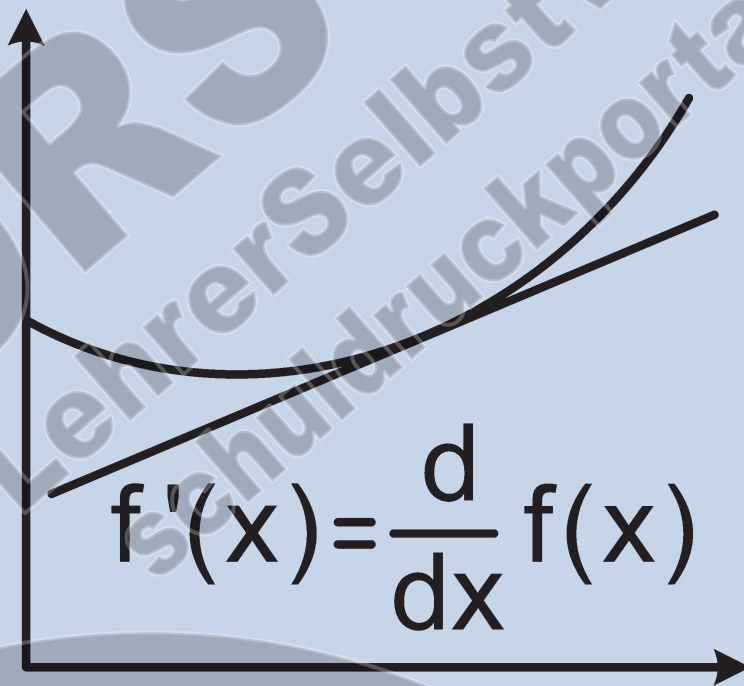


Differenzialrechnung

selbstorganisiert erlernen



Ursula Pirkel

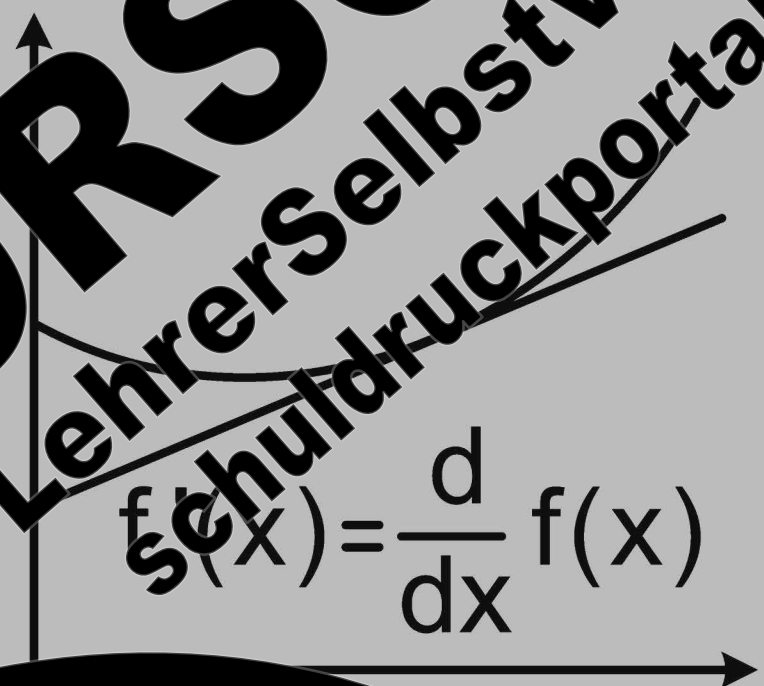
Umschlag Vorderseite (Innen) (unbedruckt)

Hier können Sie noch Vorlagen einfügen

Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Differenzialrechnung und
selbstorganisiertes Lernen

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de


$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)$$

Kapitel

Grenzwertbetrachtung

Kapitel 1: Grenzwertbetrachtungen	11
Kapitel 2: Einführung in die Differenzialrechnung	43
Kapitel 3: Grundlegende Anwendung der Differenzialrechnung	63
Kapitel 4: Anwendung der Differenzialrechnung – Verlauf von Funktionsgraphen	71
Kapitel 5: Rekonstruktion von ganzrationalen Funktionen	101
Kapitel 6: Extremwertaufgaben	121
Kapitel 7: Produkt- Quotienten- und Kettenregel	135
Kapitel 8: Ableitung von Exponentialfunktionen	157
Kapitel 9: Ableitung der Logarithmusfunktion	165

Oberstudienrätin Ursula F. H.

Differenzialrechnung

selbstorganisiert erlernen

Mathematik

Bestellnummer 02-036-288



Kapitel 3:
Grundlegende Anwendung der Differenzialrechnung 63

Aufgabe 3.1
Grundlegende Aufgabentypen 63

Aufgabe 3.2
Beispiel zu den grundlegenden Aufgabentypen der Differenzialrechnung 64

Aufgabe 3.3
Ermitteln der Tangente / Normale in einem bestimmten Punkt einer Funktion 70

Kapitel 4:
Anwendung der Differenzialrechnung
Verlauf von Funktionsgraphen 71

Aufgabe 4.1
Grundlegende Begriffe zum Verlauf von Funktionen 71

Aufgabe 4.2
Die Wendungen 76

Aufgabe 4.3
Die Bedeutung der zweiten Ableitung als hinreichendes Kriterium für das Vorliegen von Hoch- und Tiefpunkten 78

Aufgabe 4.4
Zusammenfassung und Erweiterung bisheriger Kenntnisse zur Bedeutung der Ableitung 81

Aufgabe 4.5
Erweiterung der Betrachtungen auf Funktionen mit Sattelpunkten und „topfförmige“ Extremwerten“ 82

Aufgabe 4.6
Graphisches Differenzieren 94

Kapitel 5:
Rekonstruktion von ganzrationalen Funktionen 101

Aufgabe 5.1
Herleitung einer allgemeinen Funktionsgleichung 101

Aufgabe 5.2
Modellierung eines funktionalen Zusammenhangs 106

Aufgabe 5.3
Bestimmung des Funktionsterms einer ganzrationalen Funktion ohne Anwendung 109

Kapitel 6:
Extremwertaufgaben 121

Aufgabe 6.1
Grundlegendes zur Bearbeitung von Extremwertaufgaben 121

Aufgabe 6.2
Prinzipielle Vorgehensweise bei Extremwertaufgaben 124

Aufgabe 6.3
Problemstellungen 131

Kapitel 7:
Produkt- Quotienten- und Kettenregel 135

Aufgabe 7.1
Die Produktregel bei der Differenzialrechnung 135

Aufgabe 7.2
Empirische Herleitung der Kettenregel bei der Differenzialrechnung 139

Aufgabe 7.3
Quotientenregel 145

Aufgabe 7.4
Komposition mehrerer Ableitungsregeln 148

Kapitel 8:
Ableitung von Exponentialfunktionen 157

Aufgabe 8.1
Ermittlung der Ableitung von $f(x) = e^x$ mit Hilfe der Steigung von Tangenten 157

Aufgabe 8.2
Anwendung der Ableitungsregeln auf Exponentialfunktionen 159

Aufgabe 8.3
Anwendung der Ableitungsregeln auf Logarithmusfunktionen 163

Aufgabe 8.4
Bestimmen einer beliebigen Exponentialfunktion zur Basis a 164

Kapitel 9:
Ableitung von Logarithmusfunktionen 165

Aufgabe 9.1
Ermittlung der Ableitung von $f(x) = \ln(x)$ mit Hilfe der Steigung von Tangenten 165

Aufgabe 9.2
Anwendung der Ableitungsregeln bei In-Funktionen 167

Vorwort

Neben dem umfangreichen Angebot an Literatur zum Thema Einführung in die Differenzialrechnung kommt diesem Arbeitsbuch wohl ein besonderer Stellenwert zu, da die im Detail doch komplexen Zusammenhänge der Thematik auf der Basis selbstorganisierter Lernformen sehr kleinschrittig und nachvollziehbar erarbeitet werden können. Die Unterlagen sind dabei so konzipiert, dass die Lernenden bei ganz kleinen Lernfortschritten während der Bearbeitung der Aufgabenstellung bereits Erfolgserlebnisse haben, durch Bestätigung, etwas verstanden zu haben, auch das Selbstvertrauen. In meiner eigenen Unterrichtsan der Oberstufe von 1970 bis 1972 in Schleswig-Holstein beobachte ich dies vor allem bei Lernenden mit Zugangsproblemen zur Thematik, dass durch Erfolgserlebnisse die Motivation steigt, weiter zu arbeiten und Bestätigung entsteht, durch weitere Bestätigung zu erhalten. Mathematische Zusammenhänge begreifen zu können, erfüllt die Lernenden nicht selten eine neue Erfahrung und die Art „Aha-Erkenntnis“. Häufig äußern Lernende mit einer negativen Einstellung zur Mathematik ihre Haltung und begegnen dem ursprünglich angeliiebten Fach mit einer neuen positiveren Grundhaltung.

