel gilt in dieser Form jedoch unter der Bedingung, dass F und s die gleiche Richtung haben, da man in diesem Sonderfall den Vektorcharakter von F und s vernachlässigen darf.

Im allgemeinen Fall muss man berücksichtigen, dass die Größen F und s Vektoren sind, und damit in unterschiedliche Richtungen zeigen können. Man schreibt die Formel dann wie folgt:

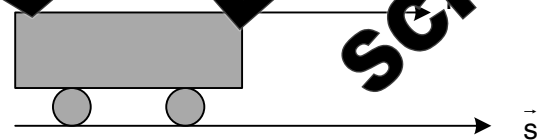
$$\text{Arbeit: } W = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

Das Produkt der beiden Vektoren in diesem Anwendungsfall hat keinen Vektor, sondern einen so genannten **Skalar**, da die Arbeit keine Richtung hat. Aus dieser Eigenschaft bei der Multiplikation zweier Vektoren leitet man den Ausdruck **Skalarprodukt** ab.

2. Eigenschaften des Skalarprodukts veranschaulicht am Beispiel der Kraft

Die folgenden Abbildungen zeigen jeweils einen Wagen, der sich waagrecht nach rechts in Richtung des Weges $\vec{s}$ bewegt und mit der Kraft $\vec{F}$ gezogen wird. Die Wirkung der Kraft für die gewünschte Bewegung ist in den drei Fällen allerdings unterschiedlich groß. Ergänzen Sie fehlende Angaben:

Fall 1: $\vec{F} \parallel \vec{s}$

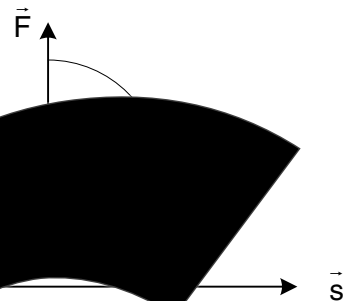


$\vec{F}$ zeigt in die Richtung des Weges $\vec{s}$, d.h.

Die Kraft $\vec{F}$ und der Weg $\vec{s}$ schließen einen Winkel von $\alpha = \underline{\hspace{1cm}}^\circ$ ein. Die gesamte Kraft ist für die Bewegung wirksam und man kann ohne Beachtung des Vektorcharakters mit den Beträgen rechnen.

$$W = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}|, \text{ wenn } \vec{F} \parallel \vec{s}$$

$\vec{F} \perp \vec{s}$



Mit einer Kraft, die nach oben zeigt, kann man den Wagen nicht in die Richtung des horizontalen Weges $\vec{s}$ ziehen, sondern nur hochheben. Damit ist die Kraft für die gewünschte Bewegung nicht wirksam und es wird in physikalischer Hinsicht keine Arbeit verrichtet.

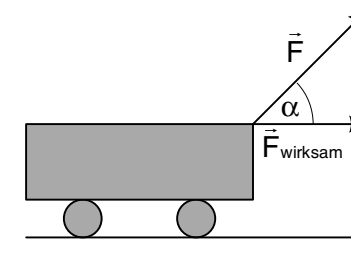
$$\text{Es gilt: } W = \vec{F} \cdot \vec{s} = \underline{\hspace{1cm}} \text{, wenn } \vec{F} \perp \vec{s}$$

Dieses Anwendungsbeispiel zeigt anschaulich eine wichtige Eigenschaft des Skalarprodukts:

Das Skalarprodukt zweier orthogonalen Vektoren ist immer

Allgemeiner Fall:

Die Kraft $\vec{F}$ und der Weg $\vec{s}$ schließen einen beliebigen Winkel ein



Nur der Teil der Kraft, der in die Richtung des Weges $\vec{s}$ zeigt, also $\vec{F}_{\text{wirksam}}$, ist für das Bewegen wirksam und damit für die verrichtete Arbeit verantwortlich. Es gilt somit entsprechend zum Fall 1: $W = \vec{F}_{\text{wirksam}} \cdot \vec{s}$

Der wirksame Teil der Kraft $\vec{F}_{\text{wirksam}}$ hängt vom Winkel zwischen dem Weg $\vec{s}$ und der Kraft $\vec{F}$ ab.

Vinkelbeziehung für α :

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{F}_{\text{wirksam}}|}{|\vec{F}|} \Rightarrow \vec{F}_{\text{wirksam}} = |\vec{F}| \cos \alpha$$

Für die Berechnung der Arbeit gilt daher allgemein:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cos \alpha$$

Aufgabe 10.1

Erläutern Sie, wie die Formel $W = \vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cos \alpha$ zur Berechnung der Arbeit hergeleitet werden kann.

Aufgabe 10.2

Zerlegen Sie die Kraft $\vec{F}$ in die Komponenten $\vec{F}_{\text{wirksam}}$ und $\vec{F}_{\perp}$. Berechnen Sie die Arbeit für die Fälle 1 und 2 in der Formel für den allgemeinen Fall.

$$\Rightarrow W = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\alpha = 90^\circ \Rightarrow W = \underline{\hspace{2cm}}$$

3. Die Definition

Ersetzt man die Kraft $\vec{F}$ durch einen beliebigen Vektor $\vec{a}$ und $\vec{s}$ durch einen beliebigen Vektor $\vec{b}$, gilt für das Skalarprodukt:

$$\text{Skalarprodukt: } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha$$

4. Die Koordinatenform des Skalarprodukts

Aufgabe 10.3

In der Ebene sind die Ortsvektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ gegeben.}$$

a) Zeichnen Sie die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in das Koordinatensystem neben ein.

b) Messen Sie den von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossenen Winkel α ab, wie Sie möglich ist mit dem Geodreieck:

$\alpha =$ _____

c) Berechnen Sie den Betrag (Länge) der Vektoren.

$$|\vec{a}| =$$

$$|\vec{b}| =$$

Berechnen Sie das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit Hilfe der berechneten Längen und des eingeschlossenen Winkels:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha =$$

e) Berechnen Sie mit Hilfe der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die folgende Summe:

_____ Sie das Ergebnis mit dem unter c) berechneten Skalarprodukt.

_____ Die Ergebnisse sind _____

f) Begründen Sie auf Basis des Ergebnisses in e), warum das Skalarprodukt auch wie folgt berechnet werden kann:

5. Überblick zur Definition des Skalarprodukts

Definition des Skalarproduktes zweier Vektoren mit Hilfe des eingeschlossenen Winkels:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha$$

Definition des Skalarproduktes zweier Vektoren in Koordinatenform:

$$\text{Ebene: } \vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 \quad \text{Raum: } \vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Aufgabe 10.4

- Lesen Sie in einer geeigneten Quelle über Beweise für die Gültigkeit der Regeln im Kasten oben nach.
- Informieren Sie sich mithilfe einer geeigneten Quelle über die Rechengesetze für das Skalarprodukt.

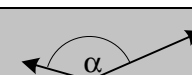
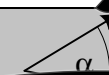
6. Folgerungen aus dem Skalarprodukt

a) Mit Hilfe des Skalarprodukts kann man überprüfen, ob zwei Vektoren orthogonal sind.

$$\text{Wenn zwei Vektoren orthogonal sind, dann gilt: } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \text{ oder } a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$$

b) Wenn man die Formel zur Definition des Skalarprodukts nach $\cos \alpha$ um, so kann man den eingeschlossenen Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ berechnen. Die berechneten Werte für die Winkel liegen im Intervall $[0^\circ; 180^\circ]$

Winkel zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:



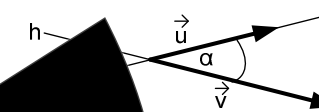
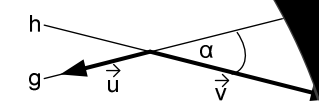
$\alpha > 90^\circ$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

_____ Schnittwinkel von Geraden:

_____ Schnittwinkel von Geraden berechnet man mit Hilfe der Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ der Geraden. Beim Schnitt von zwei Geraden g und h erhält man zwei Winkel, von denen einer größer als 90° und einer kleiner als 90° ist. Den kleineren Winkel bezeichnet man als **Schnittwinkel von Geraden**. Er erhält man, wenn man im Zähler den Betrag des Skalarprodukts verwendet. Ohne Betrag erhält man den von den Vektoren eingeschlossenen Winkel, und der kann dann größer als 90° sein.

_____ liefert in beiden Fällen α



Aufgabe 10.5

Die folgenden Beispiele zeigen grundlegende Anwendungen und den Umgang mit den Anwendungen des Skalarprodukts. Ergänzen Sie fehlende Anmerkungen und Rechenschritte.

1. Berechnen des Winkels zwischen zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Man setzt beide Vektoren in die Formel für die Berechnung des Winkels ein.

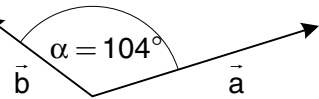
$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$= \frac{1 + 0 + 1}{\sqrt{1^2 + 3^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{22}} \approx 0,45$$

$$\alpha = \cos^{-1}(0,45) \approx 63,4^\circ$$



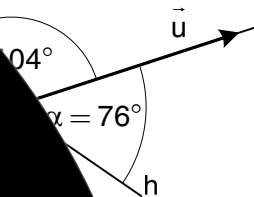
2. Berechnen des Schnittwinkels zwischen den Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Man setzt die Richtungsvektoren der Geraden in die Formel ein. (Beachten Sie dabei, dass die Richtungsvektoren mit den Vektoren aus 1. übereinstimmen.)

$$= \frac{1 + 9 + 1}{\sqrt{1^2 + 3^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-4)^2}}$$

$$= \frac{11}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{16}} = 0,5$$

Beachten Sie die Wirkung der Betragsstriche im Zähler des Bruchs:



3. Prüfen, ob zwei Vektoren oder zwei Geraden orthogonal sind.

a) Erläutern Sie folgende Rechnung:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{0}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = 0 \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}(0) = 90^\circ$$

4. Gegeben sind die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und die Gerade $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Alle drei Geraden liegen in einer Ebene und haben jeweils einen Schnittpunkt. Geben Sie an, welche der Geraden orthogonal sind. Ergänzen Sie die folgenden Rechnungen und den Text ergänzen:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 + 9 + 0 = 10 \neq 0 \quad \text{Die Geraden } g \text{ und } h \text{ sind nicht orthogonal.}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 + 3 - 3 = 0 \quad \text{Die Geraden } g \text{ und } h \text{ sind orthogonal.}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 + 3 - 3 = 0 \quad \text{Die Geraden } g \text{ und } h \text{ sind orthogonal.}$$

Ergebnis:

Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Lineare Algebra selbstorganisiert erlernen

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de



Kapitel 11 – Vektor- oder Kreuzprodukt

Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen	9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen	17

Einführung in die Vektorrechnung

Kapitel 3 – Koordinatensysteme	23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu den Vektoren	25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren	33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Linearer Abhängigkeit	43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit	47

Geraden in der Ebene und im Raum

Kapitel 8 – Parameterdarstellung von Geraden	49
Kapitel 9 – Lagebeziehung von Geraden	55
Kapitel 10 – Skalares und Vektorielles Produkt	59
Kapitel 11 – Vektor- oder Kreuzprodukt	65

Ebenen im Raum

Kapitel 12 – Darstellung von Ebenen	69
Kapitel 13 – Besondere Ebenen	81
Kapitel 14 – Lagebeziehungen von Ebenen	85
Kapitel 15 – Abstände	99
Kapitel 16 – Schnittwinkel	105
Kapitel 17 – Ebenenfamilien	107

Lineare Abbildungen

Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen	119
Kapitel 19 – Determinanten	125
Kapitel 20 – Lineare Abbildungen	137
Kapitel 21 – Eigenwerte und Eigenvektoren	143
Kapitel 22 – Diagonalisierbarkeit	145
Kapitel 23 – Verkettung von linearen Abbildungen	149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen $Ax = x'$	153

Gesamte Verantwortung für die Inhalte liegt bei der Autorin selbstorganisiert erlernen (ISBN 978-3-031-266-02-0)

Alle Rechte vorbehalten. All rights reserved.

Keine Weitergabe, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet

LehrerSelbstVerlag

LehrerSelbstVerlag GmbH, Koblenz (Germany)

www.lehrerselbstverlag.de

www.f-druck.de

Kapitel 11: Vektor- oder Kreuzprodukt

Neben dem Skalarprodukt, bei dem das Ergebnis der Multiplikation ein Skalar ist, gibt es eine weitere Möglichkeit Vektoren miteinander zu multiplizieren. Wie der Name Vektorprodukt andeutet, ist das Ergebnis dieser Multiplikation ein Vektor.

Eine Anwendung dieser Multiplikation ist in der Physik bei der Berechnung der Lorentzkraft, die bei der Bewegung geladener Teilchen im Magnetfeld auftritt, zu finden.

Die Definition des Vektor- oder Kreuzprodukts zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ im 3D-Raum (richtig: $\vec{a}$ kreuz $\vec{b}$) kann in jedem Tafelwerk nachgeschlagen werden und ist:

Definition Vektorprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Neben der Anwendung der Formel kann man auch geeignete Taschenrechner einsetzen, um das Vektorprodukt zu berechnen. Zudem ist die Möglichkeit dieses Produkt manuell zu berechnen. Hierbei wird ersichtlich, dass dieses Produkt auch als Kreuzprodukt bezeichnet.

Berechnung des Kreuzprodukts ohne Verwendung der Formel oder des Taschenrechners:

Schritt 1: Die Komponenten der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ werden untereinander angeordnet.

2. Schritt: Die x-Komponente berechnen:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow -1 \cdot 1 - 3 \cdot 1$$

y- und z-Komponenten werden analog berechnet.

3. Schritt

y-Komponente berechnen:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 3 \cdot 3 - 2 \cdot 1$$

z- und angehängte x-Komponenten werden über Kreuz multipliziert.

$$\begin{pmatrix} -1 \cdot 1 - 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 3 - 2 \cdot 1 \\ -2 \cdot 1 - (-1) \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - 3 \\ 9 - 2 \\ 2 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

4. Schritt

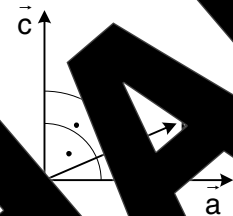
z-Komponente berechnen:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 2 \cdot 1 - 3 \cdot 3$$

x- und y-Komponenten werden über Kreuz multipliziert.

Eigenschaften des Vektorprodukts $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$

1. Der Vektor $\vec{c}$ ist orthogonal zu den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$



Aufgabe 11.1

Ergänzen und erläutern Sie die folgende Rechnung:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \quad + \quad + \quad = \quad$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \quad + \quad + \quad = \quad$$

2. Das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ definiert ein Rechtssystem.

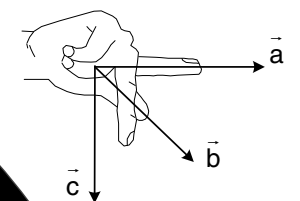
Der Vektor an der ersten Position, hier $\vec{a}$, zeigt in Richtung Daumen.

Der Vektor an der zweiten Position, hier $\vec{b}$, zeigt in Richtung Zeigefinger.

$\vec{c}$ zeigt in Richtung Mittelfinger.

Vertauschen von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bewirkt Umkehrung von $\vec{c}$.

$$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{c}$$



Die Richtung von $\vec{c}$ kann auch mit der Rechtssystem-Regel ermittelt werden.

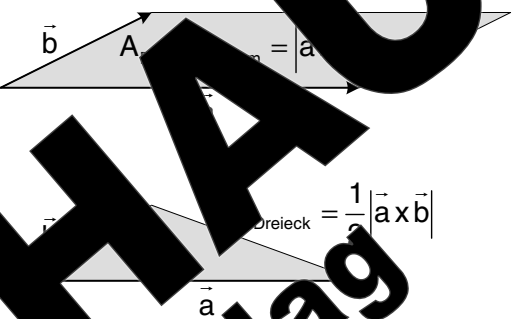
Aufgabe 11.2

Weisen Sie durch Rechnung nach, dass gilt: $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \quad$$

3. Mit dem Vektorprodukt kann man Flächen berechnen.

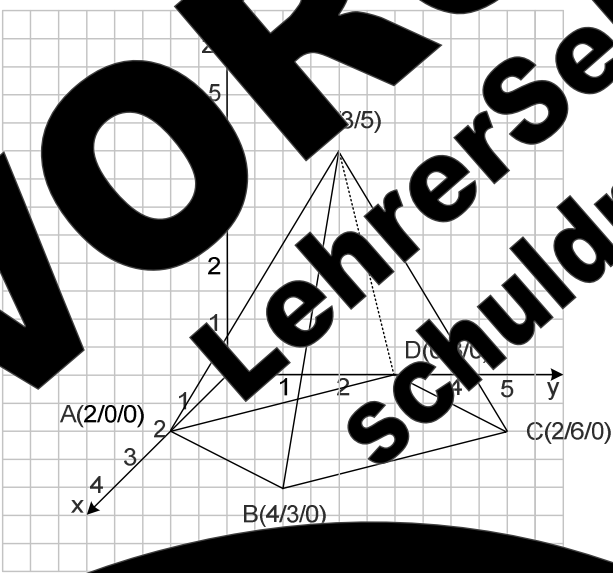
Für die Fläche eines Parallelogramms, das durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird, gilt:



Für das markierte Dreieck gilt demnach:

Aufgabe 11.3

Zeigen Sie, dass die Grundfläche der gebildeten Pyramide eine Raute ist, und ergänzen bzw. erläutern Sie die Berechnung der nachfolgenden drei Berechnungen:



Berechnung 1:

_____ = $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$
_____ = $\sqrt{144} = 12$

Erläuterung:

Berechnung 2:

_____ = $4 \cdot \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{vmatrix}$
_____ = $2 \cdot \begin{vmatrix} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{vmatrix}$
_____ = $2\sqrt{\text{ }} = 2\sqrt{361}$

Erläuterung:

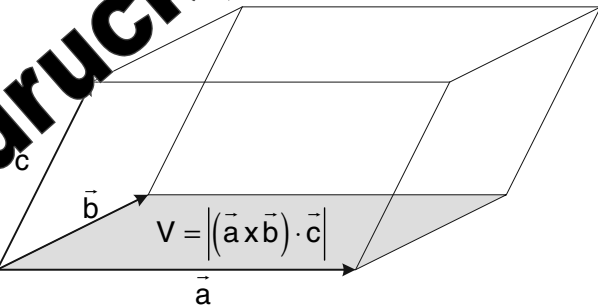
Berechnung 3:

A = 12 + 38 = 50

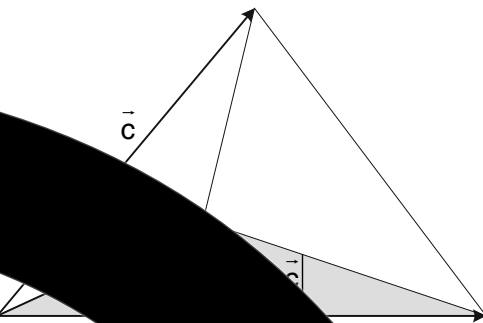
Erläuterung:

3. Mit dem Vektorprodukt kann man Volumen berechnen

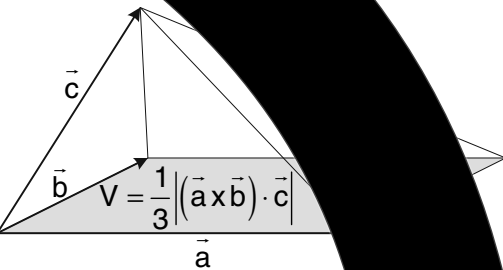
a) Volumen eines Spats



b) Volumen einer Pyramide



c) Volumen einer beliebigen Pyramide mit Grundfläche A und Höhe h. Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ spannen die Grundfläche auf. Der Vektor $\vec{c}$ ist die Höhe.



Erläuterung:

Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Lineare Algebra selbstorganisiert erlernen



Darstellung von Ebenen

Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen	9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen	17

Einführung in die Vektorrechnung

Kapitel 3 – Koordinatensysteme	23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu den Vektoren	25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren	33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Linearer Abhängigkeit	43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit	47

Geraden in der Ebene und im Raum

Kapitel 8 – Parameterdarstellung von Geraden	49
Kapitel 9 – Lagebeziehung von Geraden	55
Kapitel 10 – Skalares und Vektoriell-Kreuzprodukt	59
Kapitel 11 – Vektorprodukt und Kreuzprodukt	65

Ebenen im Raum

Kapitel 12 – Darstellung von Ebenen	69
Kapitel 13 – Beziehung zwischen Ebenen	81
Kapitel 14 – Lagebeziehungen von Ebenen	85
Kapitel 15 – Abstände	99
Kapitel 16 – Schnittwinkel	105
Kapitel 17 – Ebenenfamilien	107

Lineare Abbildungen

Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen	119
Kapitel 19 – Determinanten	125
Kapitel 20 – Lineare Abbildungen	137
Kapitel 21 – Lineare Abbildungen	143
Kapitel 22 – Lineare Abbildungen	145
Kapitel 23 – Verkettung von linearen Abbildungen	149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen $Ax = x'$	153

Gesamt: 02-031-266
Selbstorganisiert erlernen (02-031-266)

Alle Rechte vorbehalten. All rights reserved.

Keine Weitergabe, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet

SelbstVerlag

Freunde & Freunde GmbH, Koblenz (Germany)

lehrerselbstverlag.de

www.f-druck.de

Kapitel 12: Darstellung von Ebenen

Aufgabe 12.1

Während Geraden im Raum in der linearen Algebra nur mit Hilfe der Parametergleichung angegeben werden, kann man Ebenen mit drei verschiedenen Darstellungsformen beschreiben. Erarbeiten Sie sich mit Hilfe der folgenden Informationen und Aufgabenstellung die Ebenendarstellung im Raum.

1. Ebenen in Parameterdarstellung

Sie wissen bereits, dass eine Gerade durch zwei Punkten P und Q mit Hilfe der Parametergleichungen $g: \vec{x} = \vec{p} + s\vec{PQ}$ oder $g: \vec{x} = \vec{p} + s\vec{u}$ angegeben wird. Wenn man aus der folgenden Abbildung erkennt, kann durch Hinzufügen eines dritten Punktes R und dann durch Hinzufügen eines zweiten Vektors von P nach R eine Ebene festgelegt werden (vgl. Kapitel 7 Lineare Unabhängigkeit). Durch Linearkombination der beiden Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ besteht entsprechend zur Geradengleichung eine Ebenengleichung in Parameterdarstellung.

$$E: \vec{x} = \vec{p} + r\vec{u} + s\vec{v}$$

Bezeichnungen:

$\vec{x}$: Ortsvektor zu einem beliebigen Punkt auf der Ebene

$\vec{p}$: Stützvektor der Ebene = Ortsvektor zum Punkt P

$\vec{u}$: Spannvektor $\vec{u} = \vec{PQ}$

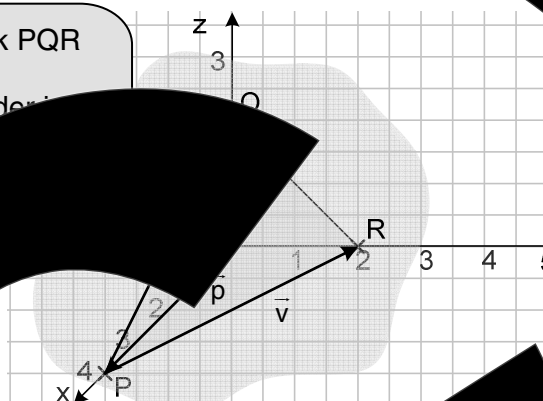
$\vec{v}$: Spannvektor $\vec{v} = \vec{PR}$

Man spricht bei Ebenen nicht mehr von einem Richtungsvektor, sondern von zwei Spannvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$, welche die Ebene aufspannen.

Um die Ebene in einem Koordinatensystem darzustellen, werden Ebenen, wie im folgenden Beispiel, als Dreieck in einem Koordinatensystem dargestellt.

Gegeben ist eine Ebene, welche die folgenden Punkte $P(0/0/0)$, $Q(0/2/0)$ und $R(0/0/2)$ enthält.