Um dem Ziel gerecht zu werden, für alle Lernenden den Zugang zur Differenzialrechnung so weit wie möglich zu vereinfachen, wird auch in diesem Band die Auswahl der Aufgabenstellungen auf unbedingt notwendige Aufgabenstellungen beschränkt. Erarbeitung der Aufgabenstellungen wird durch die Erläuterung von mathematischen Umformungen. Dieser methodisch-didaktische Ansatz verlangt Textelemente sinngemäß zu lesen und die Themen bis ins Detail zu durchdenken. Daher werden neben dem Erwerb von neuen mathematischen Kompetenzen auch sprachliche Kompetenzen im mathematischen Arbeitskompetenzbereich meines Lesekompetenzbereichs im Unterricht zu erfüllen der Bücher. In diesem Band entsteht, etwa wenn in Bezug hergestellt wird, das verstanden ist und wo man nachschlagen kann, in diesen Bezug scheinen sich weitere Kompetenzen, auf denen ein mögliches Ziel zum Mathematik überwunden werden

Kommunikationselemente:

„Man arbeitet das Buch durch und merkt dabei, dass man die Zusammenhänge erkennt und am Schluss einen richtigen Überblick hat. Das ist wohl der Schlechteste Weg in die Mathematik.“

Zielgruppe

Da diese Materialien nicht nur an gymnasialen Oberstufe eingesetzt werden können, sondern an allen anderen Schulformen, die zu einem Hochschulabschluss führen, wie Fachoberschulen und Fachschulen für Technik, wird zunehmend erkennbar. Zudem zeigen erste Erfahrungen an der Fachschule Darmstadt, dass sich die Arbeitsbücher dieser Reihe hervorragend auch in der Studiengangsphase bei der Kompensation von schulischen Mathematikdefiziten im Rahmen von Vor-, Stütz- und Brückenkursen integrieren lassen. Da die Buchreihe im Band „Grundlegendes zu Algebra und Funktionen“ mit der Kompensation von Mittelstufenunterricht beginnt, ist sie vor allem für Studierwillige geeignet, deren Schulzeit lange zurückliegt bzw. bei denen Kenntnisse zur Oberstufenmathematik fehlen. Das trifft beispielsweise auf Meister zu, die eine berufsqualifizierende Hochschulzugangsberechtigung haben.

Methodische und didaktische Hinweise zur Nutzung der Arbeitsbücher

Die Bände der Buchreihe sind inhaltlich gestimmt, dass für die Lernenden ein zusammenhängendes und vernetztes Wissen entsteht und dazu befähigt, zunehmend komplexere Aufgabenstellungen zu bewältigen. Es ist eine Voraussetzung, die drei Arbeitsbücher „Grundlegendes zu Algebra und Funktionen“, „Differenzialrechnung“ und „Integralrechnung“ jeweils vollständig durchgearbeitet, andererseits lässt die Struktur dieser drei Arbeitsbücher zu, dass ein Kapitel auch in anderen Reihenfolgen abgefragt werden können. Eine mögliche Abfolge vor allem für den Einsatz in der Schule im Leistungskurs oder für Studienanfänger mit Vorkenntnissen hinsichtlich der Oberstufenmathematik sieht folgendermaßen aus:



Weitere Vorschläge für die Aufarbeitung der Kapitel finden sich im Anhang. Die Adresse des **Lehrerselbstverlags** ist auch die Möglichkeit, die gewünschten Kapiteln zu bestellen. Das Arbeitsbuch ist individuell zu gestalten, optional dort eigenständig einzubinden.

Die Basis für das Verständnis infinitesimaler Funktionen zu erhalten, werden in Kapitel 15 des ersten Bandes „Differenzialrechnung“

grundlegende Zusammenhänge hinsichtlich der Bedeutung und des Umgangs mit Grenzwerten bei Folgen erarbeitet. Die gewonnenen Erkenntnisse werden anschließend auf das Verhalten von Funktionen übertragen, damit man das bereits im Band „Grundlagen der Algebra und Funktionen“ erarbeitete Material knüpfen und die Untersuchung von ganzrationalen Funktionen hinsichtlich ihres Verhaltens erweitert werden. In der zweiten Hälfte des Bandes werden Kenntnisse über die Verläufe von ganzrationalen Funktionen vertieft. In der Regel kommen hier Fragen der Lernenden auf, wie man bei den Graphen von Funktionen die exakte Lage der Hoch- und Tiefpunkte ermitteln kann. Es wird dieser Stelle erkannt, dass neue mathematische Methoden notwendig werden. Diese Erkenntnis kann für die Überleitung zur Differenzialrechnung genutzt werden.

Kapitel 2

In diesem Kapitel werden zunächst an einem einschichtigen Wachstumsproblem von Pflanzen grundlegende Zusammenhänge hinsichtlich der Bedeutung der Steigung einer Kurve sowie der Steigung der Tangente im Berührungspunkt mit der Kurve erarbeitet. Es wird bereits an dieser Stelle gefestigt, dass die Steigung der Kurve und ihrer Tangente im Berührungspunkt identisch ist und ein Maß für das Wachstum darstellt. Über die Steigungen von Tangenten bei der Normalparabel erfolgt anschließend der übliche Übergang zum Differenzialquotienten, die Einführung des Ableitungsbegriffs und die Formulierung von Ableitungsregeln.

Kapitel 3

Betrachtungen in diesem Kapitel beziehen sich auf rein formale Aufgaben bezüglich der Zusammenhänge zwischen der Steigung von Tangenten sowie der Ermittlung der Tangente und Wendetangente bzw. Normalen.

Kapitel 4

Hier wird das Wachstumsproblem aus Kapitel 2 wieder aufgegriffen, um die Zusammenhänge zwischen der Steigung einer Funktion und Wachstumsprozessen qualitativ und anschaulich untersuchen zu können. Es erfolgt nun die quantitative Betrachtung mit dem Einsatz der neu erlernten Mittel der Differenzialrechnung. Dies führt auf die rechnerische Bestimmung von Hoch-, Tief- und Wendepunkten sowie die Bestimmung der Tangente- und Sattelpunkte anhand der notwendigen und hinreichenden Bedingungen. Der abschließende Teil des Kapitels zeigt das Beispiel auf, wie die Wachstumsprozesse durch die Differenzialrechnung

alrechnung neben dem rein rechnerischen Kalkül bei der Untersuchung von Kurven ein zentraler Gegenstand bleibt und dann auch auf andere Anwendungsprozesse problemlos übertragen werden kann.

Kapitel 5 und 6

Im Anschluss an die Untersuchung von Kurven in Kapitel 5 erfolgt die Behandlung von Aufgabenstellungen zur Rekonstruktion von Funktionen. Hier wird ebenfalls ein Schwerpunkt auf anwendungsbezogene Aufgabenstellungen bzw. Modellierungsprozesse, gelegt. Für die Ermittlung der Koeffizienten werden hier Möglichkeiten gegeben, das Lösen von linearen Gleichungssystemen zu umgehen. Dies ist insbesondere dann sinnvoll, wenn den Lernenden Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme mit zwei und mehr Variablen nicht bekannt sind.

Da man bei Extremwertproblemen die Modellierung von Funktionen vornehmen kann, bietet es sich an, diesen Problemtyp mit nach dem Schema der Rekonstruktion zu behandeln.

Kapitel 7

Die Ermittlung der Differenzialrechnung auf Produkt-, Quotienten- und Kettenregel bezieht sich in diesem Kapitel ausschließlich auf Potenzfunktionen.

tionen und einfache trigonometrische Funktionen und kann daher direkt im Anschluss an Kapitel 4, 5 bzw. 6, aber auch erst nach Einführung der Integralrechnung bearbeitet werden.

Kapitel 8 und 9

Voraussetzung für die Bearbeitung dieses Kapitels ist die Kenntnis der Zusammenhänge zwischen einer Funktion und ihrer Umkehrfunktion, sowie die bereits im ersten Band erarbeiteten Kenntnisse hinsichtlich des Umgangs mit den Exponential- und Logarithmusfunktionen, worin im Arbeitsbuch „Grundlagen der Algebra und Funktionen“ zielgerichtet eingegangen wird. Die Ableitungsregeln bei der Ableitung von Exponential- und Logarithmusfunktionen werden rein analytisch und anschaulich auf empirischen Weg gewonnen und anschließend jeweils exemplarisch an einigen charakteristischen Beispielen veranschaulicht.

Dank

Für Anregungen zur inhaltlichen und formalen Gestaltung danke ich meinem Mann, Dipl.-Ing. Gerold Pirkl, Professor Dr. Torsten-Karl Stempel von der Hochschule Darmstadt, Frau Dr. Astrid Baumann von der Frankfurt University of Applied Science sowie langjährigen Freunden, wie Oberstudienrätin Renate Benz-Heinbücher und Dipl.-Ing. Rudolf Maier.

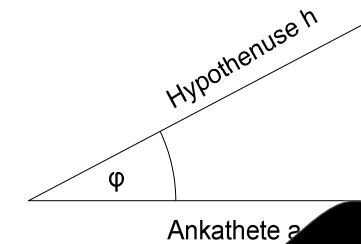
Kapitel 1: Zahlenfolgen und Grenzwertbetrachtungen

Aufgabe 1.1

Einführung des Begriffs Zahlenfolge und Grenzwert

a) Wiederholung der Winkelfunktionen und Anwendung

Ermitteln Sie mit Hilfe einer Formelsammlung oder anderer Unterlagen, welche Beziehungen in einem **rechtwinkligen Dreieck** zwischen dem Winkel φ und den Dreiecksseiten bestehen.



Alle drei Definitionen von Sinus, Cosinus und Tangens:

$$\sin \varphi = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{g}{h}$$

$$\cos \varphi = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{h}$$

$$\tan \varphi = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{g}{a}$$

Die Verhältnisse $\sin \varphi$ und $\cos \varphi$ kann man jeweils nach a und g lösen, indem man die jeweils andere Variable für g bzw. a dabei setzt.

$$\text{aus } \sin \varphi = \frac{g}{h} \text{ folgt } g = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\text{aus } \cos \varphi = \frac{a}{h} \text{ folgt } a = \underline{\hspace{2cm}}$$

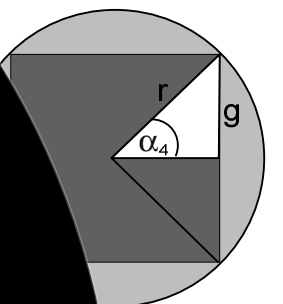
Für die Fläche des oben links gezeichneten Dreiecks gilt: $A = \frac{a \cdot g}{2}$. Erläutern Sie unter Einbeziehung der Überlegungen aus Aufgabenteil 1 b), warum man diese Fläche auch folgendermaßen berechnen kann: $A = \frac{1}{2} \cdot h^2 \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi)$

Fläche eines eingeschriebenen Quadrats

In der Abbildung ist ein Kreis mit dem Radius r und einem eingeschriebenen Quadrat zu sehen. Da es sich bei einem Quadrat um ein Viereck mit $n = 4$ Ecken handelt, soll die Fläche des Quadrats aus dem gleichen Grund wie bei der Berechnung des Kreisumfangs berechnet werden.

(1) Der Winkel α_4 gilt: $\alpha_4 = 45^\circ$.

Erklären Sie dabei, dass der Vollwinkel bei einem Kreis 2π beträgt.

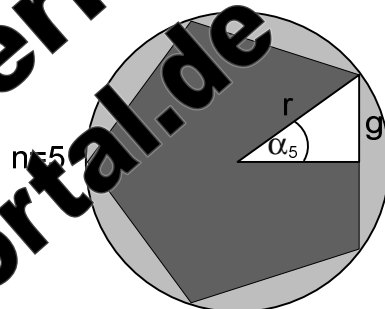


- (2) Begründen Sie, dass man die Fläche des Vierecks, in Abhängigkeit eines beliebigen Radius r , mit folgender Formel berechnen kann:

$$A_4 = 8 \cdot \frac{r^2 \cdot \sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ}{2} = 2r^2$$

c) Fläche eines einbeschriebenen regelmäßigen Fünfecks

In der Abbildung ist nun ein Kreis mit dem Radius r und einem einbeschriebenen **regelmäßigen Fünfeck** gegeben. Das Polygon mit 5 Ecken vorliegt, und die Seite mit s und der markierte Winkel mit α_5 bezeichnet.



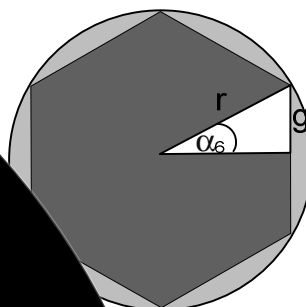
- (1) Begründen Sie, warum für den Winkel α_5 gilt: $\alpha_5 = 72^\circ$

- (2) Begründen Sie, dass man die Fläche des Fünfecks mit folgender Formel berechnen kann, und berechnen Sie die Fläche entsprechend zur Fläche A_4 in Abhängigkeit von r .

$$A_5 = 10 \cdot \frac{r^2 \cdot \sin 36^\circ \cdot \cos 36^\circ}{2} =$$

d) Fläche eines einbeschriebenen regelmäßigen Sechsecks

In der Abbildung ist nun ein Kreis mit dem Radius r und einem einbeschriebenen **regelmäßigen Sechseck** gegeben. Das Polygon mit $n = 6$ Ecken wird die Fläche nun mit A_6 bezeichnet, und der Winkel mit α_6 bezeichnet.



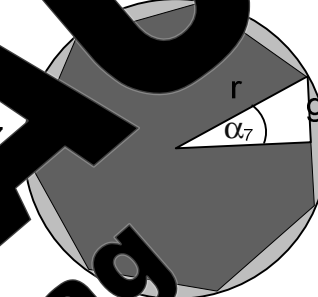
- (1) Berechnen Sie den Winkel α_6 : $\alpha_6 =$

- (2) Geben Sie die Formel an, mit der man die Fläche analog zum Vier- und Fünfeck berechnen kann, und ermitteln Sie die Fläche A_6 in Abhängigkeit von r auf zwei Dezimalstellen genau.

$$A_6 = 6 \cdot \frac{r^2 \cdot \sin 60^\circ \cdot \cos 60^\circ}{2} =$$

e) Fläche eines einbeschriebenen regelmäßigen Siebenecks

In der Abbildung ist ein Kreis mit dem Radius r und einem einbeschriebenen **regelmäßigen Siebeneck** gegeben. Die Fläche in diesem Polygon mit $n = 7$ Ecken wird hier mit A_7 und der markierte Winkel mit α_7 bezeichnet.



- (1) Berechnen Sie den Winkel α_7 : $\alpha_7 =$

- (2) Geben Sie die Formel an, mit der man die Fläche A_7 zum Vier-, Fünf- und Sechseck berechnen kann, und ermitteln Sie die Fläche A_7 in Abhängigkeit von r auf zwei Dezimalstellen genau.

$$A_7 =$$

f) Fläche eines einbeschriebenen regelmäßigen 100-Ecks

Berechnen Sie die Fläche eines einbeschriebenen regelmäßigen 100-Ecks mit $n = 100$ Ecken entsprechend zur Aufgabe 2 bis 5 den Winkel α_{100} und die Fläche A_{100} in Abhängigkeit von r auf zwei Dezimalstellen genau.

$$\alpha_{100} =$$

Begründen Sie, warum man dieses Vieleck, wie in den Aufgaben oben, nicht mehr graphisch darstellen kann.

g) Fläche eines einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks mit großen Werten für n

- (1) Berechnen Sie den Winkel α_n und die Fläche A_n für $n = 360$ Ecken entsprechend zur Aufgabe 2 bis 5 den Winkel α_{360} und die Fläche A_{360} in Abhängigkeit von r auf zwei Dezimalstellen genau.

$$\alpha_{360} =$$

- (2) Die Anzahl der Ecken des in den Kreis einbeschriebenen Vielecks wird erhöht werden. Wählen Sie dazu selbst einen großen Wert für n aus und berechnen Sie α_n und A_n .

$$\alpha_n =$$

- (3) Vergleichen Sie die berechneten Werte α_n und A_n , und formulieren Sie eine Vermutung, wie sich diese beiden Werte immer mehr annähern, wenn n größer wird.

Der Wert für α nähert sich dem Winkel _____, der Wert für A nähert sich _____.

(8) Tragen Sie Ihre oben berechneten Ergebnisse für $n = 4$ bis $n = 360$ und das Ergebnis, das den selbst gewählten großen Wert von n in der Tabelle unten in den Zeilen 1 bis 7 ein.

h) Zusammenfassung der bisherigen Ergebnisse und Verallgemeinerung

Im Aufgabenteil g) haben Sie festgestellt, dass bei einer sehr großen Anzahl n der Winkel α fast den Wert 0 erreicht und sich die Fläche der Vielecke auf 6 Dm² stellt, gerundet dem Wert $3,14159 r^2$, also dem Wert πr^2 und damit der Fläche des Kreises mit dem Radius r annähert. In Zeile 8 der Tabelle unten sehen Sie die Schreibweise, wie man diese Annäherung für sehr große Werte von n in der Mathematik darstellt.

- Das immer "Größerwerden" von n wird auch die Schreibweise n (sprich: *n gegen unendlich*) ausgedrückt.
- Mit dem Ausdruck „ $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$ “ (sprich: *Limes n gegen unendlich von alpha n ist gleich*) gibt man den Wert an, dem α_n für immer größeren Werten von n annähert.
- Mit dem Ausdruck „ $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ “ (sprich: *Limes n gegen unendlich von A n ist gleich*) gibt man den Wert an, dem sich die Fläche A der Vielecke annähert.

Da der Winkel nie kleiner als 0° werden kann und die Fläche der Vielecke nie größer werden kann als die Fläche πr^2 des Kreises, bezeichnet man solche Werte auch als **Grenzwerte**. Tragen Sie die beiden Grenzwerte für α und A in Zeile 8 der Tabelle ein.

Anzahl der Ecken n		Größe des Winkels α_n	Größe der Fläche A_n
1	$n = 4$	$\alpha_4 =$	$A_4 =$
2	$n = 5$	$\alpha_5 =$	$A_5 =$
3	$n = 6$	$\alpha_6 =$	$A_6 =$
4			$A_7 =$
		.	.
		.	.
		.	.
5	$n = 100$	$\alpha_{100} =$	$A_{100} =$
6	$n = 360$	$\alpha_{360} =$	$=$
7		$\alpha_{\text{---}} =$	$=$
		.	
		.	
		.	
	$n \rightarrow \infty$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n =$	

Informationen zu den Begriffen Zahlenfolge und Grenzwert

Die Werte für die Winkel α_n bilden eine **monoton fallende** bzw. abnehmende Zahlenfolge, da für je zwei Folgeglieder gilt:

$$\alpha_n \geq \alpha_{n+1}$$

Wenn n sehr groß wird und damit gegen ∞ strebt, werden die Folgen einen Wert, der bei α_n nicht unterschritten und bei A_n nicht überschritten werden kann.

In unserem Beispiel ergibt sich für die in den Kreis eingeschriebenen Vielecke:

α_n wird nie kleiner als _____, A_n wird nie größer als _____

Man nennt diese Werte, die nicht unterschritten bzw. überschritten werden, die **Grenzwerte** der Folgen.

Man sagt, die Folge **konvergiert** gegen einen **Grenzwert**.