Das Dreieck PQR ist nur ein Ausschnitt der unendlich ausgedehnten Ebene E.



$$E: \vec{x} = \vec{p} + r\vec{u} + s\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

oder mit den Spannvektoren

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2. Ebenen in Normalendarstellung

Für die Normalendarstellung der Ebene benötigt man einen Stützvektor $\vec{p}$ und einen beliebigen Repräsentanten des Vektors, der orthogonal zur Ebene E verläuft. Dieser Vektor wird als **Normalenvektor** $\vec{n}$ der Ebene bezeichnet. Wie man den folgenden Satz ableiten kann, legen der Stützvektor die Position der Ebene und der Normalenvektor die Lage der Ebene im Raum fest.

Der Stützvektor $\vec{p}$ ist der Ortsvektor eines beliebigen bekannten Punktes auf E .

Die Lage der Ebene wird durch den Normalenvektor bestimmt. Ändert sich der Normalenvektor in Richtung, verändert sich auch die Lage der Ebene.



Begründen Sie, warum man den Normalenvektor einer Ebene mit Hilfe des Vektorprodukts bestimmen kann, indem Sie den folgenden Satz vervollständigen:

Das Vektorprodukt aus zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$

erzeugt einen Vektor, der senkrecht zu den beiden Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ steht.

Da $\vec{u}$ und $\vec{v}$ die Ebene aufspannen, ist der Vektor $\vec{n}$ der Ebene:

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$$

Für die Ebene E gilt damit:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Spannvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ genau Vektoren

Anhand der folgenden Abbildung wird nun die Überlegung, die der Ebene darstellt, in Normalenform zugrunde liegt, erläutert:



Die Ebenengleichung ergibt sich aus der Zusammenfassung der drei Überlegungen:

Der Vektor $\vec{PX}$ und der Normalenvektor $\vec{n}$ sind orthogonal.

Bei orthogonalen Vektoren ist das Skalarprodukt Null: $\vec{PX} \cdot \vec{n} = 0$

3. Für den Vektor $\vec{PX}$ gilt: $\vec{PX} = \vec{x} - \vec{p}$

$$E: (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{oder} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = 0$$

Für das Beispiel 1 gilt damit:

$$E_N: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 0$$

3. Darstellung einer Ebene in Koordinatenform

Multipliziert man das Skalarprodukt der Ebene aus der Normalendarstellung aus, erhält man die Ebene in Koordinatendarstellung.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow n_1x + n_2y + n_3z - (n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3) = 0$$

$$\Rightarrow n_1x + n_2y + n_3z = d$$

Wichtig: Die Vorzeichen von x, y und z eintragen, das Komma an der richtigen Stelle.

Da man die Zahlenwerte von n_1 und n_2 kennt, ergibt diese Summe einen Zahlenwert, den man mit d bezeichnet.

In Tafelwerken findet man die Koordinatendarstellung in der Regel in der folgenden Form:

$$E: ax + by + cz = d \quad \text{mit} \quad \vec{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Zeigen Sie durch Ausmultiplizieren der Normalendarstellung, dass sich die Ebene aus Beispiel 1, wie unten angegeben, darstellen lässt:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad} = 0$$

$$E_K: x + 2y + 2z = 4$$

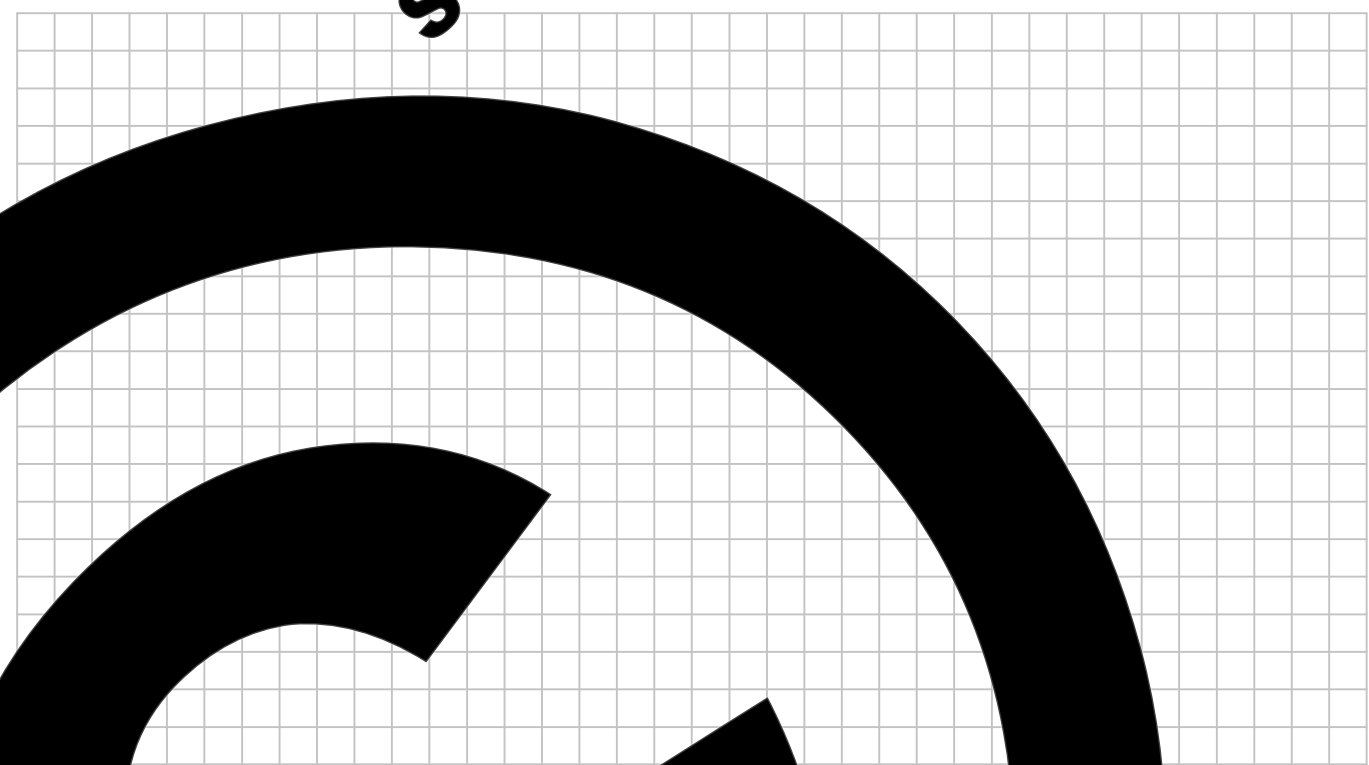
Aufgabe 12.2

Eine Ebene F ist durch die Punkte A(-4 / 1 / 3), B(1 / 0,5 / 1) und C(2 / -3 / 1) gegeben.

- a) Zeigen Sie durch Rechnung, dass sich bei der Wahl von Punkt A als Stützpunkt die Ebene die folgende Ebenengleichung in Parameterdarstellung ergibt: $E_P : \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$



b) Ermitteln Sie die Normalendarstellung der Ebene F. (Zur Kontrolle: $E_N : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 17 \\ 34 \\ 34 \end{pmatrix} = 0$)



- c) Ermitteln Sie die Gleichung der Ebene F in Koordinatendarstellung und zeigen Sie, dass das Ergebnis mit der Koordinatendarstellung der Ebene E im Beispiel 1 von Aufgabe 12.1 übereinstimmt.



Als Bonusaufgabe:

Vergleichen Sie die Ergebnisse aus den Aufgaben 12.1 und 12.2 und ergänzen Sie:

- Die Parameterdarstellungen der Ebenen E und F weisen _____ Gemeinsamkeiten auf und man kann _____ erkennen, dass es sich um die gleichen Ebenen handelt.
- Die Normalenvektoren sind _____.

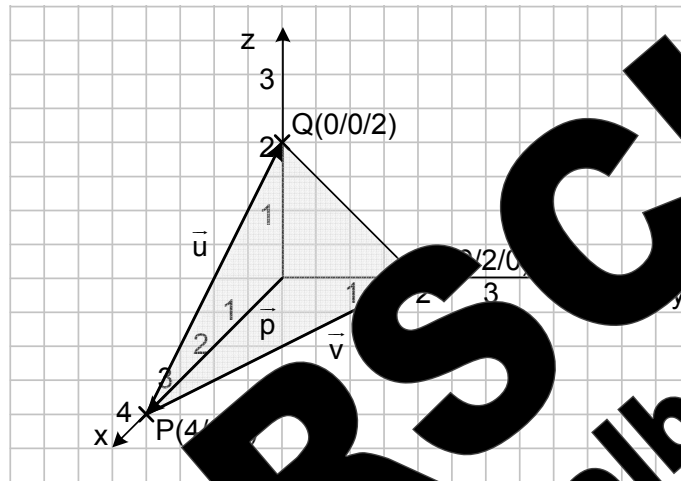
Die Koordinatendarstellung der Ebenen E und F ist _____.

- Wenn man überprüft, ob zwei Ebenen identisch sind, gibt es zwei Möglichkeiten. Die _____ ist dafür ungeeignet, da ein ungleicher Nenner eine Verunsicherung hervorrufen kann. Die _____ Darstellung ist am besten geeignet, da gleiche Nenner identische Ergebnisse haben.

Aufgabe 12.4

Zusammenhang der Koordinatendarstellung einer Ebene und ihrer Achsenabschnitte

Die Ebene aus dem Einstiegsbeispiel in Aufgabe 12.1 soll hier erneut in der Koordinatendarstellung dargestellt werden. Die Zusammenhänge herangezogen werden.



Die Ebene E_K in der einfachsten Koordinatendarstellung:

$$E_K: x + 2y + 2z = 4$$

Umformung der Koordinatengleichung

Wenn man die Koordinatendarstellung der Ebene E so umformt, dass auf der rechten Seite der Gleichung ein konstanter Wert steht, erhält man die Gleichung:

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 1$$

Formulieren Sie einen Zusammenhang zwischen den Nennern der umgeformten Koordinatendarstellung der Ebene E sowie den Koordinaten der Achsenabschnitte, indem Sie die folgenden Lücken vervollständigen:

Der Achsenabschnitt auf der x -Achse ist $\frac{4}{1}$.
Der Achsenabschnitt auf der y -Achse ist $\frac{2}{2}$.
Der Achsenabschnitt auf der z -Achse ist $\frac{2}{2}$.

Stellt man eine Ebene in der Koordinatendarstellung so dar, dass die Nennern der Brüche links vom Gleichheitszeichen eine 1 steht und im Zähler nur noch die Achsenabschnitte ohne Vorfaktoren erscheinen, so erhält man die Gleichung:

Die Koordinatendarstellung einer Ebene wird auch als **Achsenabschnittsform** bezeichnet.

4. Eine Ebene – Drei verschiedene Darstellungen – Zusammenhänge am Beispiel aus Aufgabe 12.1

Die Ebene E enthält die Punkte:

$P(4/0/0)$ $Q(0/0/2)$ $R(0/2/0)$

Ortsvektor von P als Stützvektor wählen

Spannvektoren $\vec{u} = \vec{PQ}$ und $\vec{v} = \vec{PR}$ bilden

Zu einer Ebene gibt es je nach Wahl der drei Punkte unendlich viele unterschiedliche Parameterdarstellungen.

Spannvektoren darf man kürzen.

Parameterdarstellung

$$E_P: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Stützvektor von E ist der Ortsvektor von P auf der Ebene

Das Vektorprodukt $\vec{u} \times \vec{v}$ ergibt den Normalenvektor

Normalenvektoren darf man kürzen.

Gleiche Ebenen haben gleiche gekürzte Normalenvektoren.

Normalenform

$$E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

Koordinatendarstellung

$$E_K: x + 2y + 2z = 4$$

Koeffizienten bilden den Normalenvektor

Gleiche Ebenen haben in Koordinatendarstellung identische Gleichungen.

Achtung: Im Zähler steht ein + und im Nenner liefert die Achsenabschnitte der Ebene.

Stellt man eine Ebene in der Koordinatendarstellung so dar, dass die Nennern der Brüche links vom Gleichheitszeichen eine 1 steht und im Zähler nur noch die Achsenabschnitte ohne Vorfaktoren erscheinen, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 1$$

Aufgabe 12.5

Vertiefendes Beispiel

Die Punkte P(1/1/0), Q(2/0/1) und R(0/1/2) liegen in einer Ebene E.

- a) Ermitteln Sie eine Parameter-, eine Normalen- und eine Koordinatendarstellung der Ebene.
(Kontrollergebnis: E: $2x + 3y + z = 5$)
- b) Erläutern Sie, warum es sinnvoll ist, ein Kontrollergebnis in der Koordinatendarstellung oder in der Achsenabschnittsform anzugeben.
- c) Zeichnen Sie die Ebene anhand ihrer Achsenabschnittsform so, dass ein räumlicher Eindruck von der Lage der Ebene entsteht.

5. Kurze Zusammenfassung der Ergebnisse zur Darstellung von Ebenen

Parameterdarstellung: $E_p: \vec{x} = \vec{p} + r\vec{u} + s\vec{v}$
Normalendarstellung: $E_N: (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$ mit $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$
Koordinatendarstellung: $E_K: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ mit $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ (Achsenabschnittsform)

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$
Achsenabschnitt x – Achse: $X(a/0/0)$
Achsenabschnitt y – Achse: $Y(0/b/0)$
Achsenabschnitt z – Achse: $Z(0/0/c)$

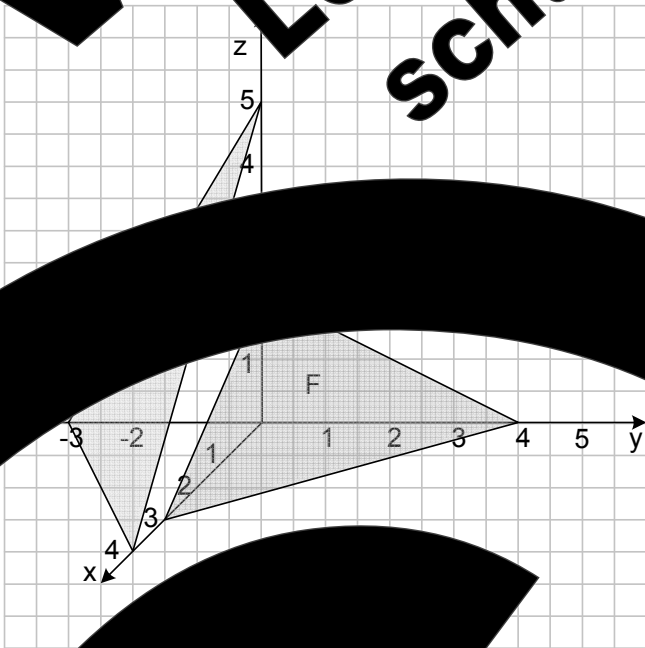
Aufgabe 12.6

Zeichnen Sie die Ebene E: $3x + 2y + 6z = 6$ mit Hilfe der Achsenabschnitte an.



Aufgabe 12.7

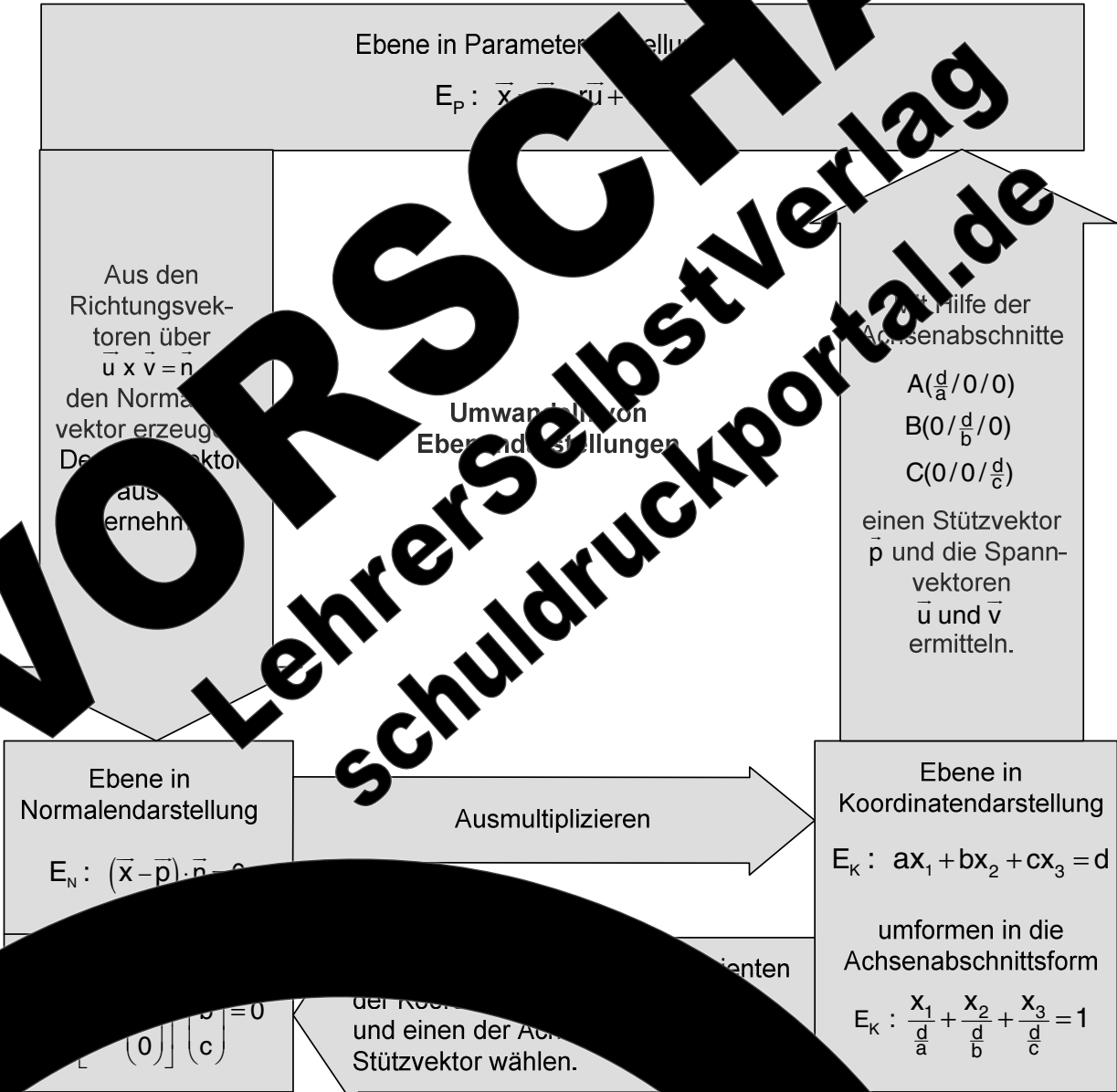
Erstellen Sie die Gleichung einer Ebene E durch P und Q in Koordinatenform mit dem geringst möglichen Rechenaufwand.



Lösungen: _____

6. Überblick Umwandeln von Ebenen

Es gibt eine Vielzahl von Möglichkeiten, eine Ebene von einer Darstellung in eine andere umzuwandeln. Die in der folgenden Abbildung dargestellten Verfahren geben in Kombination eine begrenzte Auswahl an Varianten an, mit der man jede Darstellung einer Ebene in eine andere umwandeln kann.



Ergänzungen: _____

Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Lineare Algebra selbstorganisiert erlernen



Besondere Ebenen

02-031-266

Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen	9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen	17

Einführung in die Vektorrechnung

Kapitel 3 – Koordinatensysteme	23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu den Vektoren	25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren	33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Linearer Abhängigkeit	43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit	47

Geraden in der Ebene und im Raum

Kapitel 8 – Parameterdarstellung von Geraden	49
Kapitel 9 – Lagebeziehung von Geraden	55
Kapitel 10 – Skalares und Vektorielles Produkt	59
Kapitel 11 – Vektorielles Produkt	65

Ebenen im Raum

Kapitel 12 – Darstellung von Ebenen	69
Kapitel 13 – Besondere Ebenen	81
Kapitel 14 – Lagebeziehungen von Ebenen	85
Kapitel 15 – Abstände	99
Kapitel 16 – Schnittwinkel	105
Kapitel 17 – Ebenenfamilien	107

Lineare Abbildungen

Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen	119
Kapitel 19 – Determinanten	125
Kapitel 20 – Lineare Abbildungen	137
Kapitel 21 – Eigenwerte und Eigenvektoren	143
Kapitel 22 – Diagonalisierbarkeit	145
Kapitel 23 – Verkettung von linearen Abbildungen	149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen $Ax = x'$	153

Gesamte Verantwortung für die Inhalte dieses Buches liegt bei der Autorin selbstorganisiert erlernen (ISBN 978-3-031-266-02-0).

Alle Rechte vorbehalten. All rights reserved.

Keine Weitergabe, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

SelbstVerlag

Stilles & Freunde GmbH, Koblenz (Germany)

lehrerselbstverlag.de

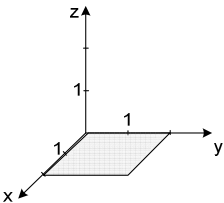
www.f-druck.de

Kapitel 13: Besondere Ebenen

Aufgabe 13.1

In den folgenden Abbildungen sind die Koordinatenebenen abgebildet. Geben Sie zu jeder Koordinatenebene eine möglichst einfache Gleichung in Parameterdarstellung, Normalendarstellung und Koordinatendarstellung.

x,y-Ebene

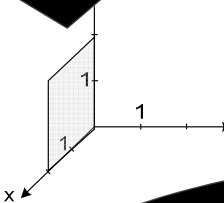


Parameterdarstellung:

Normalendarstellung:

Koordinatendarstellung:

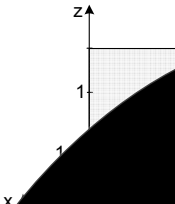
x,z-Ebene



Parameterdarstellung:

Normalendarstellung:

y,z-Ebene



Parameterdarstellung:

Normalendarstellung:

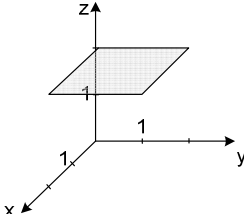
Koordinatendarstellung:

Aufgabe 13.2

In den folgenden Abbildungen sind zu den Koordinatenebenen parallele Ebenen abgebildet. Geben Sie zu jeder abgebildeten Ebene eine möglichst einfache Gleichung in Parameterdarstellung, Normalendarstellung und Koordinatendarstellung.

Zu den Koordinatenebenen parallele Ebenen

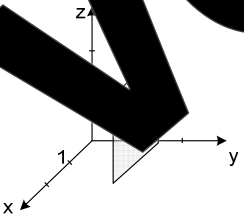
Parameterdarstellung:



Normalendarstellung:

Koordinatendarstellung:

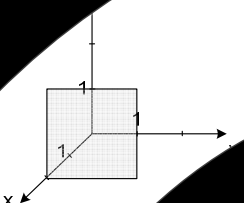
Parameterdarstellung:



Normalendarstellung:

Koordinatendarstellung:

Parameterdarstellung:



Normalendarstellung:

Koordinatendarstellung:

Aufgabe 13.3

In den folgenden Abbildungen sind Ebenen dargestellt, die zu jeweils einer Koordinatenachse parallel sind. Ermitteln Sie zu jeder abgebildeten Ebene eine möglichst einfache Gleichung, eine Parameterdarstellung, Normalendarstellung und Koordinatendarstellung.

Parameterdarstellung:

Normalendarstellung:

Koordinatendarstellung:

Parameterdarstellung:

Normalendarstellung:

Koordinatendarstellung:

Parameterdarstellung:

Normalendarstellung:

Koordinatendarstellung:

Parameterdarstellung:

Normalendarstellung:

Koordinatendarstellung:

Aufgabe 13.4

- a) Formulieren Sie eine Regel, welche beschreibt, wie man an der Koordinatendarstellung einer Ebene erkennen kann, dass sie zu einer der Koordinatenachsen parallel verläuft.

- b) Formulieren Sie eine Regel, welche beschreibt, wie man an der Koordinatendarstellung einer Ebene erkennen kann, dass sie zu einer der Koordinatenachsen parallel verläuft.

- c) Formulieren Sie eine Regel, wie man erkennen kann, dass die Ebene durch den Ursprung verläuft.