Aufgabe

Gegeben ist die Zahlenfolge $a_n = \frac{1}{(-5)^n}$. Durch Einsetzen von natürlichen Zahlen für n kann man die Folgeglieder berechnen. Berechnen Sie, wie im Beispiel, die angegebenen Folgeglieder. Geben Sie, falls existiert, den Grenzwert an:

Beispiel:

$$a_1 = \frac{1}{(-5)^1} = -0,2 \quad (\text{für } n \text{ wird } 1 \text{ eingesetzt})$$

$$a_2 = \frac{1}{(-5)^2} = \frac{1}{25} = 0,04 \quad (\text{für } n \text{ wird } 2 \text{ eingesetzt})$$

$$a_3 = \frac{1}{(-5)^3} = -\frac{1}{125} \quad (\text{für } n \text{ wird } 3 \text{ eingesetzt})$$

$$a_5 =$$

$$a_6 =$$

$$a_{100} =$$

$$\text{Grenzwert: } g = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n =$$

Zusatzinformation:

Bei wechselnden Vorzeichen ist eine Folge weder monoton steigend noch fallend. In diesem Fall spricht man von **oszillierenden** Folgen.

Aufgabe 1.3

Im Rahmen dieser Aufgabe sollen anhand von Beispielen für Zahlenfolgen weitere grundlegende Begriffe und Zusammenhänge hinsichtlich des Grenzwertbegriffs erarbeitet werden.

Sie finden dazu auf den folgenden Seiten Tabellen mit vorgegebenen Zahlenreihen. Füllen Sie diese Tabellen aus, indem Sie wie bei Aufgabe 1.2 zunächst jeweils die Folgen a_n, b_n, c_n etc. für die angegebenen Werte von n mit Hilfe des Taschenrechners auf zwei Dezimalstellen gerundet berechnen.

Bearbeiten Sie anschließend unter Verwendung der folgenden Informationen die weiteren Aufgabenstellungen und vervollständigen Sie am Ende das Merkblatt.

Information konvergente und divergente Folgen

1. Monoton steigende oder fallende Folgen, die einen Grenzwert g haben, nennt man **konvergente Folgen**. Man schreibt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$$

2. Monoton steigende oder fallende Folgen, die keinen Grenzwert haben, also gegen unendlich streben, nennt man **divergente Folgen**. Man schreibt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

Wenn eine Folge gegen ∞ strebt, verwendet man anstatt eines Gleichheitszeichens = einen Pfeil $\rightarrow$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$$

($\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ gegen unendlich oder gegen minus unendlich bzw. geht gegen minus unendlich.)

3. Folgen, die den Grenzwert Null haben, sind immer konvergent und werden als **Nullfolgen** bezeichnet.

4. Da eine Folge nur einen Grenzwert haben kann, sind alternierende Folgen nur konvergent, wenn es sich um Nullfolgen handelt, d.h. wenn der Grenzwert $g = 0$ haben.

Tabelle 1

a) Berechnen Sie die Folgeglieder der Zahlenfolgen a_n, b_n, c_n und d_n für $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10$ und runden Sie auf zwei Dezimalstellen gerundet.

Index n	$a_n = n^2$	$b_n = \sqrt{n}$	$c_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$	$d_n = \frac{1-n^2}{n}$
1	$a_1 =$	$b_1 =$	$c_1 =$	$d_1 =$
2	$a_2 =$	$b_2 =$	$c_2 =$	$d_2 =$
3	$a_3 =$	$b_3 =$	$c_3 =$	$d_3 =$
4	$a_4 =$	$b_4 =$	$c_4 =$	$d_4 =$
5	$a_5 =$	$b_5 =$	$c_5 =$	$d_5 =$
6	$a_6 =$	$b_6 =$	$c_6 =$	$d_6 =$
10	$a_{10} =$	$b_{10} =$	$c_{10} =$	$d_{10} =$
		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

b) Entscheiden Sie, ob die Zahlenfolgen monoton steigend, monoton fallend oder alternierend sind.

Index n	a_n	b_n	c_n	d_n
1				
2				
3				
4				
5				
6				
10				

c) Prüfen Sie ggf. mit dem Taschenrechner, ob die Folge konvergent oder divergent ist, und geben Sie ggf. den Grenzwert an. Beachten Sie bei der Schreibweise, ob Sie ein Gleichheitszeichen oder einen Pfeil verwenden müssen.

Grenzwert g	$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$	$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$	$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$	$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n$
Konvergenz				
Divergenz				

Tabelle 2

a) Berechnen Sie die Folgeglieder der Zahlenfolgen e_n, f_n und g_n			
Index n	$e_n = \frac{1}{n}$	$f_n = \frac{1}{(-2)^n}$	$g_n = \frac{1}{n^2+1}$
1	$e_1 =$	$f_1 =$	$g_1 =$
2	$e_2 =$	$f_2 =$	$g_2 =$
3	$e_3 =$	$f_3 =$	$g_3 =$
4	$e_4 =$	$f_4 =$	$g_4 =$
5	$e_5 =$	$f_5 =$	$g_5 =$
6	$e_6 =$	$f_6 =$	$g_6 =$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
100	$e_{100} =$	$f_{100} =$	$g_{100} =$
b) Entscheiden Sie, ob die Zahlenfolgen monoton steigend, monoton fallend oder alternierend sind.			
Monotonie			
c) Prüfen Sie ggf. mit dem Taschenrechner, ob die Folge konvergent oder divergent ist, und geben Sie ggf. den Grenzwert an. Beachten Sie bei der Schreibweise, ob Sie ein Gleichheitszeichen oder einen Pfeil verwenden müssen.			
Grenzverhalten	$\lim_{n \rightarrow \infty} e_n$	$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$	$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n$
d) Tragen Sie ein, ob die Folge konvergent oder divergent ist.			
Konvergenz			
e) Ergänzen Sie anhand der Untersuchung der Folgen die folgenden Merksätze.			
Merksatz 1	Ist bei einer Folge die Potenz von n im Nenner größer als im Zähler, so ist die Folge Nullfolge und es gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =$ Nullfolge		
Merksatz 2	Ist die Potenz von n im Zähler größer als im Nenner, so ist die Folge divergent. Ist die Folge monoton steigend bzw. fallend, gilt:		
	$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \rightarrow$ bzw. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \rightarrow$		

Tabelle 3

a) Berechnen Sie die Folgeglieder der Zahlenfolgen h_n, o_n und p_n			
Index n	$h_n = \frac{n}{n+1}$	$o_n = \frac{8n}{4n+1}$	$p_n = \frac{2n^2}{5+n^2}(-1)^n$
1	$h_1 =$	$o_1 =$	$p_1 =$
2	$h_2 =$	$o_2 =$	$p_2 =$
3	$h_3 =$	$o_3 =$	$p_3 =$
4	$h_4 =$	$o_4 =$	$p_4 =$
5	$h_5 =$	$o_5 =$	$p_5 =$
6	$h_6 =$	$o_6 =$	$p_6 =$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
100	$h_{100} =$	$o_{100} =$	$p_{100} =$
b) Entscheiden Sie, ob die Zahlenfolgen monoton steigend, monoton fallend oder alternierend sind.			
Monotonie			
c) Prüfen Sie ggf. mit dem Taschenrechner, ob die Folge konvergent oder divergent ist, und geben Sie ggf. den Grenzwert an. Beachten Sie bei der Schreibweise, ob Sie ein Gleichheitszeichen oder einen Pfeil verwenden müssen.			
Grenzverhalten	$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n$	$\lim_{n \rightarrow \infty} o_n$	$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$
d) Tragen Sie ein, ob die Folge konvergent oder divergent ist. Ergänzen Sie anschließend			
Konvergenz			
Merke	Sind die Potenzen von n im Nenner und Zähler gleich, so ist die Folge Nullfolge, wenn sie $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =$		

Übung 1.1

- Geben Sie, ohne den Taschenrechner zu verwenden, in Spalte 2 der Tabelle an:
- ob es sich um eine divergente Folge handelt, die gegen $+\infty$ oder $-\infty$ divergiert.
 - ob es sich um eine konvergente Folge mit einem Grenzwert g handelt, und wenn ja, welchen Grenzwert ggf. mit den Taschenrechner.
 - ob es sich um eine Nullfolge mit dem Grenzwert $g = 0$ handelt.

Folge	Divergenz/Konvergenz	Grenzwert
a) $a_n = \frac{2n}{n^2 + 1}$	☐ divergent ☐ konvergent ☐ Nullfolge	$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$
b) $a_n = \frac{2n^2}{n+1}$	☐ divergent ☐ konvergent ☐ Nullfolge	$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$
c) $a_n = \frac{-2n^3}{n+1}$	☐ divergent ☐ konvergent ☐ Nullfolge	$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$
d) $a_n = \frac{1}{n+1}$	☐ divergent ☐ konvergent ☐ Nullfolge	$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$
e) $a_n = \frac{2n+1}{n}$	☐ divergent ☐ konvergent ☐ Nullfolge	$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$
f) $a_n = \left(\frac{4}{5}\right)^n$	☐ divergent ☐ konvergent ☐ Nullfolge	$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$
g) $a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$	☐ divergent ☐ konvergent ☐ Nullfolge	$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$
h) $a_n = \frac{2}{3^n}$	☐ divergent ☐ konvergent ☐ Nullfolge	$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$
i) $a_n = \frac{1}{n^2}$	☐ divergent ☐ konvergent ☐ Nullfolge	$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

a) $a_n = \frac{2n}{n^2 + 1}$

- ☐ divergent
☐ konvergent
☐ Nullfolge

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

b) $a_n = \frac{2n^2}{n+1}$

- ☐ divergent
☐ konvergent
☐ Nullfolge

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

c) $a_n = \frac{-2n^3}{n+1}$

- ☐ divergent
☐ konvergent
☐ Nullfolge

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

d) $a_n = \frac{1}{n+1}$

- ☐ divergent
☐ konvergent
☐ Nullfolge

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

e) $a_n = \frac{2n+1}{n}$

- ☐ divergent
☐ konvergent
☐ Nullfolge

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

f) $a_n = \left(\frac{4}{5}\right)^n$

- ☐ divergent
☐ konvergent
☐ Nullfolge

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

g) $a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$

- ☐ divergent
☐ konvergent
☐ Nullfolge

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

h) $a_n = \frac{2}{3^n}$

- ☐ divergent
☐ konvergent
☐ Nullfolge

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

i) $a_n = \frac{1}{n^2}$

- ☐ divergent
☐ konvergent
☐ Nullfolge

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

Ergänzende Betrachtungen zur Berechnung von Grenzwerten bei Zahlenfolgen

In den bisherigen Betrachtungen wurde das Grenzverhalten von Folgen für $n \rightarrow \infty$ durch Ausprobieren mit dem Taschenrechner ermittelt. In der folgenden ergänzenden Aufgabe soll festgestellt werden, welche Möglichkeiten es gibt, das Grenzverhalten auch mit rechnerischen Methoden untersuchen. Dies wird insbesondere relevant, wenn man Grenzwertbetrachtungen auf gebrochenen rationalen Funktionen überträgt, und diese Funktionen anhand der Ergebnisse skizziert werden sollen.

Aufgabe 1.4

Berechnung des Grenzwerts von Folgen, die Zähler und Nenner der gebrochenen Exponenten n besitzen.

Beispiel: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n+4}$

Berechnen des Grenzwerts durch Ausklammern der größten Potenz von n .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n+4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{4}{n}} = \frac{2-0}{1+0} = \frac{2}{1} = 2$$

$\frac{1}{n}$ und $\frac{4}{n}$ sind Nullfolgen, d.h. nach der Grenzwertbildung ergibt sich für diese Bruchterme der Wert 0.

Berechnen des Grenzwerts mit Hilfe einer Polynomdivision.

$$(2n-1) : (n+4) = 2 - \frac{9}{n+4}$$

Da bei dieser Polynomdivision ein Rest bleibt, addiert bzw. subtrahiert man den Bruchterm

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n+4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{9}{n+4} \right) = 2 - 0 = 2$$

$\frac{9}{n+4}$ ist eine Nullfolge und nimmt nach der Grenzwertbildung Null an.

Bestimmen Sie den Grenzwert der Folgen h_n und tragen Sie ihn in Tabelle 3. ein (für Rechnung Folgeseite)

Aufgabe 1.5

Berechnung des Grenzwerts bei Folgen, deren die Potenz von n im Zähler größer als Nenner ist.

Beispiel: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2n^2}{n-1}$

Sie wissen bereits, dass diese Folge divergent ist und für n keinen Grenzwert hat, sondern gegen ∞ geht.

Die Kenntnis, dass eine Folge gegen ∞ geht, reicht jedoch oft nicht aus. Man möchte vielmehr wissen, **wie** die Folge große Werte von n wächst. Man zerlegt diesem Zweck den Bruch in Summanden durch Polynomdivision in eine Summe.

Untersuchen des Grenzwerts durch Zerlegung des Bruchterms in eine Summe mit Hilfe einer Polynomdivision.

Für die Polynomdivision muss der Summand mit der höchsten Potenz im Anzähler stehen.

Gebrochenrationaler Anteil der Summe

$$\begin{array}{r} (-2n^2 + 1) : (n - 1) = -2n - 2 - \frac{1}{n-1} \\ \underline{-2n + 2} \\ -1 \end{array}$$

ganzzahliger Anteil der Summe

Der Summand $-\frac{1}{n-1}$ ist eine Nullfolge und fällt daher weg, wenn n sehr groß wird. Ersetzt man bei der Berechnung des Grenzwertes im nächsten Zwischenschritt die Klammer durch einen Pfeil, kann man einen Summanden weglassen, wenn er im Grenzfall den Wert 0 annimmt. Er spielt keine Rolle mehr.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2n^2}{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-2n - 2 - \underbrace{\frac{1}{n-1}}_{\text{Nullfolge}} \right) \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (-2n - 2 - 0) \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (-2n - 2)$$

Die Zahlenfolge $\frac{1-2n^2}{n-1}$ verhält sich für große Werte von x wie die Zahlenfolge $-2n - 2$ und geht gegen $-\infty$.

Ergänzende Info:
In Aufgabe 1.6 werden Sie lernen, dass die Gerade $y = -2n - 2$ bei der Betrachtung von Grenzwerten im Zusammenhang mit der Funktion $f(x) = \frac{1-2x^2}{x-1}$ als **Asymptote** bezeichnet wird.

Das Grenzverhalten der folgenden Zahlenfolge $\frac{2-n^2}{n-1}$ und $\frac{2-n^2}{n-1}$

Aufgabe 1.6

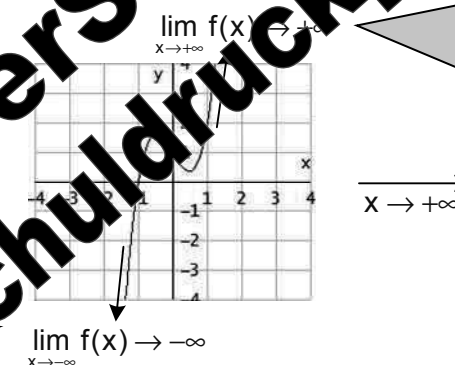
Grenzverhalten ganzrationaler Funktionen

Zur Information

Bisher wurden bei Folgen a_n nur Grenzwerte für ganzzahlige Indizes n von 1 bis ∞ betrachtet. Bezieht man in die Untersuchung von Grenzwerten auch Funktionen $f(x)$ bzw. zeitabhängige Funktionen $f(t)$ ein, so können die Werte von x auch rationale Zahlen sein und auf $-\infty$ (nach links) sowie nach rechts gegen $+\infty$ streben.

Oft ist es in der Praxis wichtig, wie sich Funktionen verhalten, wenn x gegen $+\infty$ oder $-\infty$ strebt. In der Medizin werden dazu beispielsweise Funktionen aufgestellt, die das Wachstum von Bakterien beschreiben und man untersucht, wie sich dieses Wachstum entwickelt, wenn t sehr groß wird, also gegen $+\infty$ strebt. Mathematisch ausgedrückt bedeutet das, dass man das Verhalten einer Funktion für sehr große oder sehr kleine Werte von x untersucht.

Verdeutlichen Sie sich am folgenden Beispiel die Schreibweisen



Die Funktionswerte streben gegen $-\infty$, wenn x immer kleiner wird.
Umgangssprachlich: "Die Funktion geht nach unten".

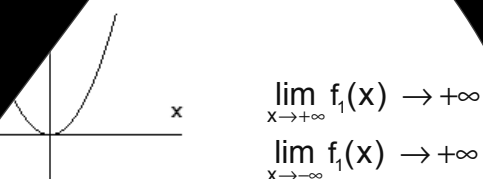
Die Funktionswerte streben gegen $+\infty$, wenn x immer größer wird.
Umgangssprachlich: "Die Funktion geht nach oben".

Aufgabe 1.6.1

Untersuchung des Verhaltens von einfachen ganzrationalen Funktionen für $x \rightarrow +\infty$ und $x \rightarrow -\infty$.

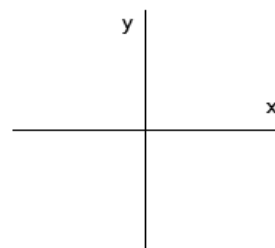
- a) Skizzieren Sie die angegebenen Funktionen. Notieren Sie entsprechend dem Beispiel, wie sich die Funktionen für $x \rightarrow +\infty$ und $x \rightarrow -\infty$ verhalten und ergänzen Sie die Notation.

(1) $f_1(x) = x^2 + 2x + 1$



Für die Aufgaben: _____

(2) $f_2(x) = -x^2$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) \rightarrow \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_2(x) \rightarrow \underline{\hspace{2cm}}$$

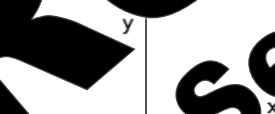
(3) $f_3(x) = x^3$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_3(x) \rightarrow \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_3(x) \rightarrow \underline{\hspace{2cm}}$$

(4) $f_4(x) = x^4$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_4(x) \rightarrow \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_4(x) \rightarrow \underline{\hspace{2cm}}$$

(5) $f_5(x) = x^5$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_5(x) \rightarrow \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_5(x) \rightarrow \underline{\hspace{2cm}}$$

b) Die Funktion $f_6(x) = x^6$ verhält sich für $x \rightarrow \pm\infty$ genauso wie die oben unter (4) gezeichnete Funktion $f_4(x)$.

c) Die Funktion $f_6(x) = -x^5$ verhält sich für $x \rightarrow \pm\infty$ genauso wie die oben unter (2) gezeichnete Funktion $f_2(x)$.

Als eine umgangssprachlich formulierte Merkregel für das Verhalten von ganzrationalen Funktionen an, indem Sie die Sätze der folgenden Seite verwenden, können Sie schreiben:

Für **geradzahlige** Exponenten von x verlaufen beide "Seiten" der Funktion bei positivem Vorzeichen von x nach " " und bei negativem Vorzeichen von x nach " ".

Für **ungeradzahlige** Exponenten und einem positiven Vorzeichen von x verläuft die Funktion von "links " und geht nach "rechts ".

Für **ungeradzahlige** Exponenten und einem negativen Vorzeichen von x verläuft die Funktion von "links " und geht nach "rechts ".

b) Begründen Sie, warum man z.B. bei den Funktionen $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_5(x)$ und $f_6(x)$ anstatt der im Beispiel dargestellten ausführlichen Schreibweise für das Grenzverhalten eine abkürzende "±" Schreibweise in der Form

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) \rightarrow \underline{\hspace{2cm}} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) \rightarrow \underline{\hspace{2cm}}$$

verwenden kann.