Parameterdarstellung:

Koordinatendarstellung:

Ergänzen Sie:

Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Lineare Algebra selbstorganisiert erlernen



Lagebeziehungen bei

Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen	9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen	17

Einführung in die Vektorrechnung

Kapitel 3 – Koordinatensysteme	23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu den Vektoren	25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren	33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Linearer Abhängigkeit	43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit	47

Geraden in der Ebene und im Raum

Kapitel 8 – Parameterdarstellung von Geraden	49
Kapitel 9 – Lagebeziehung von Geraden	55
Kapitel 10 – Skalares und Vektorielles Produkt	59
Kapitel 11 – Vektorielles und Kreuzprodukt	65

Ebenen im Raum

Kapitel 12 – Darstellung von Ebenen	69
Kapitel 13 – Beziehung von Ebenen	81
Kapitel 14 – Lagebeziehungen von Ebenen	85
Kapitel 15 – Abstände	99
Kapitel 16 – Schnittwinkel	105
Kapitel 17 – Ebenenfamilien	107

Lineare Abbildungen

Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen	119
Kapitel 19 – Determinanten	125
Kapitel 20 – Lineare Abbildungen	137
Kapitel 21 – Lineare Abbildungen	143
Kapitel 22 – Lineare Abbildungen	145
Kapitel 23 – Verkettung von linearen Abbildungen	149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen $Ax = x'$	153

Gesamte Verantwortung für die Inhalte liegt bei der Autorin selbstorganisiert erlernen (02-031-266)

Alle Rechte vorbehalten. All rights reserved.

Keine Weitergabe, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,

aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet

SelbstVerlag

Freies & Freunde GmbH, Koblenz (Germany)

lehrerselbstverlag.de

www.f-druck.de

Kapitel 14: Lagebeziehungen bei Ebenen

In der linearen Algebra gibt es für die Untersuchung der Lagebeziehungen zwischen Ebenen im Raum und Punkten sowie Geraden und anderen Ebenen eine Vielzahl von Möglichkeiten. Jedoch völlig ausreichend eine Methode zu beherrschen. Daher wird in den folgenden Abschnitten für die verschiedenen Aufgabentypen jeweils nur eine Variante vorgeschlagen.

1. Lagebeziehung Ebene E und Punkt R

Prinzipielle Vorgehensweise:

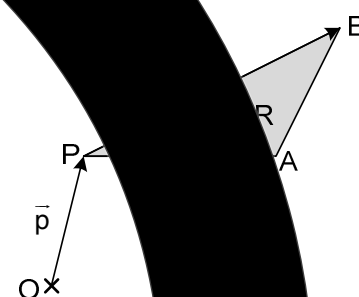
Die Koordinaten bzw. Komponenten des Ortsvektors zum Punkt R, als $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$ werden unabhängig von der Darstellung der Ebene in der Ebeneengleichung für die Komponenten x, y und z eingesetzt.

Ebene in Parameterdarstellung	Ebene in Normalengleichung	Ebenen in Koordinatendarstellung
$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ Die Parameter s und t mit Hilfe eines LGS berechnen. Die Berechnung des LGS ist oft schwierig. Daher ist es günstiger, die Ebene in die Koordinatendarstellung umzurechnen.	$E: ax + by + cz = d$ Komponenten von r für x, y und z einsetzen. $ar_1 + br_2 + cr_3 = d$ Linke Seite der Gleichung berechnen.	Komponenten von r für x, y und z einsetzen. $ar_1 + br_2 + cr_3 = d$ Linke Seite der Gleichung berechnen.
Interpretation der Ergebnisse		
Rechnung ist widerspruchsfrei $\Rightarrow$ R liegt in E		
Rechnung liefert Widerspruch $\Rightarrow$ R liegt nicht in E		

Zusatzinfo:

Bei Frage, ob ein Punkt R in einem Dreieck PAB liegt, (s. Abb.) kann man die Parameterdarstellung benutzen, um dies festzustellen. Man stellt sich die folgenden drei Bedingungen:

$$\begin{aligned} &0 \leq s < 1 \quad \text{und} \\ &0 \leq t < 1 \quad \text{und} \\ &0 \leq s+t < 1 \end{aligned}$$



Aufgabe 14.1

Zeigen Sie, dass der Punkt R(6/0/2) auf der Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ liegt. Es werden die beiden Rechnungen und beurteilen Sie, bei welchem Weg der Rechenaufwand am geringsten ist.

Weg 1

Mit der Parameterdarstellung arbeiten und das LGS in Normalengleichung in Koordinatendarstellung umformen.

$\vec{r}$ in E einsetzen:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

LGS erstellen:

$$\text{I} \quad 5 - s - t = 0$$

$$\text{II} \quad -s - 2t = -1$$

$$\text{III} \quad -s - 2t = -1$$

$$\text{IV} \quad -2t = -2$$

$$t = 1$$

$$t \text{ in III: } -s + 1 = -1$$

$$-s = -2 \Rightarrow s = 2$$

$$-5 = -5$$

$$-5 = -5$$

$$-5 = -5$$

$$-5 = -5$$

$$-5 = -5$$

$$-5 = -5$$

$$-5 = -5$$

$$-5 = -5$$

$$-5 = -5$$

$$-5 = -5$$

$$-5 = -5$$

$$-5 = -5$$

$$-5 = -5$$

Aufgabe 14.2

Prüfen Sie, ob der Punkt R(1/0/2) auf der Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ liegt. Berechnen Sie beide

Wege mit Hilfe des vorherigen Beispiels und geben Sie mit Begründung an, welcher Rechenweg einfacher für Sie ist.

Weg 1

Mit der Parameterdarstellung arbeiten und die Ebenengleichung in Koordinatendarstellung umformen.

$\vec{r}$ in E einsetzen:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

LGS erhalten:

$$\begin{aligned} I: 0 &= s + t \Rightarrow t = -s \\ II: -s &= 1 \Rightarrow s = -1 \\ -s &= 2 \Rightarrow s = -2 \end{aligned}$$

s, t in II: $-1 \neq 1$

Widerspruch $\Rightarrow$ R liegt nicht in E

Normalenvektor bestimmen:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} E: & \\ E: & x + y - z = 1 \end{aligned}$$

$$R \text{ in } E \text{ einsetzen: } 1 + 0 - 2 \stackrel{!}{=} 1 \quad -1 \neq 1$$

Widerspruch $\Rightarrow$ R liegt nicht in E

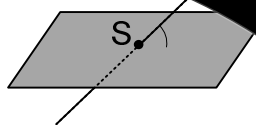
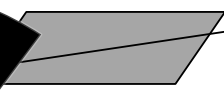
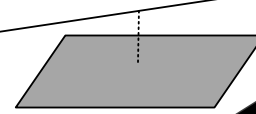
Übungen:

2. Lagebeziehung Ebene E und Gerade g

Prinzipielle Vorgehensweise:

Die Komponenten x, y und z des Vektors $\vec{x}$ der Ebenengleichung $E: \vec{x} = \vec{p} + s\vec{u} + t\vec{v}$ durch die entsprechenden Komponenten der Geradengleichung $g: \vec{x} = \vec{q} + r\vec{w}$ einsetzen.

Gegeben: $E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ und $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ bzw. $x = q_1 + rw_1$
 $y = q_2 + rw_2$
 $z = q_3 + rw_3$

Ebene in Parameterdarstellung	Ebene in Normalen- darstellung	Ebenen in Koordinatendarstellung
Die Ebenengleichung mit der Geradengleichung gleichsetzen und das LGS nach r, s und t auflösen. $\vec{q} + r\vec{w} = \vec{p} + s\vec{u} + t\vec{v}$ oder $\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ Bestimmung des LGS mittels Gauß-Verfahren. Falls es im Allgemeinen aufwändig ist, daher besser mit der Koordinatendarstellung arbeiten. Wenn geprüft werden soll, ob der Durchstoßpunkt in einem bestimmten Dreieck liegt müssen s und t bestimmt werden. (Vgl. Zusatzinfo Lagebeziehungen)	Die Ebenengleichung in Koordinatendarstellung setzen und nach x, y und z auflösen. Die Komponenten vom Vektor $\vec{x}$ der Geradengleichung in die Ebenengleichung einsetzen. Normen und dann wie oben. Bestimmung des LGS mittels Gauß-Verfahren.	Komponenten vom Vektor $\vec{x}$ der Geradengleichung in die Ebenengleichung einsetzen. für x, y und z in der Ebenengleichung $ax + by + cz = d$ einsetzen und nach r auflösen: $a(q_1 + rw_1) + b(q_2 + rw_2) + c(q_3 + rw_3) = d$
Die Geradengleichung für r, s und t. Einsetzen von r in die Ebenengleichung g liefert die Koordinaten des Schnittpunktes bzw. Durchstoßpunktes S(s ₁ /s ₂ /s ₃).		Die Geradengleichung für r. Einsetzen von r in die Ebenengleichung g liefert die Koordinaten des Schnittpunktes bzw. Durchstoßpunktes S(s ₁ /s ₂ /s ₃).
Das LGS ist unterteilt in drei Fälle: 1. Lösungsmenge ist ein Punkt. 2. Lösungsmenge ist eine Gerade. 3. Lösungsmenge ist leer.		Gleichungssystem der Form 0=0; Lösungsmenge ist die Gerade.
Widerspruch $\Rightarrow$ Gerade ist parallel zu E		Widerspruch $\Rightarrow$ Gerade ist parallel zu E

Aufgabe 14.3

Gegeben ist die Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Untersuchen Sie die Lagebeziehung von E zu

den Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $i: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, indem Sie die

folgenden Rechnungen vervollständigen. Begründen Sie zunächst, warum es sinnvoll ist, hier mit der Koordinatendarstellung der Ebene zu arbeiten und zeigen Sie durch Rechnung, dass sich für die Koordinatendarstellung die Gleichung $x + 4y + 6z = 9$ ergibt.

Begründung:

Berechnung der Koordinatendarstellung von E:

Lagebeziehung von E und g:

Aus $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ergeben sich die Komponenten: $x = \underline{\hspace{1cm}}$, $y = \underline{\hspace{1cm}}$, $z = \underline{\hspace{1cm}}$

Einsetzen in E ergibt: $\underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}}(\underline{\hspace{1cm}} - \underline{\hspace{1cm}}) + \underline{\hspace{1cm}}(\underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}}) = 9$

$\underline{\hspace{1cm}} = 9$

$9 = 9$

Das Ergebnis hat die Form $0 = 0$, ist also allgemeingültig. $\Rightarrow$ g liegt in E

Lagebeziehung E und h:

Aus $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ergeben sich die Komponenten: $x = \underline{\hspace{1cm}}$, $y = \underline{\hspace{1cm}}$, $z = \underline{\hspace{1cm}}$

Einsetzen in E ergibt: $\underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}}(\underline{\hspace{1cm}} - \underline{\hspace{1cm}}) + \underline{\hspace{1cm}}(\underline{\hspace{1cm}} - \underline{\hspace{1cm}}) = 9$

$\underline{\hspace{1cm}}$

$\underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$

$\underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$

Widerspruch $\Rightarrow$ g ist nicht in E

Lagebeziehung E und i:

Aus $i: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ergeben sich die Komponenten: $x = \underline{\hspace{1cm}}$, $y = \underline{\hspace{1cm}}$, $z = \underline{\hspace{1cm}}$

Einsetzen in E ergibt: $\underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}}(\underline{\hspace{1cm}} - \underline{\hspace{1cm}}) + \underline{\hspace{1cm}}(\underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}}) = 9$

$\underline{\hspace{1cm}} = 9$

$\underline{\hspace{1cm}}$

$\underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$

$\underline{\hspace{1cm}} = 4$

Da keine Lösung gibt, existiert ein Schnittpunkt.

Schnittpunkt berechnen durch Einsetzen von r in die Gerade

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \underline{\hspace{1cm}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \underline{\hspace{1cm}} \\ \underline{\hspace{1cm}} \\ \underline{\hspace{1cm}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Die Gerade g verläuft durch den Punkt S($\underline{\hspace{1cm}}$ / $\underline{\hspace{1cm}}$ / $\underline{\hspace{1cm}}$).

3. Spurpunkte von Geraden

Def.: Spurpunkte S sind die Durchstoßpunkte der Gerade g durch die Koordinatenebenen

Aufgabe 14.4

Berechnen Sie die Spurpunkte für die Geraden $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $r, s \in \mathbb{R}$.

Ermittelt man die Spurpunkte mit der Koordinatendarstellung der Koordinatenebenen wird die Rechnung besonders einfach, da man die einzelnen Komponenten der Geraden nur Null setzen muss.

Spurpunkt x,y-Ebene

Koordinatengleichung: $z = 0$

z-Koordinate Null setzen:

$$\begin{aligned} -1 + s &= 0 \\ s &= 1 \end{aligned}$$

in g einsetzen

$$\vec{s}_{xy} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Spurpunkt: $S_{xy}(1/4/0)$

Spurpunkt x,z-Ebene

Koordinatengleichung: $y = 0$

y-Koordinate Null setzen:

$$\begin{aligned} 6 - 2r &= 0 \\ r &= 3 \end{aligned}$$

in g einsetzen

$$\vec{s}_{xz} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Spurpunkt: $S_{xz}(-1/0/2)$

Spurpunkt y,z-Ebene

Koordinatengleichung: $x = 0$

x-Koordinate Null setzen:

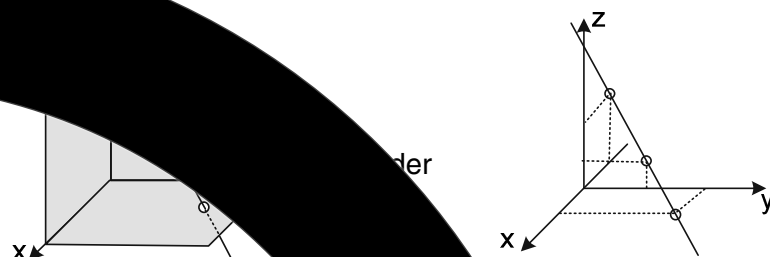
$$\begin{aligned} 2 - r &= 0 \\ r &= 2 \end{aligned}$$

in g einsetzen

$$\Rightarrow \vec{s}_{yz} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Spurpunkt: $S_{yz}(0/2/1)$

Die Spurpunkte kann man zur räumlichen Lage von Geraden besonders anschaulich darstellen:



Übungen

Ü14.1 Berechnen Sie die Spurpunkte der Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und zeichnen Sie die Gerade so, dass ein räumlicher Eindruck entsteht.



Ü14.2 Auf einen Turm, dessen Dach aus einer quadratischen Pyramide besteht (s. Abbildung), treffen Sonnenstrahlen auf.

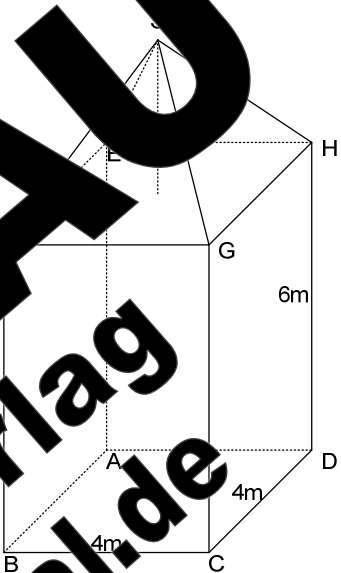
a) Ermitteln Sie die Koordinaten aller Eckpunkte so, dass der Punkt A im Ursprung des Koordinatensystems steht

b) Zeichnen Sie ein Schrägbild des Turms.
(1m $\hat{=}$ 2 Kästchen)

c) Die Richtung der Sonnenstrahlen wird durch den Vektor

$\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ beschrieben. Auf dem Turm steht ein Punkt $P(x,y,z)$ mit $z=6$ m.

entsteht dadurch ein Schatten. Mitteln Sie die Eckpunkte der Schattenfläche auf dem Boden. Zeichnen Sie die gesamte Schattenfläche.



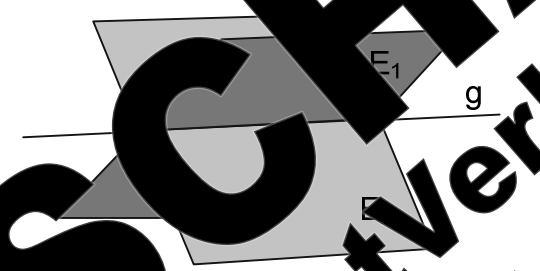
A(/ /) B(/ /) C(/ /) D(/ /)
E(/ /) F(/ /) G(/ /) H(/ /)

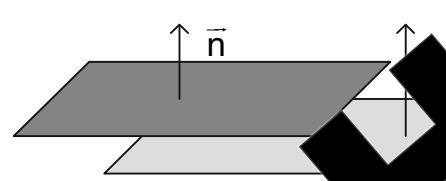


Ergänzen

4. Lagebeziehungen bei Ebenen

Bei der Bestimmung der Lagebeziehung von zwei Ebenen sollte man aufgrund des Rechenaufwandes darauf achten, dass entweder eine Ebene in Koordinatendarstellung oder beide Ebenen in Koordinatendarstellung vorliegen. Damit kann man die in den Beispielen beschriebenen Fälle reduzieren.

Zwei Ebenen schneiden sich → Es existiert eine Schnittgerade g	
	
Ebene 1 in Koordinatendarstellung Ebene 2 in Parameterdarstellung	Ebene 1 in Koordinatendarstellung Ebene 2 in Koordinatendarstellung
$E_1: 4y + 3z = 36$ $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $x = 3r - s$ $y = 0$ $z = 3 - r - s$ Einsetzen der Komponenten x, y, z in E_2 ergibt: $4(3r - s) + 3(3 - r - s) = 36$ $12r - 4s + 9 - 3r - 3s = 36$ $9r - 7s = 27$ nach r oder s auflösen $r = 3 + s$ in E_1 einsetzen $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + (3 + s) \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 + 3s \\ 0 \\ 3 - 3 - 3s + 2s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 + 3s \\ 0 \\ -s \end{pmatrix}$ Zusammenfassung: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	Durch Additionsverfahren x, y oder z eliminieren $E_1: I \quad x + 2y + 2z = 6$ $E_2: II \quad x - y + z = 3$ I-II $III \quad 3y + z = 3$ Da das LGS unterbestimmt ist, darf man eine Variable frei wählen. Hier z.B.: $z = 3t$ einsetzen z in III liefert y $y = 1 - t$ einsetzen y und z in II liefert x $x = 4 - 4t$ Die Ausdrücke für x, y, z werden als Vektor dargestellt und es ergibt sich die Parameterdarstellung der Schnittgeraden g ergibt: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 4t \\ 1 - t \\ 3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Zwei Ebenen sind parallel zueinander → Es ergibt sich ein Widerspruch	
Die Normalenvektoren der Ebenen sind kollinear und alle Verfahren erzeugen einen Widerspruch bei der Lösung der entsprechenden Gleichungssysteme.	
	
Ebene 1 in Koordinatendarstellung Ebene 2 in Parameterdarstellung	Ebene 1 in Koordinatendarstellung Ebene 2 in Koordinatendarstellung
$E_1: 2x + y + z = 1$ $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $x = -2r + 2s$ $y = 2r + s$ $z = 2r + s$ Einsetzen der Komponenten x, y, z in E_1 ergibt: $2(-2r + 2s) + (2r + s) + (2r + s) = 1$ $-4r + 4s + 2r + s + 2r + s = 1$ $2s = 1$ $s = 0.5$	Durch Additionsverfahren x, y oder z eliminieren $E_1: I \quad x - y + 2z = 6$ $E_2: II \quad 2x - 4y + 4z = 8$ $2 \cdot I - II$ $2x - 2y + 4z = 12$ $2x - 4y + 4z = 8$ $2y = 4$ $y = 2$

Zwei Ebenen sind identisch → Es ergibt sich eine allgemeingültige Lösung	
Die Normalenvektoren der Ebenen sind kollinear und alle drei Verfahren erzeugen allgemeingültige Lösungen. Die Ebenen selbst sind dann Lösungsmenge.	
Ebene 1 in Koordinatendarstellung Ebene 2 in Parameterdarstellung	Ebene 1 in Koordinatendarstellung Ebene 2 in Koordinatendarstellung
$E_1: 2x + y + z = 1$ $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $x = -2r + 2s$ $y = 2r + s$ $z = 2r + s$ Einsetzen der Komponenten x, y, z in E_1 ergibt: $2(-2r + 2s) + (2r + s) + (2r + s) = 1$ $-4r + 4s + 2r + s + 2r + s = 1$ $2s = 1$ $s = 0.5$	Durch Additionsverfahren x, y oder z eliminieren $E_1: I \quad x - y + 2z = 6$ $E_2: II \quad 2x - 4y + 4z = 8$ $2 \cdot I - II$ $2x - 2y + 4z = 12$ $2x - 4y + 4z = 8$ $2y = 4$ $y = 2$

Beispiel: Schnitt zweier Ebenen, die zu einer Koordinatenachse parallel verlaufen

Gegeben sind die Ebenen $E_1: 2x + y = 7$
 $E_2: 4x - y = 5$

Zur Ebene E_1 ist die z-Komponente in der Ebenengleichung nicht vorhanden. Ist die Ebene parallel zur z-Achse.

Additionsverfahren: $E_2: \quad 4x - y = 5 \quad | +1$

$6x$

x in $E_1: 2x + y = 7$

z frei wählbar: $z = r$

Da die z-Komponente in keiner Gleichung vorkommt, ist das GS unabhängig von der Wahl für z lösbar. Daher kann man z frei wählen.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2+0 \\ 0+1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 3+0 \\ 0+1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Schnittgerade } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da die beiden Ebenen parallel zur z-Achse verlaufen, ist auch die Schnittgerade parallel zur z-Achse

Ergä

5. Orthogonale Spiegelung eines Punktes an einer Ebene

Aufgabe 14.3

Erarbeiten Sie sich das hier dargestellte Verfahren zur Spiegelung eines Punktes H an eine Ebene E (es gibt auch andere Verfahren, die hier nicht behandelt werden) indem Sie die im Beispiel dargestellten Rechenschritte erläutern.

Gegeben sind der Punkt $R(4 / -3 / 6)$ und die Ebene $E: x - 2y + z = 4$

Gesucht sind die Koordinaten des gespiegelten Punktes R' .

Schritt 1:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Schritt 2:

$$4 + t - 2(-3 - 2t) + 6 + t = 4$$

$$4 + t + 6 + 4t + 6 + t = 4$$

$$\vec{r} = \vec{r} + 2t\vec{n}$$

$$\vec{r}' = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-4 \\ -3+8 \\ 6-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ergebnis:

Ergebnisse:

Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Lineare Algebra selbstorganisiert erlernen



Kapitel

Abstände

Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen	9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen	17

Einführung in die Vektorrechnung

Kapitel 3 – Koordinatensysteme	23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu den Vektoren	25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren	33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Linearer Abhängigkeit	43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit	47

Geraden in der Ebene und im Raum

Kapitel 8 – Parameterdarstellung von Geraden	49
Kapitel 9 – Lagebeziehung von Geraden	55
Kapitel 10 – Skalares und Vektorielles Produkt	59
Kapitel 11 – Vektorielles und Kreuzprodukt	65

Ebenen im Raum

Kapitel 12 – Darstellung von Ebenen	69
Kapitel 13 – Beziehung zwischen Ebenen	81
Kapitel 14 – Lagebeziehungen von Ebenen	85
Kapitel 15 – Abstände	99
Kapitel 16 – Schnittwinkel	105
Kapitel 17 – Ebenenfamilien	107

Lineare Abbildungen

Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen	119
Kapitel 19 – Determinanten	125
Kapitel 20 – Lineare Abbildungen	137
Kapitel 21 – Lineare Abbildungen	143
Kapitel 22 – Lineare Abbildungen	145
Kapitel 23 – Verkettung von linearen Abbildungen	149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen $Ax = x'$	153

Gesamte Verantwortung für die Inhalte dieses Buches liegt bei der Autorin selbstorganisiert erlernen (ISBN 978-3-031-266-02-0)

Alle Rechte vorbehalten. All rights reserved.