Aufgabe 1.6.2

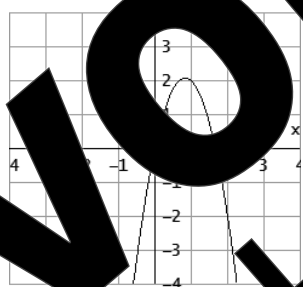
Verhalten von ganzrationalen Funktion mit mehreren Summanden

Wir haben bisher nur einfache ganzrationale Funktionen hinsichtlich ihres Verhaltens für $x \rightarrow +\infty$ und $x \rightarrow -\infty$ untersucht. Meistens besteht der Funktionsterm jedoch aus einem Polynom, in dem mehrere Potenzen von x auftreten. Anhand von Beispielen soll das Grenzverhalten dieser Funktionen nun untersucht werden.

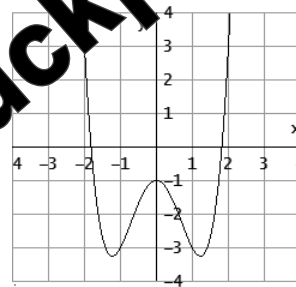
In den Abbildungen unten sind Funktionen $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ und $d(x)$ eingezeichnet. Beim Vergleich mit den Funktionen $f_1(x)$ bis $f_8(x)$ aus Aufgabe 1.6.1 kann man Gemeinsamkeiten hinsichtlich des Grenzverhaltens erkennen. Anhand der folgenden Aufgabenstellung sollen diese Gemeinsamkeiten nun erarbeitet werden.

- Ergänzen Sie bei der Grenzwertberechnung jeweils folgende Angaben, und bestimmen Sie das Grenzverhalten der Funktionen aus dem Verlauf der eingezeichneten Graphen.
- Markieren Sie anschließend in der Funktionstabelle den Summanden einschließlich seines Vorzeichens, der das Verhalten für $x \rightarrow +\infty$ und $x \rightarrow -\infty$ bestimmt, in rot. Markieren Sie alle Summanden, welche einen Einfluss auf das Verhalten der Funktion für $x \rightarrow +\infty$ und $x \rightarrow -\infty$ haben, in grün.

$$a(x) = 5x - 3x^2$$



$$b(x) = x^4 - 3x^2 - 1$$

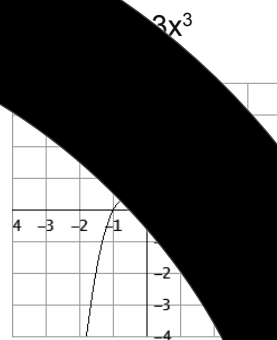
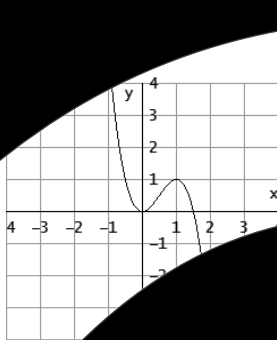


$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (5x - 3x^2) \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (5x - 3x^2) \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} b(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - 3x^2 - 1) \rightarrow \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} b(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 - 3x^2 - 1) \rightarrow \infty$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} c(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - 2x^3) \rightarrow -\infty$$

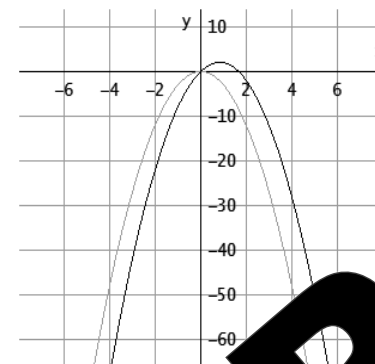
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} c(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^2 - 2x^3) \rightarrow \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} d(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5 - 3x^3) \rightarrow \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} d(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5 - 3x^3) \rightarrow -\infty$$

- In den folgenden Abbildungen sind die Funktionen aus Aufgabenteil b) in einem größeren Ausschnitt des Koordinatensystems erneut eingezeichnet worden. Zusätzlich wurde in jeder Abbildung in grau die Funktion ergänzt, welche das Verhalten der Funktionen für $x \rightarrow \pm\infty$ bestimmt, also der von Ihnen rot markierten Summanden entspricht. Diese Funktionen werden hier jeweils mit $\tilde{a}(x)$ bis $\tilde{d}(x)$ bezeichnet (z.B. $\tilde{a}(x)$ spricht: „a Schlangenfunktion“).

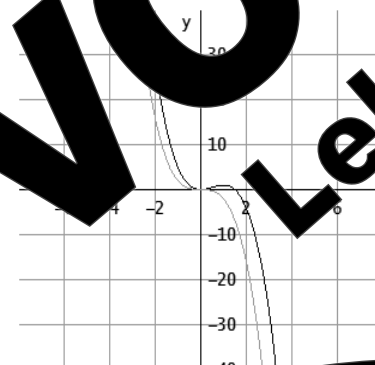
$$a(x) = 5x - 3x^2 \text{ und } \tilde{a}(x) = -3x^2$$



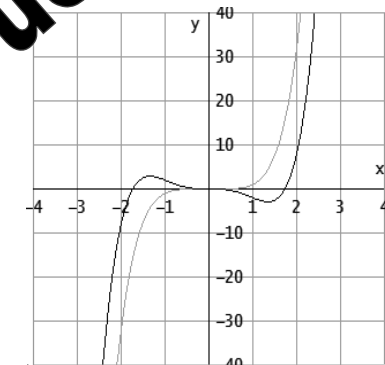
$$b(x) = x^4 - 3x^2 - 1 \text{ und } \tilde{b}(x) = x^4$$



$$c(x) = 3x^2 - 2x^3 \text{ und } \tilde{c}(x) = -2x^3$$



$$d(x) = x^5 - 3x^3 \text{ und } \tilde{d}(x) = x^5$$



- Welche Werte von x kann man deutlich erkennen? Wie verläuft der Verlauf der Asymptote $\tilde{a}(x)$ und der vorhandenen Hoch- und Tiefpunkte von $a(x)$? Wie verläuft der Verlauf der mit Schlangenfunktion $\tilde{c}(x)$ eingezeichneten Funktionen, und wie verläuft der Verlauf der mit Schlangenfunktion $\tilde{d}(x)$ eingezeichneten Funktionen? Wo unterscheiden sie sich? Wenn die Werte von x ... werden, ... auf der beiden Funktionen ... immer ähnlicher.

Man kann in der Mathematik sagen, dass sich die Funktion $b(x)$ an die Funktion $\tilde{b}(x)$ anschmiegt und man $\tilde{b}(x)$ als **Asymptote** von $b(x)$ bezeichnet.

Erläutern Sie die Bedeutung der folgenden Grenzwertberechnung, indem Sie den Merksatz im Kasten vervollständigen.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0) \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} a_n x^n$$

Merke: Bei ganzrationalen Funktionen wird das Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$ durch den höchsten Gradsummanden mit der _____ Potenz von x bestimmt.
Man kann das Verhalten einer ganzrationalen Funktion $f(x)$ im Grenzfalle daher aus dem Verhalten der Funktionen $f(x) = \pm x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ ableiten, indem man nur die Summanden mit der _____ Potenz von x betrachtet.
Die Funktionen $f(x) = \pm x^n$ werden als Asymptoten bezeichnet.

Aufgabe 1.6.3

Bestimmen Sie das Grenzverhalten der folgenden Funktionen wie im Beispiel $r(x)$.

$r(x) = 3x^3 - 1$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} r(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - 3x^2 - 4x^3) \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (-4x^3) \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3) \rightarrow -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} r(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - 3x^2 - 4x^3) \rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x^3) \rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3) \rightarrow +\infty$

Die Funktion $r(x)$ hat das gleiche Grenzverhalten wie $f(x) = -x^3$.

$s(x) = 5x^2 - 2x - 10$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} s(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \dots \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \dots \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \dots \rightarrow \dots$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} s(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \dots \rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \dots \rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \dots \rightarrow \dots$

Die Funktion $s(x)$ hat das gleiche Grenzverhalten wie $f(x) = \dots$.

$t(x) = 5x^3 - 2x^2 - 1$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} t(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \dots \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \dots \rightarrow \dots$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} t(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \dots \rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \dots \rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \dots \rightarrow \dots$

Die Funktion $t(x)$ hat das gleiche Grenzverhalten wie $f(x) = \dots$.

$p(x) = \dots$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \dots \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \dots \rightarrow \dots$

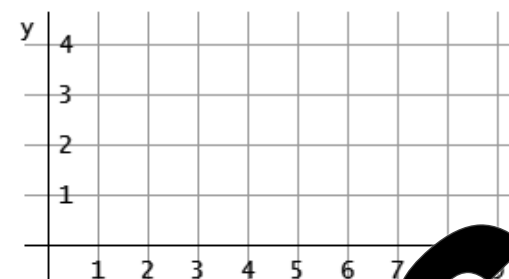
$\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \dots \rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \dots \rightarrow \dots$

Die Funktion $p(x)$ hat das gleiche Grenzverhalten wie $f(x) = \dots$.

Aufgabe 1.7

Grenzverhalten der Wurzelfunktion

Zeichnen Sie die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ mit $x \geq 0$ in folgendes Koordinatensystem und ermitteln Sie das Grenzverhalten für $x \rightarrow \infty$.



Übung 1.3

Skizzieren Sie die Funktionen $f(x) = \sqrt{|x-1|}$ und $f(x) = -\sqrt{|x-1|}$ mit $x \in \mathbb{R}$ jeweils in einem geeigneten Koordinatensystem und ermitteln Sie aus der Zeichnung das Grenzverhalten für $x \rightarrow \pm\infty$.



Aufgabe 1.8

Grenzverhalten und Übersicht über den Verlauf von Exponentialfunktionen

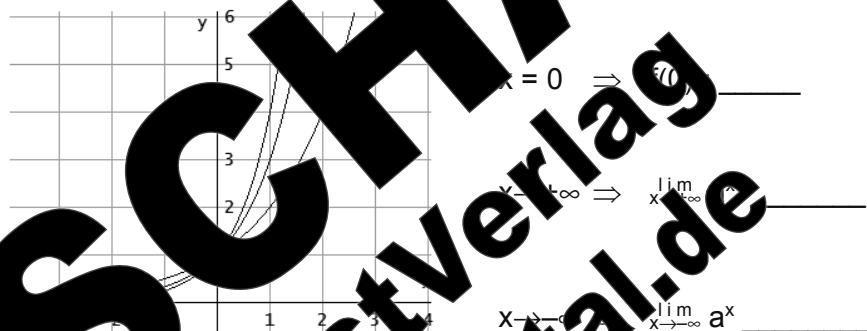
In den folgenden Abbildungen sind Repräsentanten der Funktion $f(x) = a^x$ mit $a > 1$ dargestellt. Beschriften Sie jeweils die dargestellten Funktionsgraphen mit f , g und k . In Sie anhand des Verlaufs der Graphen das Grenzverhalten für $x \rightarrow \pm\infty$.

a) $f(x) = a^x$

Beispiele $g(x) = 2^x$

$h(x) = 3^x$

$k(x) = 4^x$



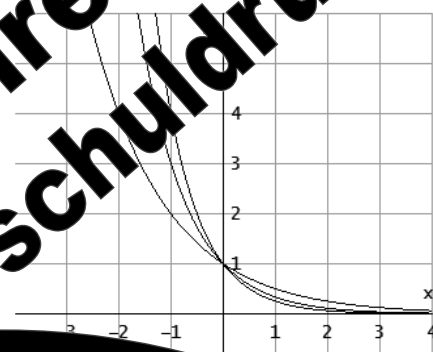
Die Funktion $f(x) = a^x$ liegt sich an der x -Achse in der Weise, dass die x -Achse eine Asymptote ist.

b) $f(x) = a^{-x}$

$g(x) = 2^{-x}$

$h(x) = 3^{-x}$

$k(x) = 4^{-x}$



$x = 0 \Rightarrow f(0) = \underline{\hspace{2cm}}$

$x \rightarrow +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} a^{-x} = \underline{\hspace{2cm}}$

$x \rightarrow -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} a^{-x} = \underline{\hspace{2cm}}$

$x = 0 \Rightarrow f(0) = \underline{\hspace{2cm}}$

$x \rightarrow +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} -a^x = \underline{\hspace{2cm}}$

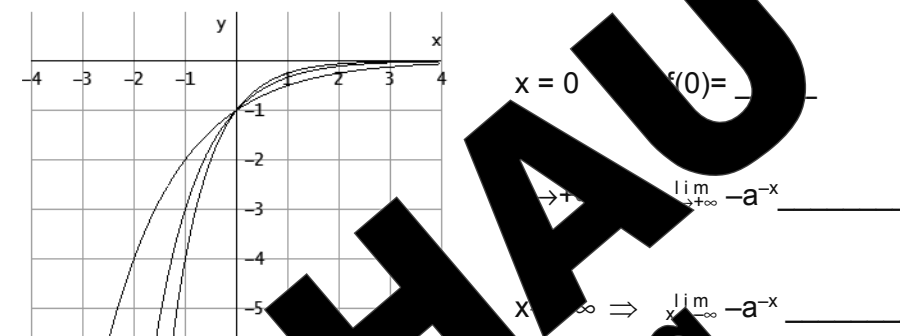
$x \rightarrow -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} -a^x = \underline{\hspace{2cm}}$

d) $f(x) = -a^{-x} = -\frac{1}{a^x}$

Beispiele $u(x) = -2^{-x} = -\frac{1}{2^x}$

$v(x) = -3^{-x} = \underline{\hspace{2cm}}$

$w(x) = -4^{-x} = \underline{\hspace{2cm}}$



$x = 0 \Rightarrow f(0) = \underline{\hspace{2cm}}$

$x \rightarrow +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} -a^{-x} = \underline{\hspace{2cm}}$

$x \rightarrow -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} -a^{-x} = \underline{\hspace{2cm}}$

Aufgabe 1.8.2

Berechnen der Grenzwerte von Exponentialfunktionen

1. Ermitteln Sie anhand der Kenntnisse des Verlaufs von $f(x) = a^{\pm x}$ das Verhalten der Funktionen für $x \rightarrow \pm\infty$. Vereinfachen Sie die gegebenen Ausdrücke in geeigneter Weise.

a) $f(x) = \frac{2^x + 2}{2^x}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

b) $f(x) = e^{x^2}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

c) $f(x) = e^{-x} + 1$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

e) $f(x) = 1 - 2^x$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

g) $f(x) = \frac{3^{2x}}{3^{x+2}}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) =$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$

h) $f(x) = 2^{x+1} - 2^x$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) =$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$

i) $f(x) = 2^{-x} - 2^{1-x}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) =$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$

j) $f(x) = e^{-x} + e^x$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) =$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$

k) $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) =$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$

l) $f(x) = 5^{\frac{1}{x}}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) =$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) =$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$

n) $f(x) = \frac{3^{-x}}{1+2^x}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) =$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$

Aufgabe 1.9

Grenzverhalten bei gebrochen rationalen Funktionen

Information 1.9.1: Gebrochen rationale Funktion

Gebrochen rationale Funktionen sind Funktionen, die sowohl Zähler als auch Nenner ein Polynom besitzen. In den Abbildungen der Tabelle 1 sind einige Beispiele für den Verlauf von einfachen gebrochen rationalen Funktionen gegeben. Die einfachste gebrochen rationale Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ wird auch als **Hyperbel** bezeichnet. Wie man in der Abbildung sehen sieht, ist diese Funktion an der Stelle $x = 0$ nicht definiert, da das Einsetzen von Null in den undefinierten Ausdruck $\frac{1}{0}$ erzeugt.

Information 1.9.2: Unstetigkeitsstellen bei Funktionen

Eine Funktion hat eine **Unstetigkeitsstelle**, wenn es auf dem Graph der Funktion eine Stelle gibt an der man beim Zeichnen der Funktion den Stift absetzen muss, um die Funktion als nicht an einem Stück durchzeichnen kann. Funktionen, die diese Eigenschaft haben, nennt man auch **unstetige Funktionen**. In Tabelle 1 sind Funktionen abgebildet, die an diesen Unstetigkeitsstellen sehr steil nach oben oder nach unten verlaufen. Funktionswerte $f(x)$ haben, die beliebig groß oder klein werden. Damit streben die Funktionswerte dieser Funktionen an einer **Unstetigkeitsstelle** gegen $+\infty$ oder $-\infty$. Man bezeichnet solche Unstetigkeitsstellen auch als **Definitionsrisse** bzw. **Polstellen** oder einfach als **Pol**.

Aufgabe 1.10

Untersuchung des Verhaltens von gebrochen rationalen Funktionen für $x \rightarrow \pm\infty$ und für $x \rightarrow x_0$ an einer Unstetigkeitsstelle x_0 .

- a) Die Abbildung zeigt die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$. Verdeutlichen Sie sich anhand der Abbildung, wie sich die Funktion für $x \rightarrow \pm\infty$ und an der Unstetigkeitsstelle $x = 0$ verhält. Verdeutlichen Sie sich auch, wie man dieses Verhalten mathematisch beschreiben kann.

Linksseitige
Unstetigkeitsstelle

Der Graph schmiegt sich im 3. Quadranten an die y-Achse an. Damit ist die y-Achse eine **senkrechte Asymptote** und die Funktionswerte streben gegen $-\infty$.

Annäherung an die x-Achse
Damit ist die x-Achse eine **waagerechte Asymptote**.

Rechtsseitige Annäherung an die Unstetigkeitsstelle $x = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \rightarrow \infty$
Auch im 1. Quadranten ist die y-Achse **senkrechte Asymptote**. Hier streben die Funktionswerte gegen $+\infty$.

- a) Bestimmen Sie in der ersten Spalte von Tabelle 1 für jede Funktion, wie in den Beispielen 1 und 3 bereits dargestellt wird, den Definitionsbereich. Dabei schließt man die Werte x_0 aus, für welche der Nenner der Funktionsgleichung den Wert 0 annimmt, die Funktion also in der Regel nicht stetig ist. Geben Sie daher auch die Unstetigkeitsstelle an.
- b) Geben Sie wie im Beispiel 1 in der dritten Spalte der Tabelle anhand des Graphen der abgebildeten Funktion das Verhalten der Funktionswerte $f(x)$ für $x \rightarrow \pm \infty$ an. (Hinweis: Nutzen Sie Ihre Kenntnisse über Nullfolgen an.)
- c) Ermitteln Sie wie im Beispiel 1 anhand des gegebenen Funktionsgraphen, wie sich die Funktionswerte $f(x)$ an den Unstetigkeitsstellen verhalten, wenn man sich diesen Stellen x_0 von links und von rechts nähert.

Tabelle 1: Beispiele für einfache gebrochen rationale Funktionen.