Keine Weitergabe, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet

SelbstVerlag

Verlag des Autors & Freunde GmbH, Koblenz (Germany)

www.lehrerselbstverlag.de

www.f-druck.de

Kapitel 15: Abstände

1. Abstandsberechnungen Punkt-Ebene

Aufgabe 15.1

Herleitung der Formel zur Abstandsberechnung Punkt-Ebene

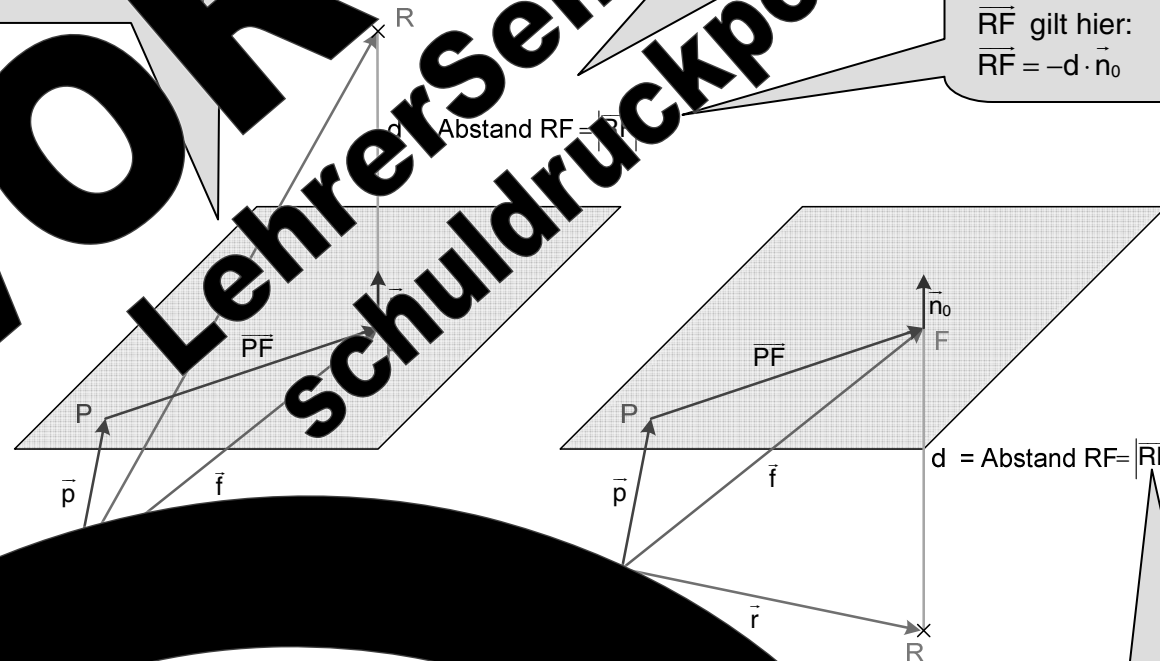
Es gibt unterschiedliche Möglichkeiten den Abstand eines Punktes von einer Ebene E zu berechnen. Die Betrachtungen sollen hier auf die Herleitung der Abstandsformel, die sich in den Tafelwerken befindet beschränkt werden. Verwenden Sie die Herleitung dieser Formel, indem Sie die geforderten Begründungen und Erläuterungen formulieren.

Da E bekannt ist, kennt man auch einen Punkt P auf E und den Normaleneinheitsvektor $\vec{n}_0$.

Erinnerung: $\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$

Die Länge der Lotstrecke $\overline{RF}$ also der Betrag des Vektors $\overline{RF}$ ist die kürzeste Verbindung von R zur Ebene E und gibt damit den Abstand von R und E an, wobei R nicht bekannt ist.

Für den Vektor $\overline{RF}$ gilt hier:
 $\overline{RF} = -d \cdot \vec{n}_0$



Für den Vektor $\overline{RF}$ gilt hier:
 $\overline{RF} = d \cdot \vec{n}_0$

1. Begründen Sie, warum gilt: $(\vec{r} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_0 = 0$

2. ... ist bekannt. Begründen Sie, warum unabhängig von der Lage des Punktes

3. Begründen Sie, warum gilt:

Wenn R und $\vec{n}_0$ auf der gleichen Seite von E liegen, gilt: $\vec{f} = \vec{r} - d\vec{n}_0$.

Wenn R und $\vec{n}_0$ auf unterschiedlichen Seiten von E liegen, gilt: $\vec{f} = \vec{r} + d\vec{n}_0$.

4. Setzen Sie den unter 3. ermittelten Ausdruck $\vec{f}$ nun in den Ausdruck $(\vec{r} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_0 = 0$ ein und zeigen Sie durch geeignete Umformungen, dass sich die beiden angegebenen Beziehungen ergeben:



5. Begründen Sie, warum man die beiden Ergebnisse zu der folgenden Formel zusammenfassen kann:

Abstand eines Punktes R von einer Ebene E:

$$d = |(\vec{r} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_0|$$

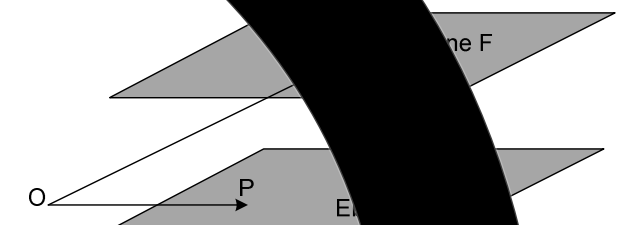
Begründen Sie:

Aufgabe 15.2

Abstandsprobleme, die sich auf den Abstand Punkt - Ebene und Abstand Geraden - Ebene lassen

a) Abstand zweier Ebenen

Begründen Sie, dass die Ebenen E und F parallel sind, wenn die Abstandsformel $d = |(\vec{r} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_0|$ für alle Punkte P auf E und R auf F verwendet werden kann.



b) Abstand zwischen Ebene und paralleler Gerade

Begründen Sie anhand der Abbildung rechts, dass die Abstandsberechnung der Ebene E und Gerade g identisch mit der Abstandsberechnung zwischen dem Punkt R und der Ebene E ist und somit die Formel $d = |(\vec{r} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_0|$ angewandt werden kann.



c) Abstand zwischen windschiefen Geraden

Begründen Sie anhand der Abbildungen 1 bis 3, dass man den Abstand zwischen zwei windschiefen Geraden mit der Abstandsberechnung Punkt-Ebene $d = |(\vec{r} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_0|$ berechnen kann und geben Sie an, wie der Normalenvektor $\vec{n}_0$ berechnet wird.

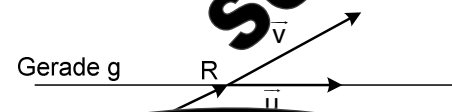
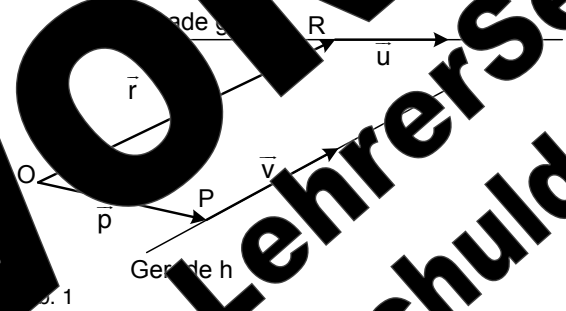
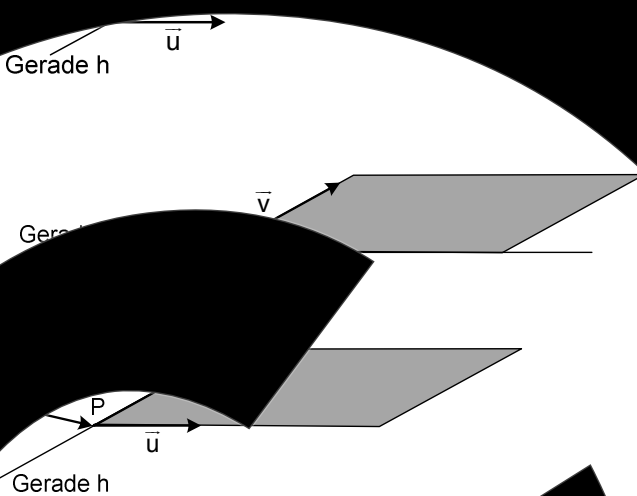


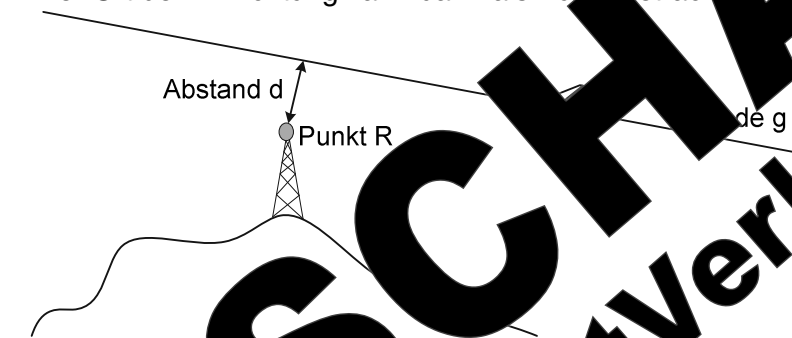
Abb. 2



3

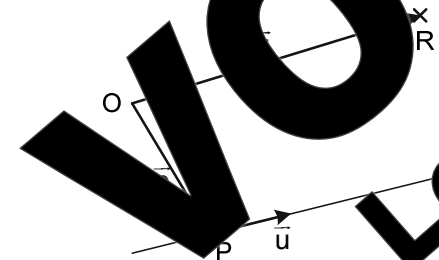
2. Abstand Punkt-Gerade

Ein klassisches Beispiel hinsichtlich der Berechnung des Abstandes von Punkten und Geraden findet sich im Bereich der Flugsicherung. Oft müssen Flugrouten, die im Idealfall als Gerade gesehen werden können, in einem bestimmten Abstand von wichtigen Einrichtungen, beispielsweise von Türmen verlaufen. Der Ort der Einrichtung kann dann als Punkt betrachtet werden.



Aufgabe 15.3

Erarbeiten Sie sich das Diagramm und das Verfahren zur Bestimmung des Abstands eines bekannten Punktes R von einer bekannten Gerade g, indem Sie das Beispiel schrittweise durcharbeiten und die Texte ergänzen.

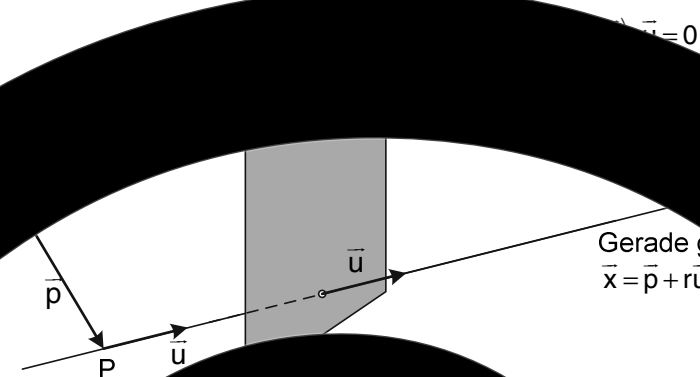


Gegeben sind der Punkt $R(3/4/4)$ und die Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gesucht ist der Abstand des Punktes R von der Geraden g.

Schritt 1:

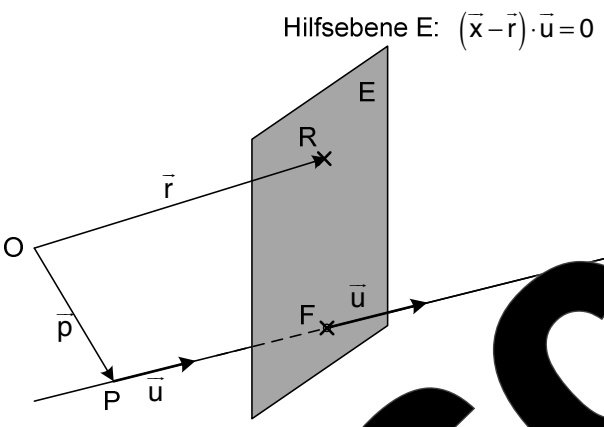


$$E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$x - 4y + z = -9$$

Mit Hilfe von Schritt 1 wird eine Hilfsebene E in _____ durch _____ ermittelt. Der Normalenvektor entspricht dem _____, mit dem die Gerade g _____ zur Ebene _____ ist.

Schritt 2:



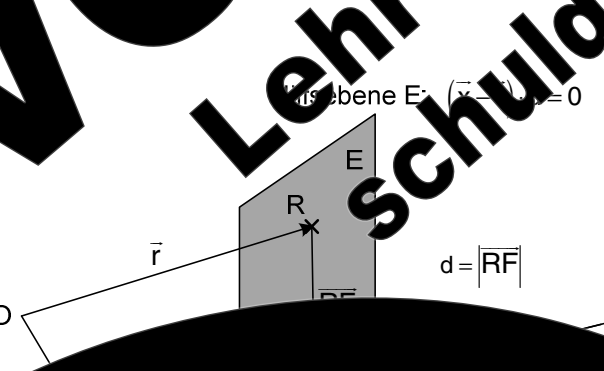
Hilfsebene E: $(\vec{x} - \vec{r}) \cdot \vec{u} = 0$

Gerade g: $\vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{u}$

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 2 \\ -5 + 8 \\ 4 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$s - 4(1 - 3) + 1 \cdot 2 = -9$$
$$s - 4(20 + 16s + 4) + s = -9$$
$$18s = -36$$
$$s = -2$$

Ermitteln des Abstandes d von P zu g durch die
Hilfsebene E

Schritt 3:



Hilfsebene E: $(\vec{x} - \vec{r}) \cdot \vec{u} = 0$

$$d = |\vec{RF}| = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 - 3 \\ 3 - 4 \\ 2 - 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - 3 \\ 3 - 4 \\ 2 - 4 \end{pmatrix}} = \sqrt{\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}} = \sqrt{4 + 1 + 4}$$
$$d = 3LE$$

Berechnen Sie den Abstand d von P zu g .
entspricht dem Abstand des Punktes P von der Geraden g .

Übungen:

Raum für Notizen



Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Lineare Algebra selbstorganisiert erlernen



Kapitel

Schnittwinkel

Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen	9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen	17

Einführung in die Vektorrechnung

Kapitel 3 – Koordinatensysteme	23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu den Vektoren	25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren	33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Linearer Abhängigkeit	43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit	47

Geraden in der Ebene und im Raum

Kapitel 8 – Parameterdarstellung von Geraden	49
Kapitel 9 – Lagebeziehung von Geraden	55
Kapitel 10 – Skalares und Vektorielles Produkt	59
Kapitel 11 – Vektorielles und Kreuzprodukt	65

Ebenen im Raum

Kapitel 12 – Darstellung von Ebenen	69
Kapitel 13 – Besondere Ebenen	81
Kapitel 14 – Lagebeziehungen von Ebenen	85
Kapitel 15 – Abstände	99
Kapitel 16 – Schnittwinkel	105
Kapitel 17 – Ebenenfamilien	107

Lineare Abbildungen

Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen	119
Kapitel 19 – Determinanten	125
Kapitel 20 – Lineare Abbildungen	137
Kapitel 21 – Lineare Abbildungen	143
Kapitel 22 – Lineare Abbildungen	145
Kapitel 23 – Verkettung von linearen Abbildungen	149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen $Ax = x'$	153

Gesamte Verantwortung für die Inhalte dieses Buches liegt bei der Autorin selbstorganisiert erlernen (ISBN 978-3-031-266-02-0)

Alle Rechte vorbehalten. All rights reserved.

Keine Weitergabe, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,

aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet

SelbstVerlag

Freunde & Freunde GmbH, Koblenz (Germany)

Lehrerselbstverlag.de

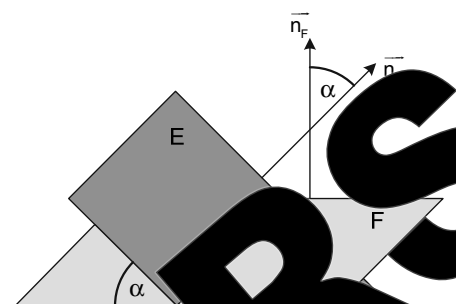
www.f-druck.de

Kapitel 16: Schnittwinkel

Aus Kapitel 10 ist die Berechnung von Schnittwinkeln zwischen zwei Geraden bekannt. Die Ermittlung von Schnittwinkeln bei Ebenen läuft in der Regel darauf hinaus, die in den Formeln angegebenen Formeln richtig anzuwenden.

Aufgabe 16.1

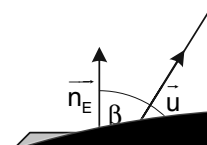
Verdeutlichen Sie sich die gegebenen Formeln anhand der Abbildungen und berechnen Sie die geforderten Schnittwinkel.

a) Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen

Der Schnittwinkel zwischen den Ebenen entspricht dem Schnittwinkel der Normalenvektoren.

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_E \cdot \vec{n}_F|}{|\vec{n}_E| \cdot |\vec{n}_F|}$$

Berechnen Sie den Schnittwinkel zwischen den Ebenen E: $2x + y + 2z = 4$ und F: $x - 5y = 3$

b) Schnittwinkel zwischen Gerade und Ebene

Der Richtungsvektor der Geraden $\vec{u}$ schließt mit dem Normalenvektor der Ebene den Winkel β ein. Es gilt damit:

$$\cos \beta = \frac{|\vec{n}_E \cdot \vec{u}|}{|\vec{n}_E| \cdot |\vec{u}|}$$

$\beta = \cos 90^\circ - \alpha = \sin \alpha$, also $\cos \beta = \sin \alpha$ gilt, folgt:

$$\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 90^\circ - \beta$$

g

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{n}_E \cdot \vec{u}|}{|\vec{n}_E| \cdot |\vec{u}|}$$

zwischen
Gerade:

Berechnen Sie den Schnittwinkel zwischen der Ebene E: $2x + y + 2z = 4$ und der

Geraden g : $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s$

die Übungen:

Raum für Notizen



Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Lineare Algebra selbstorganisiert erlernen



Kapitel

Ebenenschar

Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen	9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen	17

Einführung in die Vektorrechnung

Kapitel 3 – Koordinatensysteme	23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu den Vektoren	25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren	33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Linearer Abhängigkeit	43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit	47

Geraden in der Ebene und im Raum

Kapitel 8 – Parameterdarstellung von Geraden	49
Kapitel 9 – Lagebeziehung von Geraden	55
Kapitel 10 – Skalares und Vektorielles Produkt	59
Kapitel 11 – Vektorielles und Kreuzprodukt	65

Ebenen im Raum

Kapitel 12 – Darstellung von Ebenen	69
Kapitel 13 – Bestimmene Ebenen	81
Kapitel 14 – Lagebeziehungen von Ebenen	85
Kapitel 15 – Abstände	99
Kapitel 16 – Schnittwinkel	105
Kapitel 17 – Ebenenscharen	107

Lineare Abbildungen

Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen	119
Kapitel 19 – Determinanten	125
Kapitel 20 – Lineare Abbildungen	137
Kapitel 21 – Eigenwerte und Eigenvektoren	143
Kapitel 22 – Diagonalisierbarkeit	145
Kapitel 23 – Verkettung von linearen Abbildungen	149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen $Ax = x'$	153

Gesamte Verantwortung für die Inhalte dieses Buches liegt bei der Autorin selbstorganisiert erlernen (ISBN 978-3-031-266-031-266)

Alle

Rechte vorbehalten. All rights reserved.

Keine Haftung für Druckfehler, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet

SelbstVerlag

Verlag des Autors & Freunde GmbH, Koblenz (Germany)

Lehrerselbstverlag.de

www.f-druck.de

Kapitel 17: Ebenenscharen

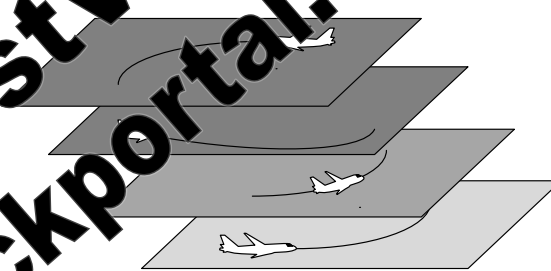
Der Begriff Ebenenschar

Die bisherigen Betrachtungen zu Ebenen haben sich bereits auf Lagebeziehungen zwischen Ebenen bezogen. Dieses Kapitel beschränkt sich auf Ebenen, die **parallel zueinander liegen** und auf Ebenen, welche **eine gemeinsame Schnittgerade** besitzen. Da es in beiden Fällen eine unendliche Anzahl von Ebenen mit den angegebenen Lagebeziehungen gibt, spricht man hier von **Ebenenscharen**. Man erkennt eine Ebenenschar anhand der Ebenengleichung. Die Ebenengleichungen erhalten neben den Variablen x , y und z noch einen **Parameter**, wie z.B. den Parameter $a \in \mathbb{R}$.

Beispiel für eine Ebenenschar: $E_a: ax + 2a^2y - 3az = 1 + a$ mit $a \in \mathbb{R}$

Ebenenscharen bei parallelen Ebenen

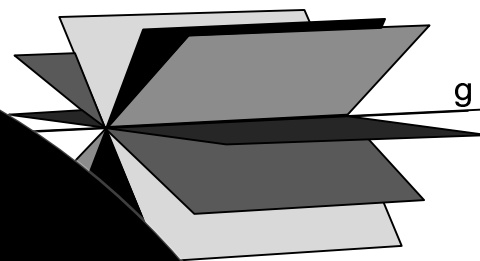
Zur Veranschaulichung findet man ein Beispiel aus dem Bereich der Flugverkehrsplanung. Wenn sich an einem Flugplatz mehrere Landungs- und Abflurflüge befinden, muss eine Kollision der Flugzeuge verhindert werden. Wenn man die Flugbahnen der Flugzeuge als Geraden in der Ebene interpretiert, dann bilden die Flugbahnen, die auf parallelen Ebenen liegen, eine Ebenenschar. Die Ebenen, die die Flugbahnen verlaufen können, bildet eine Ebenenschar. D.h., aus der unendlichen Anzahl der möglichen parallelen Ebenen gehören nur die Ebenen zur Ebenenschar, die die Flugbahnen zur Klasse sind.



Kollisionsfreie Flugbahnen befinden sich auf einer Schar paralleler Ebenen.

Ebenenscharen bei sich schneidenden Geraden

Alle Ebenen, die als besondere Eigenschaft eine gemeinsame Gerade als Schnittgerade haben, werden als Ebenenschar bezeichnet. Die Ebenen, die die gemeinsame Gerade enthalten, bilden eine Ebenenschar.



Bei parallelen Ebenen bei den Ebenenscharen, unter den unendlich vielen Ebenen im Raum, bilden nur einen Teil von Ebenen, die eine bestimmte Bedingung erfüllen müssen. Diese Teilmenge von Ebenen bezeichnet man dann, wie bei den parallelen Ebenen, als Ebenenschar.

Das Verknüpfen der Ebenen zu einer Ebenenschar erfolgt durch die Bedingung, dass die Ebenen eine gemeinsame Gerade haben. Die Ebenenscharen werden durch die Ebenengleichung beschrieben.

Aufgabe 17.1

Ebenenscharen bei parallelen Ebenen

Die Ebenengleichungen bei einer Ebenenschar haben in der Regel folgendes charakteristisches Aussehen:

$$E_a: (1 + 2a)x + (2 + 4a)y - (3 + 6a)z = 1 + a \quad \text{mit } a \in \mathbb{R}$$

Für jedes $a \in \mathbb{R}$ erhält man eine Ebene, die zur Ebenenschar gehört, wobei man für $a = 0$ die besonders einfache Ebene E_0 erhält.

$$E_0: x + 2y - 3z = 1 \quad \text{oder} \quad x + 2y - 3z - 1 = 0$$

Erläutern Sie für die Ebenenschar $E_a: (1 + 2a)x + (2 + 4a)y - (3 + 6a)z = 1 + a$ die folgenden Rechenschritte bzw. ergänzen Sie die Lücken im Text.

a) $E_a: (1 + 2a)x + (2 + 4a)y - (3 + 6a)z = 1 + a$

(1) $x + 2y - 3z - 1 + 2ax + 4ay - 6az - a = 0$

(2) $x + 2y - 3z - 1 + 2ax + 4ay - 6az - a = 0$

(3) $\underbrace{x + 2y - 3z - 1}_{E_0} + a \underbrace{(2x + 4y - 6z - 1)}_{E^*} = 0$

Die Ebene E^* gilt: $2x + 4y - 6z = 1$

(4) $\overline{n_{E^*}} = \overline{n_{E_0}}$

Da die Normalenvektoren $\overline{n_{E_0}}$ und $\overline{n_{E^*}}$ identisch sind, liegen die Ebenen E_0 und E^* nur parallel oder identisch.



$$(5) \quad \begin{array}{rcl} x + 2y - 3z & = & 1 \\ 2x + 4y - 6z & = & 1 \\ \hline 0 & = & -1 \end{array}$$

Prüfen, ob die Ebene parallel.
Aus dem Widerspruch ergibt sich

E_0 und E^*

Zur Information:

Die Ebene E_0 gehört zur Ebenenschar E_a , da man durch Einsetzen von $a = 0$ die Ebene E_0 erzeugen kann. Die Ebene E^* ist zwar parallel zu allen Ebenen der Ebenenschar, gehört jedoch nicht zur Ebenenschar E_a , da es kein $a \in \mathbb{R}$ gibt, mit dem sich durch Einsetzen in E_a die Ebene E^* herleiten lässt.

Aufgabe 17.2

Rechnerische Überprüfung der Zugehörigkeit einer Ebene M zu einer parallelen Ebenenschar

Wie in Aufgabe 17.1 verdeutlicht wurde, gehört jede Ebene E_a , die sich durch Einsetzen einer Zahl $a \in \mathbb{R}$ in die Ebenengleichung E_a ergibt, zu dieser Ebenenschar. Um zu prüfen, ob eine Ebene M ebenfalls zu dieser Ebenenschar gehört, muss man die Ebene M in eine Form bringen, die der Berechnungsvorschrift der Ebenenschar genügt. Das kann man dem folgenden Ansatz überprüfen:

$$E_a = b \cdot M \quad \text{mit } b \in \mathbb{R}$$

Beispiel 1:

Die Ebene M : $3x + 6y - 9z = 2$ bzw. $3x + 6y - 9z - 2 = 0$ entsteht durch Einsetzen von 1 in die Ebenenschar E_a aus Aufgabe 17.1. Sie gehört damit zur Ebenenschar E_a . Damit muss der Ansatz $E_a = b \cdot M$ mit $b = 1$ erfüllt sein.

Die Ebenengleichung E_a enthält fünf Unbekannten, nämlich mit den Parametern x, y, z sowie den Parametern a und b .

$$\text{Gleichung: } \underbrace{(1 + 2a)x + (2 + 4a)y - (3 + 6a)z - (1 + a)}_{E_a} = \underbrace{2b}_{b \cdot M}$$

Die Lösung einer derartigen Gleichung kann mit Hilfe eines Koeffizientenvergleichs überprüft werden.

Schritt 1: Die Ebenengleichungen E_a und $b \cdot M$ übereinander schreiben:

$$\begin{array}{rcl} E_a: & (1 + 2a)x + (2 + 4a)y - (3 + 6a)z - (1 + a) & = 0 \\ b \cdot M: & 3bx + 6by - 9bz - 2b & = 0 \end{array}$$

Schritt 2: Wenn beide Seiten der Gleichung $E_a = b \cdot M$ identisch sind, dann müssen die Koeffizienten identisch sein. Koeffizientenvergleich führt zu einem LGS.

Koeffizienten von x	I	$1 + 2a = 3b$
Koeffizienten von y	II	$2 + 4a = 6b$
Koeffizienten von z	III	$3 + 6a = 9b$
Ausdruck ohne Variable	IV	$1 + a = 2b$

Schritt 3: LGS lösen:

$$I - 2IV \Rightarrow -1 = -b \Rightarrow b = 1$$

$$b \text{ in IV} \Rightarrow a = 1$$

$$a, b \text{ in II} \Rightarrow 6 = 6$$

$$a, b \text{ in III} \Rightarrow 9 = 9$$

Ergebnis: Das LGS lässt sich widerspruchsfrei lösen. Damit ist der Ansatz $E_a = b \cdot M$ erfüllt, und es ist rechnerisch nachgewiesen, dass die Ebene M zur Ebenenschar E_a gehört.

Beispiel 2:

Hier wird mit dem in Beispiel 1 erläuterten Verfahren des Koeffizientenvergleichs gezeigt, dass die Ebene E^* nicht zur Ebenenschar E_a gehört, da der Ansatz $E_a = b \cdot E^*$ zu einem Widerspruch führt.

$$\text{Gleichung: } \underbrace{(1 + 2a)x + (2 + 4a)y - (3 + 6a)z - (1 + a)}_{E_a} = \underbrace{2bx + 4by - 6bz - b}_{b \cdot E^*}$$

Auch hier wird die Lösung mit Hilfe eines Koeffizientenvergleichs schrittweise ermittelt.

Schritt 1: Die Ebenengleichungen E_a und $b \cdot E^*$ übereinander schreiben:

$$\begin{array}{rcl} E_a: & (1 + 2a)x + (2 + 4a)y - (3 + 6a)z - (1 + a) & = 0 \\ b \cdot E^*: & 2bx + 4by - 6bz - b & = 0 \end{array}$$

Schritt 2: Wenn beide Seiten der Gleichung $E_a = b \cdot E^*$ identisch sind, dann müssen die Koeffizienten identisch sein. Koeffizientenvergleich führt zu einem LGS.

Koeffizienten von x	I	$1 + 2a = 2b$
Koeffizienten von y	II	$2 + 4a = 4b$
Koeffizienten von z	III	$3 + 6a = 6b$
Ausdruck ohne Variable	IV	$1 + a = b$

Schritt 3:

Das LGS lässt sich nicht widerspruchsfrei lösen. Damit ist der Ansatz $E_a = b \cdot E^*$ nicht erfüllt und es ist rechnerisch nachgewiesen, dass die Ebene E^* nicht zur Ebenenschar E_a gehört.

Wenden Sie das Verfahren aus Beispiel 1 und 2 an, um zu zeigen, dass die Ebene $2x + 2y + 3z = 0$ zur Ebenenschar E_a aus Aufgabe 17.1 gehört:

Aufgabe 17.3

Prüfen Sie, ob es sich bei einer Ebenenschar um eine Schar aus parallelen Ebenen handelt.

Erläutern Sie für die Ebene $E_a: (2 + 2a)x + (2 + 2a)y - (3 + 3a)z = 1 + 2a$ die folgenden Lösungs- und Rechenschritte.

(1) $E_0: 2x + 2y - 3z = 1$

(2) $E_1: 4x + 4y - 6z = 3$

(3) $\vec{n}_{E_0} = \begin{pmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{pmatrix}$ und $\vec{n}_{E_1} = \begin{pmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{pmatrix}$ Da die Normalenvektoren von E_0 und E_1 --- sind, können die Ebenen E_0 und E_1 nur --- oder --- sein. Damit ist E_a eine Schar --- paralleler Ebenen.

Ergänzen Sie: Man prüft, ob es sich bei einer Ebenenschar um eine Schar paralleler Ebenen handelt, indem man die --- vektoren von zwei beliebigen Ebenen der Schar auf ---

Aufgabe 17.4

Ebenenscharen bei Ebenenbüscheln

Grundlegend kann man die bei den parallelen Ebenenscharen erforderte Überlegung auch auf Ebenenbüschel übertragen.

Die Struktur der Gleichung für ein Ebenenbüschel ist vergleichbar mit der Gleichung für eine Ebenenschar paralleler Ebenen. Für $a \in \mathbb{R}$ soll folgendes Prinzip betrachtet werden.

$$E_a: (1 - 2a)x + (1 - 3a)y + (1 + a)z = 1 + 2a$$

oder

$$E_a: (1 - 2a)x + (1 - 3a)y + (1 + a)z - (1 + 2a) = 0$$

Zeigen Sie durch entsprechende Umformung, dass man auch bei Ebenenbüscheln die Ebenenschar E_a in die Form $E_a = E_0 + aE^*$ umformen kann, wobei damit folgender Ausdruck

$$E^*: x - y + z - 1 = 0 \quad (-2x - 3y + z - 2) = 0$$

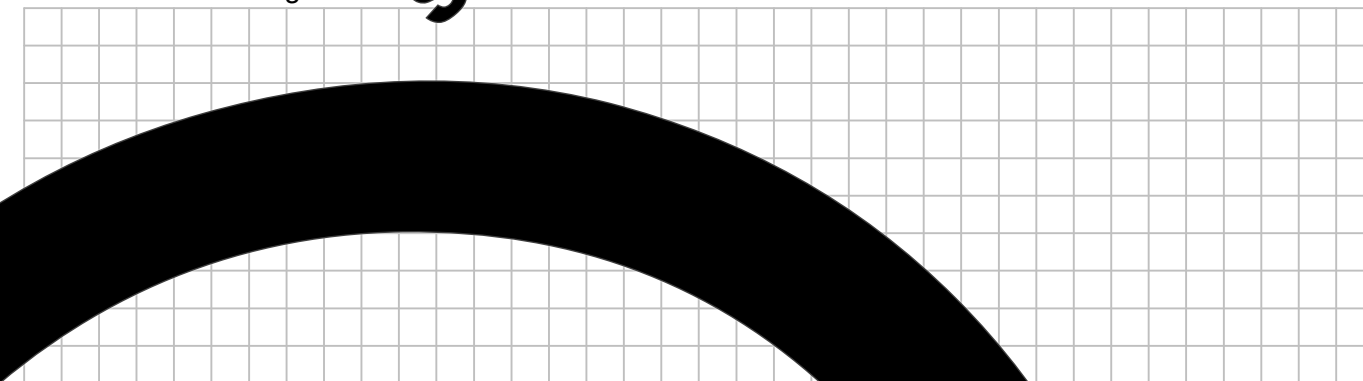
$$E^*: x - y + z - 1 = 0$$

$$E^*: -2x - 3y + z - 2 = 0$$

Information:

Wie bei parallelen Ebenen gilt auch hier: Die Ebene E^* gehört zwar zum Büschel mit der Trägergeraden g , jedoch nicht zur Ebenenschar E_a .

Raum für Umformungen:



Aufgabe

Rechnerisch prüfen Sie die Zugehörigkeit einer Ebene E zu einer Ebenenschar

Überlegungen hinsichtlich der Überprüfung, ob eine Ebene zu einer Ebenenschar gehört, können von den Überlegungen bei den parallelen Ebenenscharen auf Ebenenbüschel übertragen werden. Für die Überprüfung auch hier der Ansatz $E_a = E_0 + aE^*$ verwendet werden. Die bestehende Gleichung mit Hilfe eines Koeffizientenvergleichs

Beispiel 1:

Prüfen Sie, ob die Ebene

$$M: -x - 2y + 2z = 3 \quad \text{bzw.} \quad -x - 2y + 2z - 3 = 0$$

zur Ebenenschar E_a gehört.

Der Ansatz $E_a = b \cdot M$ führt, wie bei Scharen paralleler Ebenen, zu einer Gleichung mit fünf Unbekannten, nämlich mit den Variablen x , y und z sowie den Parametern a und b , die ebenfalls wieder mit Hilfe eines Koeffizientenvergleichs gelöst werden können.

$$\text{Gleichung: } (1 - 2a)x + (1 - 3a)y + (1 + a)z - (1 + 2a) = -bx - 2by + 2bz - 3b = 0$$

Schritt 1: Die Ebenengleichung $E_a = b \cdot M$ übereinander schreiben:

$$\begin{array}{l} E_a: (1 - 2a)x + (1 - 3a)y + (1 + a)z - (1 + 2a) = 0 \\ b \cdot M: -bx - 2by + 2bz - 3b = 0 \end{array}$$

Schritt 2: Wenn die Summe der Gleichung $E_a = b \cdot M$ identisch ist, dann müssen die Koeffizienten identisch sein. Koeffizientenvergleich führt zu einem LGS:

$$\begin{array}{ll} \text{Koeffizienten von } x & I \quad 1 - 2a = -b \\ \text{Koeffizienten von } y & II \quad 1 - 3a = -2b \\ \text{Koeffizienten von } z & III \quad 1 + a = 2b \\ \text{Ausdruck ohne Variable} & IV \quad -1 - 2a = -3b \end{array}$$

Schritt 3: LGS lösen:

$$I - IV \quad \Rightarrow \quad 2 = 2b \quad \Rightarrow \quad b = 1$$

$$b \text{ in I} \quad \Rightarrow \quad a = 1$$

Das LGS lässt sich widerspruchsfrei lösen. Damit ist $E_a = b \cdot M$ erfüllt, und es ist rechnerisch nachgewiesen, dass die Ebene M zur Ebenenschar E_a gehört.

Beispiel 2:

Die Ebene E^* von Aufgabe 17.4 gehört zwar zum Ebenenbüschel mit der Trägergeraden, jedoch nicht zur Ebenenschar E_a , da man durch Einsetzen einer Zahl a die Ebene nicht erhalten kann. Zeigen Sie, dass der Ansatz $E_a = b \cdot E^*$ zu einem Widerspruch führt.

Gleichung: $(1 - 2a)x + (1 - 3a)y + (1 + a)z - (1 + 2a) = -3by - z - 2b$

Schritt 1: Gleichungen übereinander schreiben:

$$E_a: (1 - 2a)x + (1 - 3a)y + (1 + a)z - (1 + 2a) = 0$$

$$b \cdot E^*: \quad \quad \quad x + \quad \quad \quad y + \quad \quad \quad z - 1 = 0$$

Schritt 2: Wenn beide Seiten der Gleichung $E_a = b \cdot E^*$ identisch sind, dann müssen die Koeffizienten identisch sein. Koeffizientenvergleich führt zu einem LGS.

$$\text{Koeffizienten von } x: \quad | \quad 1 - 2a = -2b$$

$$\text{Koeffizienten von } y: \quad | \quad 1 - 3a = -3b$$

$$\text{Koeffizienten von } z: \quad | \quad 1 + a = b$$

$$\text{Koeffizienten von } 1: \quad | \quad -1 - 2a = -2b$$

Schritt 3: LGS lösen:

$$\begin{array}{rcl} \text{I} & & 1 - 2a = -2b \\ \text{II} & & 1 - 3a = -3b \\ \text{III} & & 1 + a = b \\ \text{IV} & & -1 - 2a = -2b \end{array}$$

$$\frac{\text{IV}}{2} = \frac{\text{I}}{2} \Rightarrow \text{Widerspruch}$$

Ergebnis: Das LGS führt zu einem Widerspruch. Damit ist der Ansatz $E_a = b \cdot E^*$ nicht erfüllt, und die Ebene E^* gehört (wie oben schon erläutert) nicht zur Ebenenschar.

17.6

Trägergerade bei einem Ebenenbüschel bestimmen

Für die Bestimmung der Trägergeraden gibt es zwei Verfahren.

Verfahren 1: Die Trägergerade von zwei möglichst einfachen Ebenen ist ein Element einer Ebenenschar. Man bestimmt die Schnittgerade von E_0 und E^* .

Verfahren 2: Man bestimmt die Ebenenschar wie in Aufgabe 17.5 in $E_a = E_0 + a(E^* - E_0)$. Man ermittelt die Schnittgerade von E_0 und E^* .

Übungen

Ü17.1 Bestätigen Sie durch Rechnung mit Hilfe von Verfahren 1, dass die Ebenenschar $E_a: (1 - 2a)x + (1 - 3a)y + (1 + a)z = 1 + 2a$ die Trägergerade $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ besitzt.

$$E_a: (1 - 2a)x + (1 - 3a)y + (1 + a)z = 1 + 2a \quad \text{die Trägergerade } \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ besitzt.}$$

Ü17.2 Gegeben: Ebenen $E: 2x + 3y - z = 1$ und $F: x - 2z = 2$ eine Ebenenschar G_a , zu der die Ebene E gehört, und eine Ebenenschar H_a , zu der die Ebene F gehört.

Ü17.3 Ermitteln Sie die Trägergerade g zur Ebenenschar $E_a: (a - 1)x + 2y + (2a + 3)z = a - 2$ mit Hilfe von Verfahren 2, und geben Sie eine Ebene an, welche die Trägergerade g enthält, jedoch nicht zur Ebenenschar E_a gehört. (Zur Kontrolle: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$)



Übungen: _____

Raum für Notizen



Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Lineare Algebra selbstorganisiert erlernen



Kapitel 1
Grundlegendes zu Vektoren

Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen	9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen	17

Einführung in die Vektorrechnung

Kapitel 3 – Koordinatensysteme	23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu den Vektoren	25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren	33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Linearer Abhängigkeit	43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit	47

Geraden in der Ebene und im Raum

Kapitel 8 – Parameterdarstellung von Geraden	49
Kapitel 9 – Lagebeziehung von Geraden	55
Kapitel 10 – Skalares und Vektorielles Produkt	59
Kapitel 11 – Vektorielles Produkt	65

Ebenen im Raum

Kapitel 12 – Darstellung von Ebenen	69
Kapitel 13 – Beziehung zwischen Ebenen	81
Kapitel 14 – Lagebeziehungen von Ebenen	85
Kapitel 15 – Abstände	99
Kapitel 16 – Schnittwinkel	105
Kapitel 17 – Ebenenfamilien	107

Lineare Abbildungen

Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen	119
Kapitel 19 – Determinanten	125
Kapitel 20 – Lineare Abbildungen	137
Kapitel 21 – Lineare Abbildungen	143
Kapitel 22 – Lineare Abbildungen	145
Kapitel 23 – Verkettung von linearen Abbildungen	149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen $Ax = x'$	153

Gesamte Verantwortung für die Inhalte dieses Buches liegt bei der Autorin selbstorganisiert erlernen (ISBN 978-3-031-266-02-0)

Alle Rechte vorbehalten. All rights reserved.

Keine Weitergabe, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet

SelbstVerlag

Verlag des Autors & Freunde GmbH, Koblenz (Germany)

www.lehrerselbstverlag.de

www.f-druck.de

Kapitel 18: Grundlegendes zu Matrizen

Der Begriff der Matrix und die Rechenregeln für den Umgang mit Matrizen waren bereits im 19. Jahrhundert bekannt. Die Bedeutung der Matrizen für die Anwendung war jedoch nicht deutlich. Man kann Matrizen beispielsweise bei der Verschlüsselung bzw. Kodierung von Daten, der Beschreibung von Produktions- und Transportprozessen sowie für die Transformation von Koordinatensystemen bei der Programmierung von Robotersteuerungen und vielem mehr verwenden. In diesen Unterlagen wird der Einsatz der Matrizen auf die Anwendung bei linearen Abbildungen und den dazu notwendigen Rechenoperationen für Matrizen beschränkt. Darüber hinaus sind die Regeln und Verallgemeinerungen können Tafelwerken und Schulbüchern entnommen werden.

Begriff Matrix

Als Matrix bezeichnet man ein Zahlenfeld mit m Zeilen und n Spalten. Bei linearen Abbildungen kommen nur Matrizen mit gleicher Anzahl von Zeilen und Spalten vor. Man nennt diese Matrizen **quadratische Matrizen**.

Quadratische Matrix Ebene als $\mathbb{R}^2$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Die Elemente einer Matrix A werden mit a_{mn} oder für eine Matrix B mit b_{mn} angegeben.

Die **erste Ziffer** gibt die **Zeile** m an.

Die **zweite Ziffer** gibt die **Spalte** n an.

Quadratische Matrix Raum, also im $\mathbb{R}^3$:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 18.1

Addition und Subtraktion von Matrizen

Ergänzen Sie im folgenden Beispiel fehlende Zahlenwerte, erläutern Sie anschließend, wie man zwei Matrizen addiert.

Addition im $\mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 & 2+4 \\ _ & _ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & _ \end{pmatrix}$

Addition im $\mathbb{R}^3$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} _ & _ & _ \\ _ & _ & _ \\ _ & _ & _ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & _ \\ 3 & _ & _ \\ _ & 2 & _ \end{pmatrix}$

Subtraktion im $\mathbb{R}^3$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & _ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 & 0-4 & 2-_ \\ _ & _ & 1-_ \\ _ & _ & _ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & _ \\ _ & _ & 0 \\ _ & _ & _ \end{pmatrix}$

Ergänzen

Die Matrizen werden addiert bzw. subtrahiert, indem man die an den entsprechenden Stellen

addiert bzw. subtrahiert.

Aufgabe 18.2

Multiplikation einer Matrix mit einer reellen Zahl r

Verdeutlichen Sie sich die Vorgehensweise am Beispiel und ergänzen Sie die in der Rechnung und im Text fehlenden Angaben:

Multiplikation im $\mathbb{R}^2$: $2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & -10 \end{pmatrix}$ oder im $\mathbb{R}^3$: $3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ -9 & 21 & -27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} _ & _ & _ \\ _ & _ & _ \\ _ & _ & _ \end{pmatrix}$

Man multipliziert eine Matrix mit einer reellen Zahl r , indem man jedes Element der Matrix

mit der Zahl r multipliziert.

Aufgabe 18.3

Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor

a) Verdeutlichen Sie sich die Vorgehensweise am Beispiel und ergänzen Sie die in der Rechnung und im Text fehlenden Angaben:

Die Multiplikation von Matrizen mit einem Spaltenvektor entspricht dem Skalarprodukt jeder Zeile der Matrix mit dem Spaltenvektor.

Multiplikation im $\mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 + 4 \cdot 6 \\ 3 \cdot 4 + 6 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 + 24 \\ 12 + 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 48 \end{pmatrix}$

Multiplikation im $\mathbb{R}^3$: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 \\ 4 \cdot (-1) + _ \cdot 4 + 6 \cdot _ \\ 7 \cdot (-1) + _ \cdot 4 + _ \cdot _ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 8 + _ \\ _ + 20 + 18 \\ _ - _ + _ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 34 \\ -2 \end{pmatrix}$

Eine Matrix A wird mit einem Vektor $\vec{x}$ multipliziert, indem man jedes Element in einer

Matrix mit dem Vektor $\vec{x}$ multipliziert. Die drei Produkte anschließend zeilenweise

Verdeutlichen Sie sich durch Berechnung des folgenden Produktes die Vorgehensweise der Multiplikation der

Matrix mit einem Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ein lineares Gleichungssystem:

$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & _ \\ 3 & _ & _ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x + _ \\ x + 4y + 2z \\ 3x + y + 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Durch die Multiplikation entsteht ein Vektor.

Die Gleichung wird in drei Zeilen geschrieben.

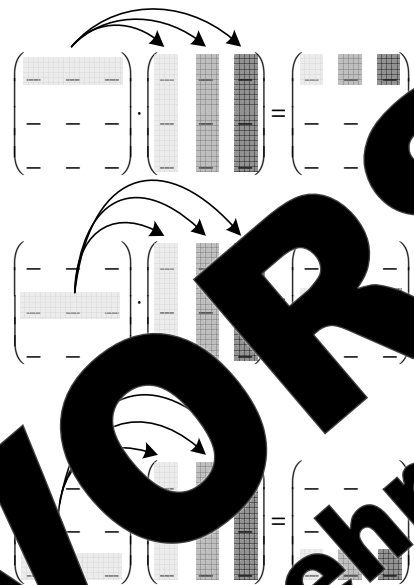
Aufgabe 18.4

Multiplikation einer Matrix mit einer Matrix

Verdeutlichen Sie sich anhand der Graphik die Vorgehensweise bei der Multiplikation von quadratischen Matrizen mit drei Zeilen und 3 Spalten und ergänzen Sie im Text fehlende Stellen.

a)

$$A \cdot B = C$$



- Das 1. Element der 1. Zeile von C entsteht durch Multiplikation der 1. Zeile von A mit der 1. Spalte von B.
- Das 1. Element der 1. Zeile von C entsteht durch Multiplikation der 1. Zeile von A mit der 1. Spalte von B.
- Das 1. Element der 2. Zeile von C entsteht durch Multiplikation der 2. Zeile von A mit der 1. Spalte von B.
- Das 2. Element der 2. Zeile von C entsteht durch Multiplikation der 2. Zeile von A mit der 2. Spalte von B.
- Das 3. Element der 3. Zeile von C entsteht durch Multiplikation der 3. Zeile von A mit der 1. Spalte von B.

b) Übertragen Sie das Verfahren zur Multiplikation auf 2x2 Matrizen und bestätigen Sie das angegebene Ergebnis für die folgenden Matrizen durch Nachrechnen:

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 & 1 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 & 22 & 31 \end{pmatrix}$$

Überprüfen Sie die angegebenen Ergebnisse und begründen Sie damit, dass für die Matrizenmultiplikation das Kommutativgesetz nicht gilt.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 6 \\ 10 & 2 & 11 \\ 7 & 4 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 7 & 2 \\ 15 & -1 & 7 \\ 9 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ. Die Produkte $A \cdot B$ und $B \cdot A$ sind unterschiedlich.

d) Bestätigen Sie mit Hilfe der Matrizen A, B und C, dass das Assoziativgesetz $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ für die Matrizenmultiplikation gültig ist:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot (B \cdot C) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 19 & 37 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$$

$$(A \cdot B) \cdot C = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Kontrollergebnis: In beiden Fällen ist die Matrix: $\begin{pmatrix} 19 & 37 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$

Aufgabe 18.5

Berechnen Sie die Determinante einer Matrix

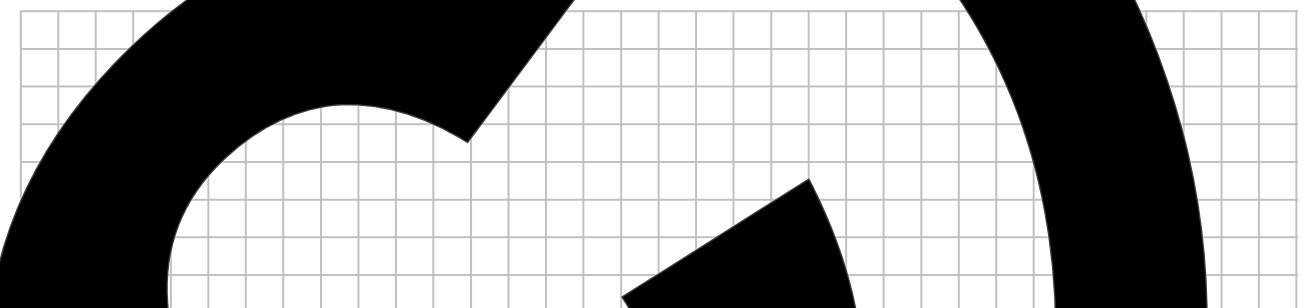
Durch die Berechnung der Determinante einer Matrix wird dieser ein Skalar bzw. Zahlenwert zugeordnet. Der Skalar enthält viele nützliche Informationen, auf die an dieser Stelle jedoch nicht ausführlich eingegangen werden soll. Es wird hier jedoch jeweils an einem Beispiel dargestellt, wie man bei einer 2x2-Matrix und einer 3x3-Matrix die Determinante berechnen kann.

a) Determinante bei einer 2x2-Matrix

Anstatt den Ausdruck Det vor die Matrix mit runden Klammern zu schreiben, kann man die Matrix auch mit einem vertikalen Strich darstellen. Die Elemente werden dann multipliziert.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Zeigen Sie, dass sich für die Determinante der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ der Wert -5 ergibt.



b) Determinante bei einer 3x3-Matrix

Auch hier kennzeichnen die beiden senkrechten Striche, dass die Determinante der Matrix berechnet wird.

Die ersten beiden Spaltenvektoren der Matrix werden hinten angehängt.

Die Elemente unter den diagonalen Linien werden multipliziert.

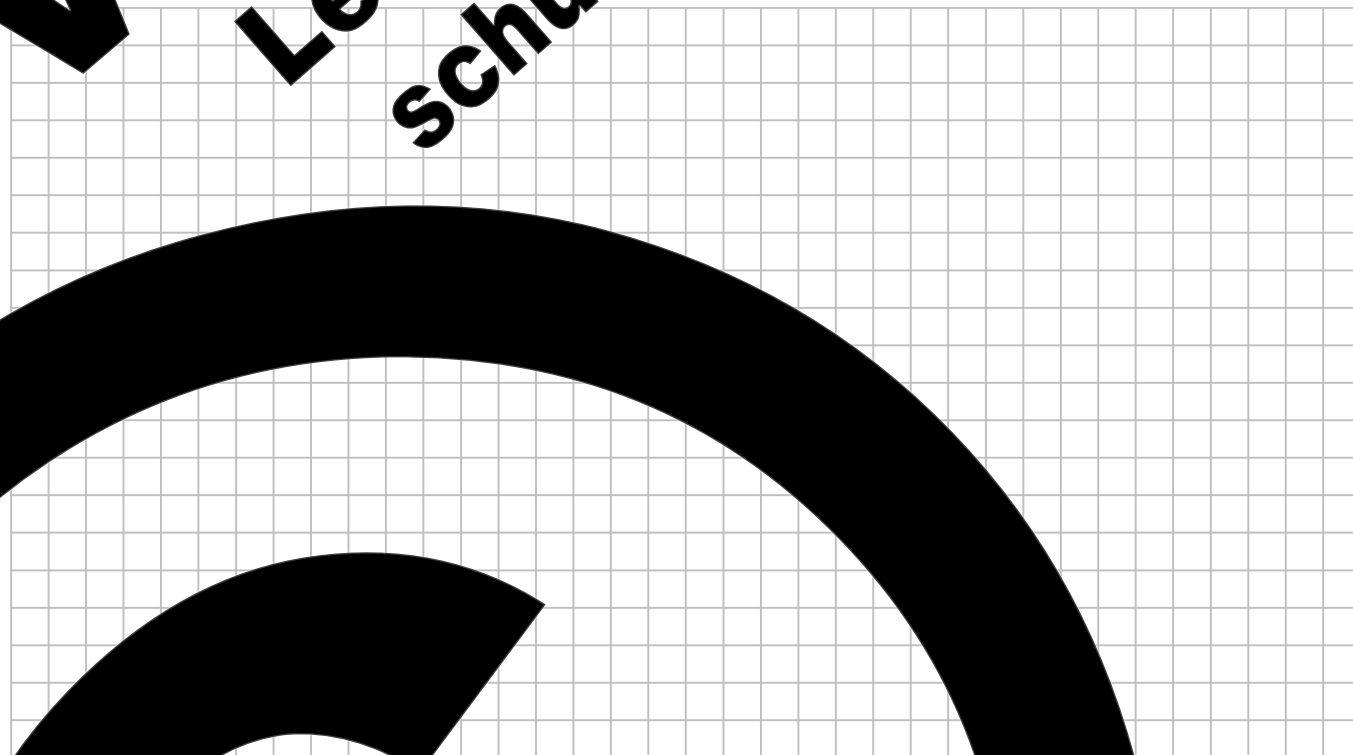
Das Produkt erhält ein **positives** Vorzeichen, wenn von oben links nach unten rechts multipliziert wird.

Das Produkt erhält ein **negatives** Vorzeichen, wenn von oben rechts nach unten links multipliziert wird.

$$\text{Det } A = \text{Det} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei - bfg - ceg - afh + bdi + aeg$$

$$\text{Det } A = aei + bfg + cdh - ceg - afh + bdi$$

Zeigen Sie, dass die Determinante der Matrix $D = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ den Wert 1(*) hat.



Angabe: Sie werden später in Übung 22.1 lernen, dass die Matrix D eine Drehmatrix ist. Bei einer linearen Abbildung hat die Determinante einer Drehmatrix immer den Wert 1. (vgl. auch Kapitel 22.1 Blick zu Drehung)

Aufgabe 18.6

Besondere Matrizen

a) Die Einheitsmatrix

Die Matrix $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ wird als **Einheitsmatrix E** bezeichnet.

Weisen Sie am folgenden Beispiel nach, dass für die Multiplikation einer Matrix A mit der Einheitsmatrix E gilt: $A \cdot E = A$ und auch $E \cdot A = A$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Zeigen Sie durch Rechnung, dass für die folgenden Matrizen jeweils gilt: $A \cdot B = E$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 & 4 \\ 31 & -13 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix B wird als **inverse Matrix** der Matrix A bezeichnet. Man schreibt für B auch A^{-1} .

Für inv

Rechenoperationen, hier vor allem das Berechnen von inversen Matrizen (invertieren von Matrizen), die Regel eines umfangreichen Rechenaufwands bedürfen, ist es sinnvoll, einen Taschenrechner zu verwenden. Erarbeiten Sie sich ggf. mit Hilfe der Bedienungsanleitung, wie Sie die Multiplikation von Matrizen in Ihren Taschenrechner einsetzen können und wie Sie mit Hilfe des Taschenrechners eine Matrix invertieren können.

Ergebnisse:

Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Lineare Algebra selbstorganisiert erlernen



Projektion

Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen	9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen	17

Einführung in die Vektorrechnung

Kapitel 3 – Koordinatensysteme	23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu den Vektoren	25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren	33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Linearer Abhängigkeit	43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit	47

Geraden in der Ebene und im Raum

Kapitel 8 – Parameterdarstellung von Geraden	49
Kapitel 9 – Lagebeziehung von Geraden	55
Kapitel 10 – Skalares und Vektorielles Produkt	59
Kapitel 11 – Vektorielles und Kreuzprodukt	65

Ebenen im Raum

Kapitel 12 – Darstellung von Ebenen	69
Kapitel 13 – Besondere Ebenen	81
Kapitel 14 – Lagebeziehungen von Ebenen	85
Kapitel 15 – Abstände	99
Kapitel 16 – Schnittwinkel	105
Kapitel 17 – Ebenenfamilien	107

Lineare Abbildungen

Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen	119
Kapitel 19 – Determinanten	125
Kapitel 20 – Inverse Matrizen	137
Kapitel 21 – Lineare Abbildungen	143
Kapitel 22 – Lineare Abbildungen	145
Kapitel 23 – Verkettung von linearen Abbildungen	149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen $Ax = x'$	153

Gesamte Verantwortung für die Inhalte dieses Buches liegt bei der Autorin selbstorganisiert erlernen (ISBN 978-3-031-266-031-266)

Alle Rechte vorbehalten. All rights reserved.

Keine Weitergabe, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,

aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet

SelbstVerlag

Stes & Freunde GmbH, Koblenz (Germany)

lehrerselbstverlag.de

www.f-druck.de

Kapitel 19: Projektion

Was man in der linearen Algebra unter einer Projektion versteht, kann man sich sehr anschaulich verdeutlichen, wenn man an die Programmierung von Computerspielen denkt. In Computerspielen sind beispielsweise Spielabläufe, die im dreidimensionalen Raum stattfinden, auf dem Bildschirm eines Monitors dargestellt werden. Das bedeutet unter Verwendung der Projektion, dass der dreidimensionale Raum $\mathbb{R}^3$ auf die zweidimensionale Fläche des Bildschirms, also den $\mathbb{R}^2$, projiziert wird. Um ein möglichst hohes Maß an Anschaulichkeit zu erhalten, werden in den ersten Aufgaben nur Projektionen in der Ebene betrachtet.

Aufgabe 19.1

Projizieren Sie die Punkte in der x,y-Ebene in Richtung der zweiten Winkelhalbierenden auf die Gerade $g_B: y = 0,5x$ oder in vektorieller Darstellung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a) Erläuterung der Aufgabenstellung

Umgangssprache beschreibt das, wie man den Punkt A in der Ebene in Richtung der zweiten Winkelhalbierenden, die Bildgerade g_B "geht", projiziert werden, die Richtung der Projektion bzw. "Verschiebung" ist nach oben durch eine Gerade an, die die Projektionsgerade g_P bezeichnet wird.

Der Punkt A hat beispielsweise den Bildpunkt A'. Die Punkte, welche bereits auf der Bildgeraden g_B liegen werden auf sich selbst abgebildet, hier z.B. $D = D'$. Punkte, die auf sich selbst abgebildet werden, nennt man **Fixpunkte**.

Geben Sie jeweils die Koordinaten der eingezeichneten Punkte an.

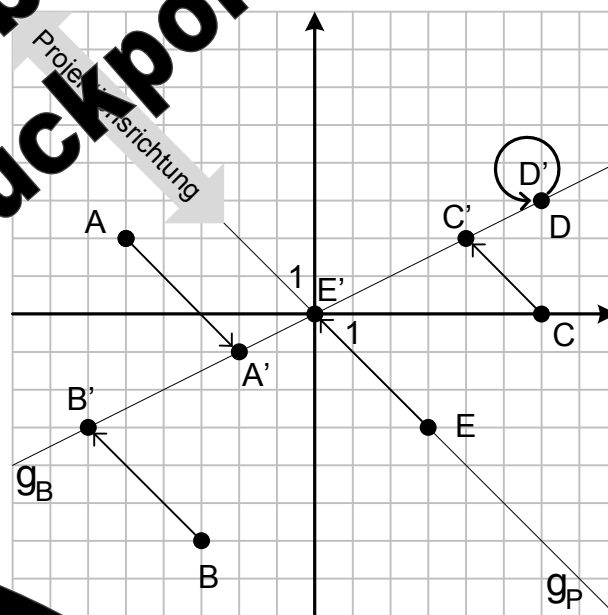


Abb. 19.1

$$A(\quad/\quad) \longrightarrow B'(\quad/\quad)$$

$$C(\quad/\quad) \longrightarrow C'(\quad/\quad)$$

$$D(\quad/\quad) \longrightarrow D'(\quad/\quad)$$

$$E(\quad/\quad) \longrightarrow E'(\quad/\quad)$$

Die Abbildung, die jedem Punkt (x/y) der Ebene durch Projektion in Richtung der Geraden g_P ein Punkt (x'/y') auf der Geraden g_B zugeordnet. Man nennt eine solche Abbildung eine Projektion. (also des zweidimensionalen Raumes $\mathbb{R}^2$) auf eine Gerade (also des eindimensionalen Raumes $\mathbb{R}^1$).

b) Ermittlung der Abbildungsvorschrift in Form einer Projektionsmatrix

Schritt 1: Bestimmen der Geradengleichung der Projektionsgeraden g_P , welche in Richtung der Projektion vorgibt

$$g_P: \vec{x}' = \vec{x} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$g_P: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ein beliebiger Punkt $\vec{x}$ mit dem Ortsvektor $\vec{x}$ wird auf die Bildgerade projiziert (siehe oben), wenn man den Bildpunkt $\vec{x}'$ mit dem Ortsvektor $\vec{x}'$ erhält.

Schritt 2: Die in Abb. 19.1 eingezeichnete Projektionsgerade verläuft durch den Punkt E. Der Bildpunkt von E liegt im Schnittpunkt der Projektionsgeraden g_P mit der Bildgeraden g_B , hier also im Ursprung. Wenn Sie die Projektionsgerade durch den Punkt B zeichnen, erkennen Sie, dass der Bildpunkt ebenfalls im Schnittpunkt der Bildgeraden g_B mit der Projektionsgeraden liegt.

Ergänzen Sie:

Für alle Punkte in der Ebene gilt: Der Bildpunkt $\vec{x}'$ eines beliebigen Punktes $\vec{x}$ liegt im

Schnittpunkt der Geraden g_P und g_B . D.h. man berechnet

$\vec{x}'$ durch Gleichsetzen der Geraden g_P und g_B .

Schritt 3: Gleichsetzen und Berechnung der Parameter s der Projektionsgeraden. Verdeutlichen Sie sich die Rechenschritte und die Unterschiede zur bisherigen Schnittpunktberechnung.

$$\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \end{array} \quad \begin{array}{l} 2r = x + s \\ r = y - s \end{array} \quad | -2\text{II}$$

Neu:

In der Geradengleichung hat der Stützvektor keine eindeutigen Zahlenwerte, sondern ist variabel.

Neu:

Der Parameter s nimmt nun keinen Zahlenwert an, sondern ist von x und y abhängig.

Einsetzen des von x und y abhängigen Parameters s in die Projektionsgerade g_P .

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y \\ y + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y \end{pmatrix}$$

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

bezeichnet man

speziell als

Projektionsmatrix

et.

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Der Parameter s der Klammer steht dem Produkt der Matrix und dem Vektor $\vec{x}$ gegenüber. Der Vektor $\vec{x}$ ist ausgeklammert.

c) Anwenden einer Abbildungsmatrix

Die folgende Aufgabenstellung verdeutlicht die Anwendung der unter b) erhaltenen Projektionsmatrix in Bezug auf die in Abb. 19.1 dargestellten Punkte. Verdeutlichen Sie die Vorzeichen am Beispiel von Punkt A, berechnen Sie anschließend analog dazu die Koordinaten der Bildpunkte von B, C, D und E und vergleichen Sie die Ergebnisse mit der Abb. 19.1.

$$A(-5/2) \Rightarrow \vec{a}' = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{10}{3} + \frac{4}{3} \\ -\frac{5}{3} + \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad A'(-2/-1)$$

$$B(_/_) \Rightarrow \vec{b}' = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} _ \\ _ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} _ \\ _ \end{pmatrix} \Rightarrow B'(_/_)$$

$$C(_/_) \Rightarrow \vec{c}' = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} _ \\ _ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} _ \\ _ \end{pmatrix} \Rightarrow C'(_/_)$$

$$D(_/_) \Rightarrow \vec{d}' = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} _ \\ _ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} _ \\ _ \end{pmatrix} \Rightarrow D'(_/_) \text{ (Fixpunkt)}$$

$$E(_/_) \Rightarrow \vec{e}' = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} _ \\ _ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} _ \\ _ \end{pmatrix} \Rightarrow E'(_/_)$$

Veranschaulicht

Zusammenfassung: Projektion auf eine Gerade im $\mathbb{R}^2$

Mit Hilfe der Gleichung $\vec{y} = A \vec{x}$ kann man bei der Projektion eines Punktes $\vec{x}$ auf eine Gerade g die Koordinaten des Bildpunktes $\vec{y}$ berechnen.

Die Projektion, die man mit einer Gleichung der Form $A \vec{x} = \vec{x}'$ beschreiben kann, wird als **Projektion** bezeichnet. Bei einer linearen Abbildung auf eine Gerade g liegen die Bildpunkte immer auf einer Ursprungsgeraden.

Aufgabe 19.2**Eigenschaften der Projektionsmatrix**

Anhand des Beispiels von Aufgabe 19.1 sollen nun wichtige Eigenschaften der Projektionsmatrix A dargestellt und neue Begriffe wie Fixpunkt- und Bildmenge sowie Kern einer Abbildung erläutert werden. Verdeutlichen Sie sich die folgenden Ausführungen und ergänzen Sie ggf. die Lücken.

a) Zeigen Sie durch Berechnung des Produkts $A \cdot A = A^2$, dass gilt $A^2 = A$.

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} _ & _ \\ _ & _ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} _ & _ \\ _ & _ \end{pmatrix}$$

Geometrische Erläuterung:

Eine einmalige Anwendung der Projektionsmatrix A projiziert bzw. verschiebt diesen Punkt auf die Bildgerade. Alle Punkte auf der Bildgeraden (vgl. Punkt D in Abb. 19.1) sind Fixpunkte und werden nicht verschoben. Bedeutet dies, dass man die Matrix A zweimal hintereinander erst auf den Punkt und danach auf den Bildpunkt anwendet, wird das Ergebnis der ersten Abbildung nicht mehr verändert.

b) Vergleichen Sie den Richtungsvektor der Bildgeraden mit den Spaltenvektoren der Matrix A und ergänzen Sie den folgenden Satz.

$$\text{Bildgerade: } g_B: \vec{x} = r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{Abbildungsmatrix: } A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Spaltenvektoren der Abbildungsmatrix sind linear abhängig und entsprechen dem _____ der Bildgeraden.

c) Fixpunktmenge

Die **Fixpunktmenge** einer Abbildung ist die Menge aller Punkte, die bei der Abbildung unverändert bleiben. Bedeutung der Begriffe bei einer Projektion auf eine Gerade g am Beispiel von Abb. 19.1:

$$\text{Satz Fixpunktmenge: } A \cdot \vec{x} = \vec{x} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Zu lösendes LGS:

$$\begin{aligned} \text{I} \quad & \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y = x \\ \text{II} \quad & \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y = y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{I} \quad & -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y = 0 \\ \text{II} \quad & \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y = 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} & \text{Beide Gleichungen sind identisch.} \\ & \Rightarrow x - 2y = 0 \end{aligned}$$

Interpretation des Ergebnisses:

Das Ergebnis ist die Gerade $y = \frac{1}{2}x$ oder $\vec{x} = r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Damit entspricht die Fixpunktmenge der Bildgeraden g_B .

Ansatz Kern:

$$A \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Kern liefert als Ergebnis die Menge aller Punkte, die auf den Ursprung abgebildet werden.

Zu lösendes LGS:

$$\begin{aligned} \text{I} \quad & \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y = 0 \\ \text{II} \quad & \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y = 0 \end{aligned}$$

Beide Gleichungen sind identisch. Umgeformt: $x + y = 0$

Interpretation des Ergebnisses:

Das Ergebnis ist die Projektionsgerade $y = -x$ und damit die 2. Winkelhalbierende. Alle Punkte dieser Projektionsgeraden werden in der Richtung der Projektion auf den Ursprung abgebildet.

Ansatz Bildmenge:

$$A \cdot \vec{x} = \vec{y}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Die Bildmenge ist hier nur bestimmbar, weil alle abgebildeten Punkte auf einer Geraden liegen, also eine einheitlich beschreibbare Bildmenge haben.

Zu lösendes LGS:

$$\begin{aligned} \text{I} \quad & \frac{2}{3}x' + \frac{2}{3}y' = x \\ \text{II} \quad & \frac{1}{3}x' + \frac{1}{3}y' = \frac{1}{2}y \end{aligned}$$

Das LGS muss umgeformt werden, da auf der linken Seite $\frac{1}{3}$ steht.

$$\Rightarrow x' + y' = \frac{3}{2}x - 2y$$

Interpretation des Ergebnisses:

Das Ergebnis kann zu $y' = \frac{1}{2}x'$ umgeformt werden und entspricht der Fixpunktmenge oder der Menge aller Bildpunkte auf der Bildgeraden.

Übungen

Projizieren Sie die Punkte der x,y -Ebene in Richtung der Geraden $y = -\frac{1}{3}x$ auf die x -Achse.

Führen Sie die Berechnungen im Heft durch.

- Zeigen Sie anhand einer Zeichnung, dass der Punkt $P(-1/2)$ auf den Punkt $P'(5/0)$ abgebildet wird.
- Zeigen Sie durch Rechnung analog zur Aufgabe 19.1, dass sich als Projektionsmatrix die

Matrix

Matrix A linear abhängig sind und in Richtungsvektor der Bildgeraden.

- Bestimmen Sie analog zur Aufgabe 19.1 die Kern- und die Bildmenge bei der Projektion und interpretieren Sie die Ergebnisse.

Ü19.2

Projizieren Sie die Punkte der x,y -Ebene in Richtung der Geraden $y = -x$ auf die Gerade $y = x$ (orthogonale Projektion). Führen Sie die Berechnungen im Heft durch.

- Zeigen Sie anhand einer Zeichnung, dass der Punkt $P(1/1)$ auf den Punkt $P'(6/6)$ abgebildet wird. Welchen Fixpunkt ist?

- Bestimmen Sie durch Rechnung analog zur Aufgabe 19.1, dass sich als Projektionsmatrix die Matrix A ergibt.

Überprüfen Sie, ob gilt: $A \cdot A = A^2 = A$

Überprüfen Sie, ob die Spaltenvektoren der Abbildungsmatrix A linear unabhängig sind und dem Richtungsvektor der Bildgeraden entsprechen.

- Bestimmen Sie analog zur Aufgabe 19.1 die Kern- und die Bildmenge bei der Projektion und interpretieren Sie die Ergebnisse.

Aufgabe 19.3**Projektionen im Raum**

Die Erkenntnisse zur Projektion in der Ebene können im Wesentlichen auf den Raum übertragen werden. In der folgenden Aufgabe werden die Punkte des Raumes in Richtung der Projektionsgeraden g_p auf eine Projektionsebene bzw. Bildebene E_B projiziert. Wie bei den "2D"-Abbildungen ist die Projektionsebene eine Ursprungsebene.

Projektionsebene: $E_B: \vec{x} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

oder

$$E_B: y - z = 0$$

Projektionsrichtung: $g_p:$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Veranschaulichung der Abbildung im 1. Quadranten:



- Ermitteln der Projektionsmatrix

Schritt 1: Bestimmen der Geradengleichung der Projektionsgeraden g_p . Diese Gerade gibt die Verschiebungsrichtung bzw. Projektionsrichtung an, in der ein beliebiger Punkt $X(x/y/z)$ auf die Bildebene bzw. Projektionsebene projiziert (geschoben) wird.

$$g_p: \vec{x}' = \vec{x} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Schritt 2: Einsetzen der Geraden g_p in die Gleichung der Projektionsebene E_B . Einsetzen von g_p in E_B liefert den

$$\begin{aligned} y - s - z - 2s &= 0 \\ 3s &= y - z \\ s &= \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z \end{aligned}$$

Schritt 3: Einsetzen von s in die Gerade g_p :

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z \right) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y - \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z \\ z + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z \\ \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Abbildungsmatrix: } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

b) Anwenden der Abbildungsmatrix auf Punkte im Raum

Zeigen Sie, dass der Punkt $P(3/9/6)$ auf den Punkt $P'(3/8/8)$ abgebildet wird, wie der Punkt $Q(3/1/1)$ und alle Punkte $R(r/0/0)$ auf der x-Achse Fixpunkte bei der Abbildung sind.

$$P(3/9/6) \Rightarrow \vec{p}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} = \vec{p}' \Rightarrow P'(3/8/8)$$

$$Q(3/1/1) \Rightarrow \vec{q}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{q} \Rightarrow Q(3/1/1) = Q'$$

$$R(r/0/0) \Rightarrow \vec{r}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{r} \Rightarrow R(r/0/0) = R'$$

Aufgabe 19.4

Eigenschaften der Projektionsmatrix

Analog zu den Untersuchungen zu den Eigenschaften von Projektionsmatrizen in der Ebene wird nun die Projektionsmatrix aus Aufgabe 19.3 untersucht.

- a) Zeigen Sie durch Berechnung des Produkts $A \cdot A = A^2$, dass auch bei einer Projektion im Raum der Zusammenhang $A^2 = A$ gilt.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = A$$

- b) Vergleichen Sie die Projektionsebene mit den Eigenschaften der Matrix A und ergänzen Sie:

Ebene: $E_B: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Projektionsmatrix: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Die Spaltenvektoren der Abbildungsmatrix lassen sich in der Form $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ darstellen und sind linear unabhängig. Die Spaltenvektoren entsprechen den Basisvektoren der

- c) Fixpunktmenge, Kern und Bildmenge bei einer Projektion

Die Berechnung von Fixpunktmenge, Kern und Bildmenge erfolgt nach dem gleichen Verfahren wie bei der Abbildung in der Ebene. Arbeiten Sie dies beispielhaft durch, und übertragen Sie die Verfahren auf nachfolgende Übungsaufgaben a).

Ansatz Fixpunktmenge: $A \cdot \vec{x} = \vec{x}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Zu lösendes LGS:

$$\begin{aligned} \text{I} \quad x &= x \\ \text{II} \quad \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z &= y \\ \text{III} \quad \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z &= z \end{aligned}$$

II und III sind identisch: $\Rightarrow y - z = 0$

Interpretation des Ergebnisses: In diesem unterbestimmten LGS sind zwei Variablen frei wählbar. Wählt man $x = r$ und $z = s$ ergibt sich aus

$$\vec{x} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{oder nach Umrechnung die Ebene } y - z = 0$$

entspricht die Fixpunktmenge der Projektions-

Zu lösendes LGS:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{I} \quad x &= 0 \Rightarrow x = 0 \\ \text{II} \quad \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z &= 0 \\ \text{III} \quad \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z &= 0 \end{aligned}$$

Beide Gleichungen identisch: $\Rightarrow 2y + z = 0$

Interpretation des Ergebnisses: In diesem unterbestimmten LGS ist eine Variable frei wählbar. Wählt man r , folgt $z = -2r$. Als Lösungsvektor ergibt sich

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ -2r \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}. \text{ Dies entspricht der Projektionsebene durch den}$$

Ursprung des Koordinatensystems, d.h. die Ebene $y - 2z = 0$ ist der Kern der Projektion.

Ansatz Bildmenge:

$$A \cdot \vec{x} = \vec{x}'$$

Zu lösendes LGS:

Links vom Gleichheitszeichen ergibt sich Null.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\text{I } x = x' \Rightarrow \text{x-Achse wird 1:1 abgebildet}$$

$$\text{II } \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z = y'$$

$$\text{III } \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z = z' \quad || - \text{II}$$

$$0 = y' - z'$$

Interpretation des Ergebnisses:

Die Bildmenge entspricht Fixpunkten $\vec{e}$. Damit handelt es sich bei der linearen Abbildung um eine Projektion.

Aufgabe 19.5

Bedeutung der Einheitsvektoren bei Projektionen

a) Als Projektionsgeraden g_p die Ebene $x + y + z = 0$ gewählt. Zeigen Sie durch entsprechende Rechnung, dass die Abbildungsmatrizen ergeben:

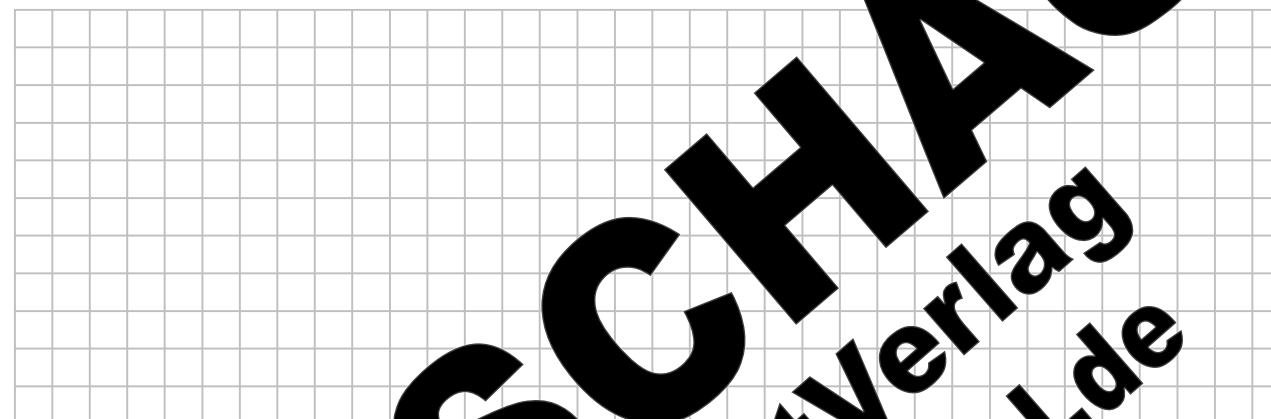
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

, wenn man in Richtung des Einheitsvektors $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (x-Achse) projiziert.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

, wenn man in Richtung des Einheitsvektors $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (y-Achse) projiziert.

iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, wenn man in Richtung des Einheitsvektors $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (x-Achse) projiziert



Ergänzen Sie:

Bei der Projektion in Richtung der Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ füllen drei Matrizen jeweils eine Spalte mit Nullen auf. Bei Projektion in Richtung des Einheitsvektors $\vec{e}_1$ entspricht die ____ Spalte dem Nullvektor. Bei Projektion in Richtung des Einheitsvektors ____ entspricht die 2. Spalte dem Nullvektor. Bei Projektion in Richtung des Einheitsvektors ____ entspricht die ____ Spalte dem Nullvektor.

In Aufgabe 19.4 wurde bei der Projektion auf die Ebene $E: y - z = 0$ in Richtung der Projektionsgeraden

$g_p: \vec{x}' = \vec{x} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ die Projektionsmatrix $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ermittelt. Setzt man in der

Projektionsgeraden für den Vektor $\vec{x}$ nacheinander die Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ ein und berechnet die Durchstoßpunkte der Projektionsebene E , erhält man deren Bilder $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$ und $\vec{e}_3'$. Führen Sie diese Berechnungen durch und ergänzen Sie den nachfolgenden Satz.

$$\begin{aligned} \text{i) } \vec{e}_1' &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ in } E_B \Rightarrow -s - 2s = 0 \Rightarrow \vec{e}_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \text{ii) } \vec{e}_2' &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ in } E_B \Rightarrow 1 - s - 2s = 0 \Rightarrow s = \frac{1}{3} \Rightarrow \vec{e}_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \\ \text{iii) } \vec{e}_3' &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ in } E_B \Rightarrow -s = 0 \Rightarrow s = 0 \Rightarrow \vec{e}_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Einheitsvektoren entsprechen den Spalten der Abbildungsmatrix. Damit kann man die Projektionsmatrix über die Abbildung der Einheitsvektoren ermitteln.

Aufgabe 19.6

Untersuchung auf Existenz einer inversen Matrix bei der Projektion

Aus Aufgabe 18.6 wissen Sie bereits, dass es zu einer Matrix A auf V eine inverse Matrix A^{-1} geben kann und dass gilt: $A \cdot A^{-1} = E$

Aufgrund der Überlegungen aus Aufgabe 19.4 wissen Sie, dass bei Projektionen gilt: $A^2=A$.

In den folgenden Rechenschritten werden diese Zusammenhänge angewandt, um zu untersuchen, ob zu einer Projektionsmatrix A eine inverse Matrix A^{-1} existiert. Erläutern Sie die Zeilen (2) bis (5) und ergänzen Sie die Lücken im Text.

(1) Wenn A^{-1} existiert gilt: $A \cdot A^{-1} = E$

(2) $A \cdot (A \cdot A^{-1}) = A \cdot E$

(3) $(A \cdot A) \cdot A^{-1} = A$

(4) $A^2 \cdot A^{-1} = A$

(5) Es besteht ein Widerspruch zur Zeile (1), da das Produkt einer

_____ mit der inversen Matrix die _____

_____ ergeben muss.

Ergebnis: Bei einer Projektion existiert zur Projektionsmatrix _____ inverse Matrix A^{-1} .

Raum für Notizen

Grid area for notes.

Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Lineare Algebra selbstorganisiert erlernen



Kapitel

Spiegelung

Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen	9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen	17

Einführung in die Vektorrechnung

Kapitel 3 – Koordinatensysteme	23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu den Vektoren	25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren	33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Linearer Abhängigkeit	43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit	47

Geraden in der Ebene und im Raum

Kapitel 8 – Parameterdarstellung von Geraden	49
Kapitel 9 – Lagebeziehung von Geraden	55
Kapitel 10 – Skalares und Vektorielles Produkt	59
Kapitel 11 – Vektorielles und Kreuzprodukt	65

Ebenen im Raum

Kapitel 12 – Darstellung von Ebenen	69
Kapitel 13 – Bestimmene Ebenen	81
Kapitel 14 – Lagebeziehungen von Ebenen	85
Kapitel 15 – Abstände	99
Kapitel 16 – Schnittwinkel	105
Kapitel 17 – Ebenenfamilien	107

Lineare Abbildungen

Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen	119
Kapitel 19 – Determinanten	125
Kapitel 20 – Lineare Abbildungen	137
Kapitel 21 – Eigenwerte und Eigenvektoren	143
Kapitel 22 – Diagonalisierbarkeit	145
Kapitel 23 – Verkettung von linearen Abbildungen	149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen $Ax = x'$	153

Gesamte Verantwortung für die Inhalte liegt bei der Autorin selbstorganisiert erlernen (ISBN 978-3-031-266)

Styl

Alle Rechte vorbehalten. All rights reserved.

Keine Weitergabe, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet

SelbstVerlag

Styl & Freunde GmbH, Koblenz (Germany)

Lehrerselbstverlag.de

www.f-druck.de

Kapitel 20: Spiegelung

Aufgabe 20.1

Im Rahmen dieser Aufgabe wird entsprechend zur Projektion eine Spiegelmatrix ermittelt und anschließend die Eigenschaften dieser Matrix untersucht.

Wie bei allen "linearen" Abbildungen ist die Ebene, an der gespiegelt wird, eine Ursprungsebene.

Hier wird die Ebene $E: x - y = 0$ gewählt.

in Richtung der Geraden $g_s: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

gespiegelt.

a) Ermitteln der Spiegelmatrix S .

Schritt 1: Bestimmen der Gleichung der Geraden g_s , welche die Richtung der Spiegelung vorgibt.

$$g_s: \vec{x}' = \vec{x} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Schritt 2: Wie Sie bereits im Kapitel 14 Aufgabe 14.3 gelernt haben, benötigt man zur Berechnung der Koordinaten des gespiegelten Punktes die Koordinaten des Durchstoßpunktes S .

Die Ebene E ist durch die Gleichung $x - y = 0$ gegeben. Die Berechnung liefert den Parameter s .

Schritt 3: Koordinaten des Spiegelpunktes analog zu Schritt 2 berechnen.

$$\vec{x}' = \vec{x} + 2s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2x + 2y \\ y + 2x - 2y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + 2y + 0 \\ 0 + y + 0 \\ 2x - 2y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + 2y \\ y \\ 2x - 2y + z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Spiegelmatrix: } S = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Anwenden der Abbildungsmatrix S auf Punkte im Raum

Zeigen Sie, dass der Punkt $P(-2/0/3)$ auf den Punkt $P'(2/0/-1)$ abgebildet wird, sowie der Punkt $Q(2/2/3)$ und alle Punkte $R(0/0/r)$ auf der z -Achse Fixpunkte bei der Abbildung sind.

$$P(-2/0/3) \Rightarrow \vec{p}' = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{p}' \Rightarrow P' = (2/0/-1)$$

$$Q(2/2/3) \Rightarrow \vec{q}' = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{q}' \Rightarrow Q' = Q$$

$$R(0/0/r) \Rightarrow \vec{r}' = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} = \vec{r}' \Rightarrow R' = R$$

Aufgabe 20.2

Eigenschaften der Spiegelmatrix

Ermitteln Sie zu Projektionsmatrizen P und S charakteristische Eigenschaften auf.

a) Wenden Sie die Spiegelmatrix auf den Punkt P' aus Aufgabe 20.1 b) an und ergänzen Sie den folgenden Satz.

$$P'(2/0/-1) \Rightarrow \vec{p}'' = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{p} \Rightarrow P''(-2/0/3) = P$$

Welche Matrix noch einmal?

Erhält man den

gilt bei einer Spiegelung $S \cdot (S \cdot \vec{x}) = S \cdot S \cdot \vec{x} = S^2 \cdot \vec{x} = \vec{x}$ und damit gilt $S \cdot S = S^2$ muss

daher der Zusammenhang $S^2 = E$ erfüllt sein.

Zeigen Sie, dass $S \cdot S = S^2$ für die Matrix aus Aufgabe 20.1 b) gilt, dass bei einer Spiegelung $S^2 = E$ ist.

$$S^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

b) Fixpunktmenge, Kern und Bildmenge bei einer Spiegelung

Die Berechnung von Fixpunktmenge, Kern und Bildmenge erfolgt nach den gleichen Verfahren wie bei der Projektion. Arbeiten Sie die Beispiele durch, und wenden Sie die Verfahren auf nachfolgende Übungsaufgaben an.

Ansatz Fixpunktmenge: $S \cdot \vec{x} = \vec{x}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Zu lösendes LGS:

$$\begin{array}{lcl} \text{I} & -x + 2y & = 0 \\ \text{II} & y & = 0 \\ \text{III} & 2x - 2y + z & = z \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{I} & -x + 2y & = 0 \\ \text{II} & y & = 0 \\ \text{III} & 2x - 2y & = 0 \end{array}$$

II und III sind identisch: $\Rightarrow x - y = 0$

Interpretation des Ergebnisses: In diesem LGS sind zwei Variablen frei wählbar. Man erhält als Lösungsmenge eine Ebene, die der Ebene $x - y = 0$ entspricht. Damit entspricht die Fixpunktmenge der Spiegelungsebene, d.h. alle Punkte auf dieser Ebene werden auf sich selbst abgebildet.

Ansatz Kern: $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zu lösendes LGS:

$$\begin{array}{lcl} \text{I} & -x + 2y & = 0 \\ \text{II} & y & = 0 \\ \text{III} & 2x - 2y + z & = 0 \end{array} \Rightarrow y = 0$$

$$y \text{ in I} \Rightarrow x = 0$$

$$x, y \text{ in III} \Rightarrow z = 0$$

Die Menge aller Punkte an, die auf den Ursprung abgebildet werden, ist die Menge aller Punkte, die auf den Ursprung gespiegelt werden. Da eine Spiegelung jedoch nur der Ursprung selbst abbildet, ist der Punkt einen vom Ursprung verschieden. Dieses Ergebnis ist daher charakteristisch für eine Spiegelung.

Ansatz Bildmenge: $A \cdot \vec{x} = \vec{x'}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Zu lösendes LGS:

$$\begin{array}{lcl} \text{I} & -x + 2y & = x' \\ \text{II} & y & = y' \\ \text{III} & 2x - 2y + z & = z' \end{array}$$

Links vom Gleichheitszeichen ergibt sich durch die Addition nicht Null.

$$\begin{array}{lcl} \text{IV} & -x & = x' - 2y' \\ \text{V} & x & = x' - 2y' \end{array}$$

Interpretation des Ergebnisses:

Da sich die rechte Seite des LGS nicht so umformen lässt, dass bei der Projektion Null ergibt, also ein Ergebnis der Form $0 = 2x' - 2y' + z'$ entsteht, existiert keine Bildmenge. Das heißt, auch bei einer Spiegelung jeder Punkt individuell auf einen Bildpunkt abgebildet wird und somit keine einheitlich beschreibende Bildmenge vorhanden ist.

Aufgabe 20

Untersuchen Sie die Existenz einer inversen Matrix bei der Spiegelung

Aufgabe 18.6 wissen Sie bereits, dass es zu einer Matrix A auch eine inverse Matrix A^{-1} geben kann. Hier gilt: $A \cdot A^{-1} = E$.

Aufgrund der Überlegungen aus Aufgabe 20.2 wissen Sie, dass bei Spiegelungen gilt: $S^2 = E$.

In den folgenden Rechenschritten werden diese Zusammenhänge angewendet, um zu untersuchen, ob zu einer Spiegelmatrix S eine inverse Matrix S^{-1} existiert. Erläutern Sie die Zeilen (2) bis (5) und ergänzen Sie die Lücken im Text.

(1) Wir wissen:

$$S \cdot (S \cdot S^{-1}) = S \cdot E$$

(3)

(4)

$$S^2 \cdot S^{-1} = S$$

(5) $E \cdot S^{-1} = S$
oder $S^{-1} = S$

Ergebnis: Wenn eine inverse Abbildung existiert, gilt bei einer Spiegelung $S^{-1} = S$.

Übungen

Ü20.1 Untersuchen Sie die orthogonale Spiegelung an der Ebene $x - z = 0$ in Ihrem Heft.

- a) Zeigen Sie, dass sich als Spiegelmatrix $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ergibt.
- b) Zeigen Sie, dass die Eigenschaft $S^2 = E$ erfüllt ist.
- c) Zeigen Sie, dass die Fixpunktmenge der Spiegelebene entspricht.
- d) Zeigen Sie, dass der Kern der Abbildung dem Nullvektor entspricht.
- e) Zeigen Sie, dass keine Bildmenge existiert.

Ü20.2 Untersuchen Sie durch Rechnung, dass es sich bei der

Abbildung um eine orthogonale Spiegelung handelt, indem Sie die Fixpunktmenge, den Kern und die Bildmenge untersuchen.

Raum für Notizen

Grid area for notes.

Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Lineare Algebra selbstorganisiert erlernen



Kapitel 22 – Zentrische Streckung
aus dem Ursprung

Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen	9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen	17

Einführung in die Vektorrechnung

Kapitel 3 – Koordinatensysteme	23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu den Vektoren	25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren	33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Linearer Abhängigkeit	43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit	47

Geraden in der Ebene und im Raum

Kapitel 8 – Parameterdarstellung von Geraden	49
Kapitel 9 – Lagebeziehung von Geraden	55
Kapitel 10 – Skalares und Vektorielles Produkt	59
Kapitel 11 – Vektorielles Produkt	65

Ebenen im Raum

Kapitel 12 – Darstellung von Ebenen	69
Kapitel 13 – Beziehung zwischen Ebenen	81
Kapitel 14 – Lagebeziehung von Ebenen	85
Kapitel 15 – Abstände	99
Kapitel 16 – Schnittwinkel	105
Kapitel 17 – Ebenenfamilien	107

Lineare Abbildungen

Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen	119
Kapitel 19 – Determinanten	125
Kapitel 20 – Lineare Abbildungen	137
Kapitel 21 – Lineare Abbildungen	143
Kapitel 22 – Lineare Abbildungen	145
Kapitel 23 – Verkettung von linearen Abbildungen	149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen $Ax = x'$	153

Gesamte Verantwortung für die Inhalte dieses Buches liegt bei der Autorin selbstorganisiert erlernen (ISBN 978-3-031-266-031-266)

Alle Rechte vorbehalten. All rights reserved.

Keine Weitergabe, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet

SelbstVerlag

Stes & Freunde GmbH, Koblenz (Germany)

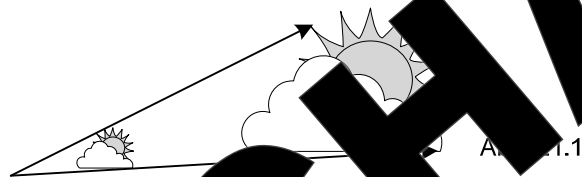
lehrerselbstverlag.de

www.f-druck.de

Kapitel 21: Zentrische Streckung aus dem Ursprung

Aufgabe 21.1

Eigenschaften von Streckmatrizen bei zentrischer Streckung aus dem Ursprung



Die Abbildungen 21.1 und 21.2 zeigen jeweils eine zentrische Streckung von Bildern und Vektoren. Sie zeigen bereits, dass man Vektoren durch Multiplikation mit einem reellen Zahlenwert verlängern bzw. verkürzen und die Richtung umkehren kann. Neu ist nun, dass man die bekannten Operationen auf die Bedeutung einer linearen Abbildung überträgt und eine Abbildungsmatrix aufstellt.

Die folgende Umformung zeigt die Herleitung einer Streckmatrix in der Ebene.

a) Übertragen Sie das Vorgehensweise auf Vektoren im Raum und geben Sie die entsprechende Streckmatrix an.

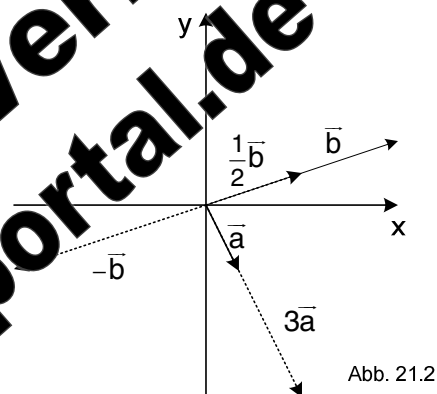


Abb. 21.2

$$\vec{x}' = u \cdot \vec{x} = u \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ux \\ uy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ux + 0 \\ 0 + uy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \vec{x} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}$$

Streckmatrix Ebene

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} u & - & - \\ - & u & - \\ - & - & u \end{pmatrix}$$

b) Zeichnen Sie: Eine Streckmatrix erkennt man daran, dass auf der Diagonalen drei

Zahlenwerte stehen und in allen restlichen Feldern eine

c) Eigenschaften

Verdienen Sie die folgenden Angaben, inwiefern das Ergebnis bei einer zentrischen Streckung von dem Zahlenwert u in der Streckmatrix abhängt.

- $u = 0 \Rightarrow$ Streckung in Richtung des Vektors $\vec{x}$
- $u = 1 \Rightarrow$ A entspricht der Einheitsmatrix $\vec{x}$ und bildet $\vec{x}$ auf sich. Damit liegt für $u = 1$ keine zentrische Streckung vor.
- $-1 < u < 1 \Rightarrow$ Verkürzung des Vektors

- $u = 0 \Rightarrow$ Abbildung des Vektors $\vec{x}$ auf den Ursprung. In diesem Fall liegt keine zentrische Streckung vor.
- $-1 < u < 0 \Rightarrow$ Punktspiegelung am Ursprung mit Verkürzung des Vektors $\vec{x}$
- $u = -1 \Rightarrow$ Punktspiegelung am Ursprung
- $u < -1 \Rightarrow$ Punktspiegelung am Ursprung mit Streckung des Vektors $\vec{x}$

d) Fixpunktmenge, Kern und Bildmenge bei der zentrischen Streckung, für $u \neq 1$ und $u \neq 0$.

Fixpunktmenge: $A\vec{x} = \vec{x} \Rightarrow \begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Lösen des LGS: $\begin{cases} ux = x \\ uy = y \\ uz = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Interpretation: Da die Fixpunktmenge alle Punkte liefert, die auf sich selbst abgebildet werden, kann, wie das Ergebnis zeigt, nur der Ursprung die Fixpunktmenge sein, d.h. nur der Nullvektor wird auf sich selbst abgebildet.

Kern: $A\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lösen des LGS: $\begin{cases} ux = 0 \\ uy = 0 \\ uz = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Interpretation: Der Kern besteht aus dem Ursprung, da außer dem Nullvektor, da außer dem Ursprung abgebildet werden.

Ursprung selbst kein Bildpunkt.

Bildmenge: $A\vec{x} = \vec{y} \Rightarrow \begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

Lösen des LGS: $\begin{cases} ux = x' \\ uy = y' \\ uz = z' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x'/u \\ y = y'/u \\ z = z'/u \end{cases} \Rightarrow$ keine Einschränkung an x, y und z auf den Ursprung möglich

Interpretation: Jeder Punkt hat einen individuellen Bildpunkt. Daher kann keine einheitlich anzugebende Bildmenge angegeben werden.

Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Lineare Algebra selbstorganisiert erlernen



Kapitel

Drehungen

Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen	9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen	17

Einführung in die Vektorrechnung

Kapitel 3 – Koordinatensysteme	23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu den Vektoren	25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren	33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Linearer Abhängigkeit	43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit	47

Geraden in der Ebene und im Raum

Kapitel 8 – Parameterdarstellung von Geraden	49
Kapitel 9 – Lagebeziehung von Geraden	55
Kapitel 10 – Skalares und Vektorielles Produkt	59
Kapitel 11 – Vektorielles und Kreuzprodukt	65

Ebenen im Raum

Kapitel 12 – Darstellung von Ebenen	69
Kapitel 13 – Besondere Ebenen	81
Kapitel 14 – Lagebeziehungen von Ebenen	85
Kapitel 15 – Abstände	99
Kapitel 16 – Schnittwinkel	105
Kapitel 17 – Ebenenfamilien	107

Lineare Abbildungen

Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen	119
Kapitel 19 – Determinanten	125
Kapitel 20 – Lineare Abbildungen	137
Kapitel 21 – Eigenwerte und Eigenvektoren	143
Kapitel 22 – Diagonalisierbarkeit	145
Kapitel 23 – Verkettung von linearen Abbildungen	149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen $Ax = x'$	153

Gesamte Verantwortung für die Inhalte liegt bei der Autorin selbstorganisiert erlernen (ISBN 978-3-031-266)

Copyright

Alle Rechte vorbehalten. All rights reserved.

Keine Weitergabe, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet

SelbstVerlag

Verlag des Autors & Freunde GmbH, Koblenz (Germany)

Lehrerselbstverlag.de

www.f-druck.de

Kapitel 22: Drehungen

Aufgabe 22.1

Die Betrachtung von Drehungen beschränkt sich hier auf die Drehung um die Koordinatenachsen. In der folgenden Abbildung ist die Drehachse die z-Achse und zeigt nach vorne der Papierebene heraus. Die Position der Wolke vor und nach der Drehung wird durch die Koordinaten des Punktes X bzw. X' angegeben. Verdeutlichen Sie sich die Herleitung der Drehmatrix bei einer Drehung um die z-Achse, indem Sie die Umformungen erläutern.



Mit Hilfe der Additionstheoreme (vgl. Tafelrechnen)

$$\sin(\alpha + \phi) = \sin \alpha \cos \phi + \cos \alpha \sin \phi$$

$$\cos(\alpha + \phi) = \cos \alpha \cos \phi - \sin \alpha \sin \phi$$

ergeben sich folgende Umformungen bei der Herleitung der Drehmatrix um die z-Achse. Erläutern Sie die Schritte (1) bis (4).

(1) $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \alpha \\ r \sin \alpha \\ z \end{pmatrix}$

(2) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} r \cos(\alpha + \phi) \\ r \sin(\alpha + \phi) \\ z \end{pmatrix}$

(3) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} x \cos \phi - y \sin \phi \\ x \sin \phi + y \cos \phi \\ z \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} x \cos \phi - y \sin \phi + 0 \\ x \sin \phi + y \cos \phi + 0 \\ 0 + 0 + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} = M_z \vec{x}$

Drehmatrix M_z

Wenn man die Betrachtungen zur Herleitung der Drehmatrix um die z-Achse auf Drehungen um die x- und y-Achse überträgt, ergibt sich folgender Überblick über Drehmatrizen:

Drehung um die x-Achse

$$M_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

Drehung um die y-Achse

$$M_y = \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix}$$

Drehung um die z-Achse

$$M_z = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 22.2

Berechnen Sie

a) die Drehmatrix bei einer Drehung um 90° um die x-Achse: $M = \begin{pmatrix} _ & _ & _ \\ _ & _ & _ \\ _ & _ & _ \end{pmatrix}$

b) die Drehmatrix bei einer Drehung um 45° um die y-Achse: $M = \begin{pmatrix} _ & _ & _ \\ _ & _ & _ \\ _ & _ & _ \end{pmatrix}$

c) die Drehmatrix bei einer Drehung um 20° um die z-Achse: $M = \begin{pmatrix} _ & _ & _ \\ _ & _ & _ \\ _ & _ & _ \end{pmatrix}$

Aufgabe 22.3

Eigenschaften von Drehmatrizen

Die Betrachtung

der Spaltenvektoren

zeigen Sie anhand der Drehmatrix um die z-Achse durch Berechnung der Länge bzw. der Länge der Spaltenvektoren, dass gilt: **Alle Spaltenvektoren einer Drehmatrix haben die Länge 1.**

$$|\vec{a}_1| = \sqrt{\cos^2 \phi + \sin^2 \phi} = 1$$

$$|\vec{a}_2| = \sqrt{(-\sin \phi)^2 + \cos^2 \phi} = 1$$

$$|\vec{a}_3| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$$

$$M_z = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\quad}_{\vec{a}_1} \quad \underbrace{\quad}_{\vec{a}_2} \quad \underbrace{\quad}_{\vec{a}_3}$

b) Orientierung der Spaltenvektoren

Zeigen Sie anhand der Drehmatrix um die z-Achse durch Berechnung der Länge bzw. der Länge der Spaltenvektoren, dass gilt: **Alle Spaltenvektoren einer Drehmatrix sind orthogonal.**

Def.: Orthonormale Matrizen

Matrizen, deren Spaltenvektoren normiert und paarweise zueinander orthogonal sind, nennt man orthonormale Matrizen

$$\vec{a_1} \cdot \vec{a_2} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = -\cos \varphi \sin \varphi + \sin \varphi \cos \varphi = 0$$

$$\vec{a_1} \cdot \vec{a_3} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\vec{a_2} \cdot \vec{a_3} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

c) Berechnung des Drehwinkels

Der Drehwinkel lässt sich über die Spur der Matrix berechnen.

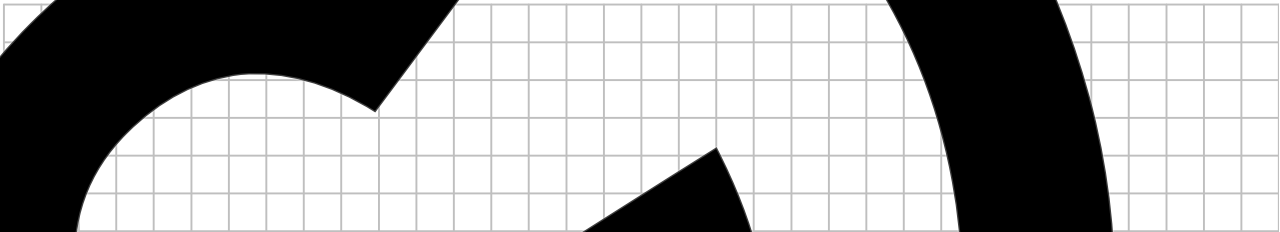
Def.: Spur einer Matrix

Die Spur einer Matrix ist die Summe der Elemente in der Diagonalen.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots \\ \dots & a_{22} & \dots \\ \dots & \dots & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{Spur } A = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

Es gilt: $\cos \varphi = \frac{1}{2} (\text{Spur } D - 1)$

Zeigen Sie, dass die Matrix $D = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ eine Drehung um die z-Achse bewirkt.



d) Fixpunktmenge, Kern und Bildmenge bei Drehmatrizen

Fixpunktmenge: Bei einer Drehmatrix werden nur die Punkte der Drehachse auf sich selbst abgebildet. Daher ergibt sich bei der Fixpunktmenge die Drehachse, also die z-Achse als Lösung.

Kern: Der Kern liefert alle Punkte, die auf den Ursprung abgebildet werden. Daher liefert der Kern ebenfalls den Nullvektor, da außer dem Ursprung selbst kein weiterer Punkt auf den Ursprung abgebildet wird.

Bildmenge: Eine einheitliche Bildmenge ist nicht bestimmbar, da jeder Punkt in der Ebene auf einen eigenen Bildpunkt abgebildet wird.

Übungen

Ü22.1 Ermitteln Sie für die folgenden Drehungen die Drehmatrix. Geben Sie die Werte ggf. in Vielfachen von $\sqrt{2}$ oder $\sqrt{3}$ an.

a) 45° um die z-Achse $D = \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ & 0 \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) 90° um die x-Achse $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ 0 & \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) 180° um die y-Achse $D = \begin{pmatrix} \cos 180^\circ & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin 180^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) 270° um die z-Achse $D = \begin{pmatrix} \cos 270^\circ & -\sin 270^\circ & 0 \\ \sin 270^\circ & \cos 270^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

e) 30° um die z-Achse $D = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ & 0 \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Lineare Algebra selbstorganisiert erlernen



Kapitel 23 – Verkettung von
linearen Abbildungen

Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen	9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen	17

Einführung in die Vektorrechnung

Kapitel 3 – Koordinatensysteme	23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu den Vektoren	25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren	33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Linearer Abhängigkeit	43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit	47

Geraden in der Ebene und im Raum

Kapitel 8 – Parameterdarstellung von Geraden	49
Kapitel 9 – Lagebeziehung von Geraden	55
Kapitel 10 – Skalares und Vektorielles Produkt	59
Kapitel 11 – Vektorielles und Kreuzprodukt	65

Ebenen im Raum

Kapitel 12 – Darstellung von Ebenen	69
Kapitel 13 – Besondere Ebenen	81
Kapitel 14 – Lagebeziehungen von Ebenen	85
Kapitel 15 – Abstände	99
Kapitel 16 – Schnittwinkel	105
Kapitel 17 – Ebenenfamilien	107

Lineare Abbildungen

Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen	119
Kapitel 19 – Determinanten	125
Kapitel 20 – Inverse Matrizen	137
Kapitel 21 – Lineare Abbildungen	143
Kapitel 22 – Lineare Abbildungen	145
Kapitel 23 – Verkettung von linearen Abbildungen	149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen $Ax = x'$	153

Gesamte Verantwortung für die Inhalte dieses Buches liegt bei der Autorin selbstorganisiert erlernen (ISBN 978-3-031-266-031-266)

Copyright

Alle Rechte vorbehalten. All rights reserved.

Keine Weitergabe, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet

SelbstVerlag

Verlag des Autors & Freunde GmbH, Koblenz (Germany)

www.lehrerselbstverlag.de

www.f-druck.de

Kapitel 23: Verkettung von linearen Abbildungen

Aufgabe 23.1

- a) Für ein Computerspiel soll die dreidimensionale Umgebung einer Burganlage auf 25% der ursprünglichen Größe verkleinert und auf die y,z-Ebene des Monitors projiziert werden. Erläutern und ergänzen Sie die nachfolgenden Rechenschritte:



(1) $A = \begin{pmatrix} 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0,25 \end{pmatrix}$

(2.1) $E_p: x = 0$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(2.2) $x + r = 0$
 $r = \underline{\hspace{2cm}}$

(2.3)

$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $P(4/8/12)$

$\begin{pmatrix} \underline{\hspace{1cm}} \\ \underline{\hspace{1cm}} \\ \underline{\hspace{1cm}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$= B \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\hspace{1cm}} \\ \underline{\hspace{1cm}} \\ \underline{\hspace{1cm}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(4) $M = B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0,25 \end{pmatrix}$

$M \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0,25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{p}''$

(5) $N = A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0,25 \end{pmatrix}$

(6) $M \cdot \vec{p} = N \cdot \vec{p} = \vec{p}'' \Rightarrow B = B$

- b) Für einen anderen Sequenz soll die Burganlage um 45° um die z-Achse gedreht und dann in Richtung der Geraden $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf die y,z-Ebene des Monitors projiziert werden.

Erläutern Sie die nachfolgenden Angaben und Rechenschritte und ergänzen Sie fehlende Angaben:

(1) $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2.1) $E_p: x = 0$

$g_p: \vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 \\ \underline{\hspace{1cm}} \\ \underline{\hspace{1cm}} \end{pmatrix}$

(2)

$$(2.3) \quad \vec{x}' = \vec{x} - x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0+0 \\ 2x+y+0 \\ 0+0+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$$

$$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) P(4/8/12)

$$\vec{p}' = A \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\vec{p}'' = B \vec{p}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$M = B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3\sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3\sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{2} \\ 12 \end{pmatrix} = \vec{p}''$$

$$N = A \cdot B = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

c) Ergänzen Sie anhand der Ergebnisse aus (6) in Aufgabenteil a) und (5) in Aufgabenteil b) die folgenden Sätze:

Bei einer linearen Abbildung werden, wie im Aufgabenteil a) und b), zwei Abbildungen hintereinander nacheinander angewendet. Man bezeichnet das als **Verkettung** von Abbildungen. Das heißt:

- Die Verkettung zweier linearer Abbildungen kann durch das Produkt der beiden Abbildungsmatrizen berechnet werden.
- Es gibt Verkettungen, bei denen die Reihenfolge der Abbildungen keine Rolle spielt. In diesem Fall sind die Ergebnisse der Produkte $A \cdot B$ und $B \cdot A$ gleich.
- Es gibt Verkettungen, bei denen die Ergebnisse der Produkte $A \cdot B$ und $B \cdot A$ unterschiedlich sind. Bei diesen Verkettungen spielt die Reihenfolge der beiden Abbildungen eine Rolle.
- Da es Verkettungen gibt, bei denen $A \cdot B \neq B \cdot A$ gilt, muss die Reihenfolge, in der die Abbildungen angewendet werden, beachtet werden.

Wenn die Abbildung A zuerst und die Abbildung B danach durchgeführt wird, gilt für die Verkettung:

$$\vec{x}'' = B \vec{x}' = B(A \vec{x}) = B \cdot A \vec{x} = M \vec{x} \quad \Rightarrow M = \underline{\quad}$$

Aus dem Produkt $B \cdot A$ erkennt man, dass zuerst die Abbildung A und danach die Abbildung B angewendet wurde.

Ergänzen Sie:

Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Lineare Algebra selbstorganisiert erlernen



Überblick lineare Abbildungen A

Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen	9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen	17

Einführung in die Vektorrechnung

Kapitel 3 – Koordinatensysteme	23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu den Vektoren	25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren	33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Linearer Abhängigkeit	43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit	47

Geraden in der Ebene und im Raum

Kapitel 8 – Parameterdarstellung von Geraden	49
Kapitel 9 – Lagebeziehung von Geraden	55
Kapitel 10 – Skalares und Vektorielles Produkt	59
Kapitel 11 – Vektorielles Produkt	65

Ebenen im Raum

Kapitel 12 – Darstellung von Ebenen	69
Kapitel 13 – Beziehung zwischen Ebenen	81
Kapitel 14 – Lagebeziehungen von Ebenen	85
Kapitel 15 – Abstände	99
Kapitel 16 – Schnittwinkel	105
Kapitel 17 – Ebenenfamilien	107

Lineare Abbildungen

Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen	119
Kapitel 19 – Determinanten	125
Kapitel 20 – Inverse Matrizen	137
Kapitel 21 – Lineare Abbildungen	143
Kapitel 22 – Verkettung von linearen Abbildungen	145
Kapitel 23 – Verkettung von linearen Abbildungen	149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen $Ax = x'$	153

Gesamte Verantwortung für die Inhalte liegt bei der Autorin selbstorganisiert erlernen (ISBN 978-3-031-266)

Alle Rechte vorbehalten. All rights reserved.

Keine Weitergabe, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet

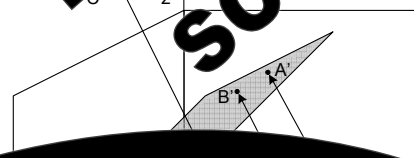
SelbstVerlag

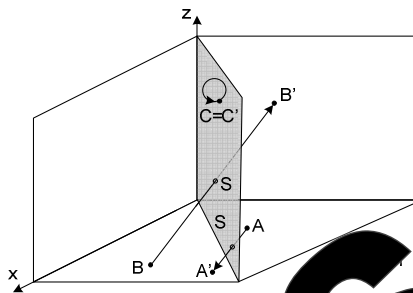
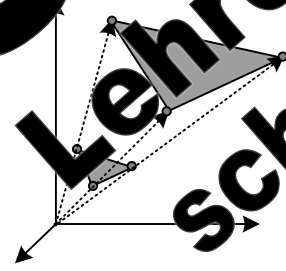
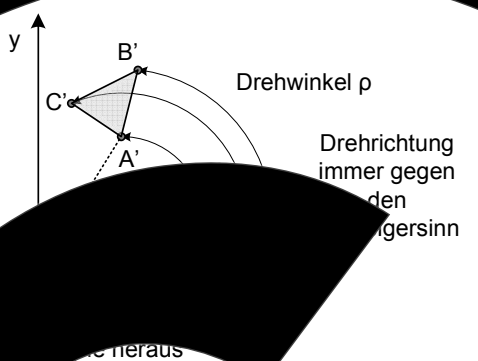
Stes & Freunde GmbH, Koblenz (Germany)

lehrerselbstverlag.de

www.f-druck.de

Kapitel 24: Überblick lineare Abbildungen $A\vec{x} = \vec{x}'$

Abbil- dungsart	Darstellung / Informationen	Eigenschaften der Abbildungen und Matrizen
Allgemeines	Bei einer "linearen" Abbildung $A\vec{x} = \vec{x}'$ sind Projektionsgeraden und Projektionsebenen sowie Spiegelgeraden und Spiegelebenen immer Ursprungsgeraden bzw. Ursprungsebenen.	Grundlegendes zu Matrizen, wobei E die Einheitsmatrix ist. Zu A inverse Matrix A^{-1} angibt. $A \cdot E = A$ und $E \cdot A = A$ $A^{-1} \cdot A = E$ und $A \cdot A^{-1} = E$ $E \cdot A^{-1} = A^{-1}$ und $A^{-1} \cdot E = A^{-1}$
Verkettung	Werden zwei Abbildungen nacheinander angefügt, wird die gesamte Abbildung als Produkt der beiden Abbildungsmatrizen beschrieben. Im 2D-Raum: $A \cdot A^{-1} = E$ muss die Reihenfolge der Abbildungen beachtet werden.	Es gilt: Matrix A beschreibt die erste Abbildung, Matrix B beschreibt die zweite Abbildung, dann folgt für die Verkettung M: $M = B \cdot A$
		1. Zin: einmalige Abbildung projiziert jeden Punkt P im Raum auf die Projektionsebene. Alle Punkte P' liegen auf der Projektionsebene und sind Fixpunkte. Es gilt: 1. Abbildung: $\vec{x}' = A\vec{x}$ 2. Abbildung: $\vec{x}'' = A\vec{x}' = A(A\vec{x}) = A^2\vec{x}$ $\Rightarrow$ $A^2 = A$ 2. Es existiert keine inverse Matrix A^{-1} . Beweis: Wenn A^{-1} existiert gilt: $A \cdot A^{-1} = E$ $A(A \cdot A^{-1}) = AE$ $(AA) \cdot A^{-1} = A$ $A \cdot A^{-1} = A$ $\Rightarrow$ Widerspruch! 3. Die Spaltenvektoren von A sind linear abhängig. 4. Die Spaltenvektoren von A liefern die Spannvektoren der Projektionsebene. 5. Die Bilder der Spaltenvektoren entsprechen den Spaltenvektoren der Projektionsebene. Ansatz für 1. Spaltenvektor: $\vec{s}_1 + s_2$ etc. 6. Ist ein Spaltenvektor Nullvektor, so entspricht die Projektion der Nullvektoren der Nullvektoren der Nullvektoren.

Abbil- dungsart	Darstellung / Informationen	Eigenschaften der Abbildungen und Matrizen
Spiegelung		1. Wendet man die Abbildung zweimal an, so wird jeder Punkt A wieder in den ursprünglichen Punkt A' abgebildet bzw. zurück verschoben. 1. Abbildung: $\vec{x}' = A\vec{x}$ 2. Abbildung: $\vec{x}'' = A\vec{x}' = A(A\vec{x}) = A^2\vec{x}$ $\Rightarrow$ $A^2 = E$ 2. Wenn A^{-1} existiert, gilt bei der Spiegelung: $A^{-1} = A$ Beweis: $A \cdot A^{-1} = E$ $A(A \cdot A^{-1}) = AE$ $(AA) \cdot A^{-1} = A$ $A \cdot A^{-1} = A$ $A^{-1} = A$
Zentrische Streckung aus Ursprung		Die Streckmatrix hat immer die Form: $A = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}$ und $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{u} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{u} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{u} \end{pmatrix}$ Das Abbildungsergebnis ist abhängig von u: $u > 1 \Rightarrow$ Streckung in Richtung von $\vec{x}$ $0 < u < 1 \Rightarrow$ Verkürzung $-1 < u < 0 \Rightarrow$ Spiegelung mit Verkürzung $u = -1 \Rightarrow$ <u>Punktspiegelung</u> am Ursprung $\Rightarrow$ Spiegelung mit Streckung
Drehung		Die Drehmatrix hat die Form: $M_z = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 2. Spaltenvektoren sind orthogonal. 3. Spaltenvektoren sind orthogonal. 4. Drehwinkel $\cos \alpha = \frac{1}{2}(\text{Spur } A - 1) = \frac{a_{11} + a_{22} + a_{33} - 1}{2}$ 5. Zin: Information: Determinante gilt

Die Ergebnisse der Berechnung der Fixpunktmenge, des Kerns und der Bildmenge liefern für jede Abbildung charakteristische Ergebnisse.

Abbil- dungsart	Fixpunktmenge $A\vec{x} = \vec{x}$	Kern $A\vec{x} = \vec{0}$	Bildmenge $A\vec{x} = \vec{x}'$
Definitionen	Die Fixpunktmenge liefert alle Punkte, die bei der Abbildung auf sich selbst abgebildet werden.	Der Kern liefert das Ergebnis die Menge aller Punkte, die auf den Ursprung abgebildet werden.	Die Bildmenge ist nur bestimmbar, wenn der Ort der abgebildeten Punkte auf einer Geraden oder einer Ebene liegt.
Ergebnisse bei der Projektion	Projektionsebene <u>Erläuterung:</u> Bei der Projektion ist das Ergebnis im $\mathbb{R}^3$ die Ebene, auf welche die Punkte im Raum projiziert werden. Die Punkte auf der Projektionsebene werden auf sich selbst abgebildet und bilden daher die Fixpunktmenge.	Projektionsgeraden Ursprung <u>Erläuterung:</u> Alle Punkte, die zur Projektionsgeraden durch den Ursprung liegen, werden auf den Ursprung abgebildet.	Projektionsebene <u>Erläuterung:</u> Das Ergebnis ist identisch mit der Fixpunktmenge, da die Menge aller Bildpunkte auf der Projektionsebene liegen. Der Ansatz $A\vec{x} = \vec{x}'$ führt auf ein LGS, bei dem durch entsprechende Addition auf der linken Seite 0 entstehen muss. Auf der rechten Seite ergibt sich dann die Gleichung der Projektionsebene.
Ergebnisse bei der Spiegelung	Spiegelebene <u>Erläuterung:</u> Alle Punkte auf der Spiegelebene werden auf sich selbst abgebildet und gehören damit zur Fixpunktmenge.	Ursprung O(0/0/0) <u>Erläuterung:</u> Alle Punkte außerhalb von E werden auf einen individuellen Punkt außerhalb von E abgebildet. Die Punkte auf E sind Fixpunkte. Nur der Ursprung wird nur der Ursprung auf den Ursprung abgebildet.	existiert nicht <u>Erläuterung:</u> Jeder Punkt, außer den Fixpunkten auf der Spiegelebene, hat einen individuellen Bildpunkt. Damit kann man keine Ebene oder Gerade als Bildmenge bestimmen. Bei der Rechnung lässt sich die linke Seite des LGS nicht auf Null bringen.
Ergebnisse bei der zentrischen Streckung	Ursprung O(0/0/0) <u>Erläuterung:</u> Nur der Ursprung wird auf den Ursprung abgebildet.	Ursprung O(0/0/0) <u>Erläuterung:</u> Nur der Ursprung wird auf den Ursprung abgebildet.	existiert nicht <u>Erläuterung:</u> Jeder Punkt hat einen individuellen Bildpunkt.
Ergebnisse bei der Drehung	Drehachse <u>Erläuterung:</u> Alle Punkte auf der Drehachse sind Fixpunkte.	Ursprung O(0/0/0) <u>Erläuterung:</u> Nur der Ursprung wird auf den Ursprung abgebildet.	existiert nicht <u>Erläuterung:</u> Jeder Punkt hat einen individuellen Bildpunkt.

**Umschlag
Rückseite
(Innen)**

(unbedruckt)

Hier können Sie noch Vorlagen einfügen

VORSCHAU

LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