Funktion und Unstetigkeitsstelle	Graph der Funktion	Verhalten für $x \rightarrow \pm \infty$	Verhalten an der Unstetigkeitsstelle
1. $f(x) = -\frac{4}{x}$ Unstetigkeit bei $x = 0$ ID = $\mathbb{R} \setminus \{0\}$		$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$	Näherung von rechts an die Stelle $x = 0$: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \rightarrow -\infty$ Näherung von links an die Stelle $x = 0$: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \rightarrow \infty$ senkrechte Asymptote: y-Achse
2. $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ID = $\mathbb{R} \setminus \{0\}$		$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$	Näherung von rechts an die Stelle $x = 0$: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \rightarrow \infty$ Näherung von links an die Stelle $x = 0$: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \rightarrow \infty$ senkrechte Asymptote: y-Achse

Funktion und Unstetigkeitsstelle	Graph der Funktion	Verhalten für $x \rightarrow \pm \infty$	Verhalten an der Unstetigkeitsstelle
3. $f(x) = \frac{1}{x+1}$ Unstetigkeit bei $x = -1$ ID = $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$		$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$	Näherung von rechts an die Stelle $x = -1$: $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \rightarrow \infty$ Näherung von links an die Stelle $x = -1$: $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \rightarrow -\infty$ senkrechte Asymptote: $x = -1$ waagerechte Asymptote: $y = 0$
4. $f(x) = \frac{2}{(x-3)^2}$ Unstetigkeit bei $x = 3$ ID = $\mathbb{R} \setminus \{3\}$		$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$	Näherung von rechts an die Stelle $x = 3$: $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \rightarrow \infty$ Näherung von links an die Stelle $x = 3$: $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \rightarrow \infty$ senkrechte Asymptote: $x = 3$ waagerechte Asymptote: $y = 0$
5. $f(x) = \frac{4-2x}{x}$ Unstetigkeit bei $x = 0$ ID = $\mathbb{R} \setminus \{0\}$		$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -2$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$	Näherung von rechts an die Stelle $x = 0$: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \rightarrow \infty$ Näherung von links an die Stelle $x = 0$: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \rightarrow -\infty$ senkrechte Asymptote: y-Achse waagerechte Asymptote: $y = -2$

Aufgabe 1.9.2

Verallgemeinerungen zur Untersuchung des Verhaltens gebrochen rationaler Funktionen.

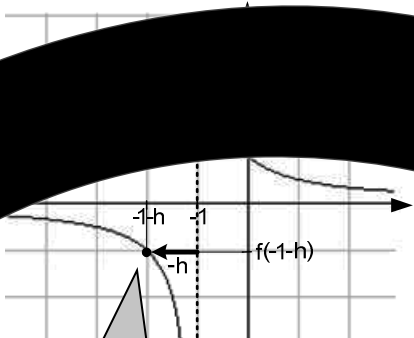
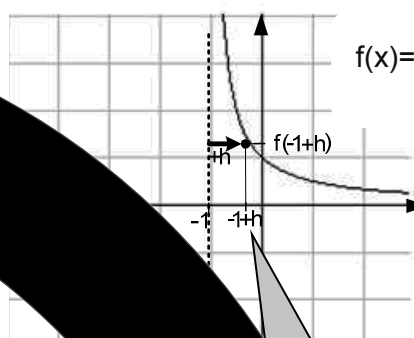
Bei der Untersuchung einer Funktion für $x \rightarrow \pm \infty$ erkennt man aus dem Verhalten $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x)$ auf welcher Seite des Koordinatensystems man das Verhalten der Funktion untersucht und kann das Grenzverhalten der Funktion mit den in Aufgabe 1.1 erlernten Methoden rechnerisch ermitteln.

Untersucht man das Grenzverhalten einer Funktion an einer Unstetigkeitsstelle, ist es möglich, durch die Schreibweise $\lim_{x \rightarrow x_0^+}$ bzw. $\lim_{x \rightarrow x_0^-}$ anzugeben, von welcher Seite man sich der Unstetigkeitsstelle nähert.

Sofern eine Abbildung der Funktion vorliegt, kann man das Verhalten dann, wie in Aufgabe 1.9.1, aus dem Verlauf des Graphen bestimmen. Wenn man jedoch keine Informationen zum Verlauf des Graphen hat und eine Aussage zum Grenzverhalten an einer Unstetigkeitsstelle machen soll, ist es notwendig, auf rechnerische Verfahren zurückzugreifen. Welche Möglichkeiten es dazu gibt, wird in den folgenden Aufgabenstellungen gezeigt.

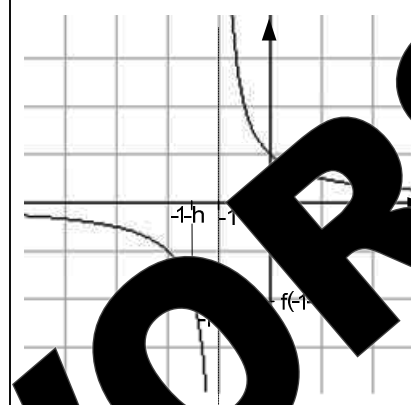
- a) Anhand von Funktion 3: $f(x) = \frac{1}{x+1}$ (siehe Tabelle 2) beispielhaft gezeigt, wie man rechnerisch ausdrücken kann, dass man sich von links und rechts der Unstetigkeitsstelle annähert. Verdeutlichen Sie sich mit Hilfe der gegebenen Abbildungen das Vorgehen für die Annäherung von links und übertragen Sie auf die übrigen Analogie Überlegungen für die Annäherung von rechts, indem Sie die Lücken im Text aus den Abbildungen rechnerisch ergänzen.

Tabelle 2

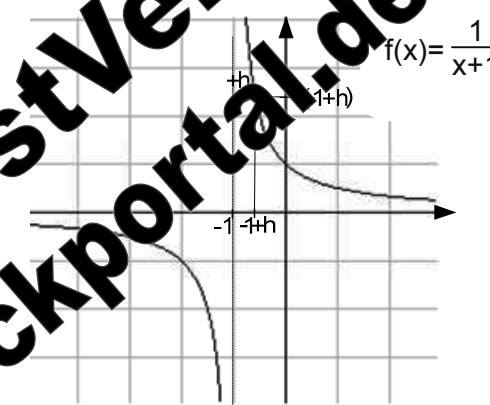
Annäherung von links an die Stelle $x_0 = -1$	Annäherung von rechts an die Stelle $x_0 = -1$
1. Ausgehend von der Unstetigkeitsstelle $x_0 = -1$ geht man um die Strecke h nach links. Dadurch befindet man sich an der Stelle $x = -1 - h$. 	1. Ausgehend von der Unstetigkeitsstelle $x_0 = -1$ geht man um die Strecke h nach rechts. Dadurch befindet man sich an der Stelle $x = -1 + h$. 

Die Stelle $x = -1$ liegt rechts von der Unstetigkeitsstelle.

2. Nun lässt man h immer kleiner werden, also nähert man sich von links wieder an die Unstetigkeitsstelle $x_0 = -1$ an. Die Funktionswerte wandern dabei auf dem Funktionsgraphen nach unten, werden also immer kleiner und streben daher gegen $-\infty$.



2. Nun lässt man h immer kleiner werden, also nähert man sich von rechts wieder an die Unstetigkeitsstelle $x_0 = -1$ an. Die Funktionswerte wandern dabei auf dem Funktionsgraphen nach oben, werden also immer größer und streben daher gegen $+\infty$.



3. Mathematische Formulierung der Annäherung von links
- Ansatz: $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(-1-h)$

Einsetzen in die Funktionsformel:

Setzt man für x nun $(-1-h)$ ein.

Vereinfachen und Grenzwert bestimmen:

Je kleiner der Nenner des Bruchs wird, desto größer wird der Wert des gesamten Bruchs.

Bsp.: $\frac{1}{0,1} = 10$ $\frac{1}{0,01} = 100$ $\frac{1}{0,001} = 1000$

3. Mathematische Formulierung der Annäherung von rechts
- Ansatz: $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(-1+h)$

Einsetzen in die Funktionsformel:

$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{(-1+h)+1}$

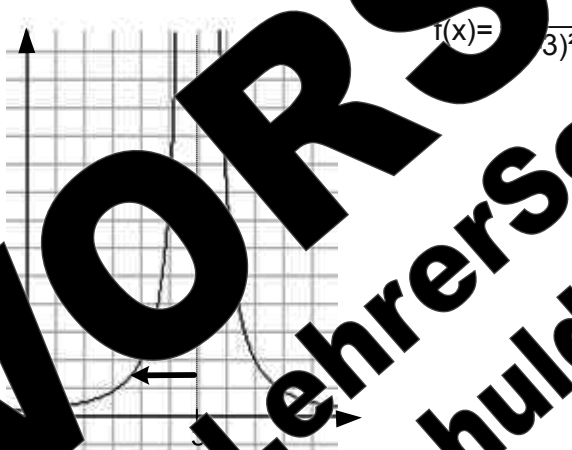
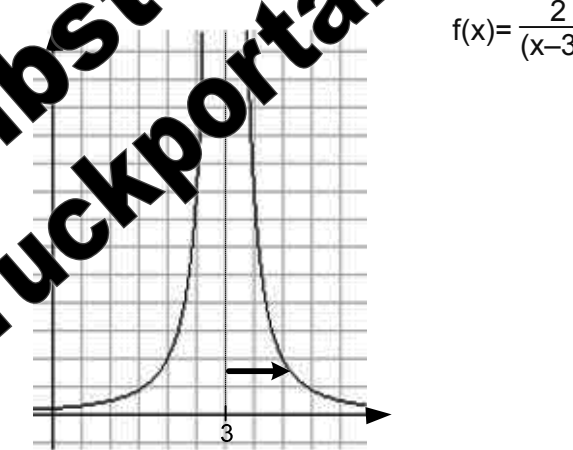
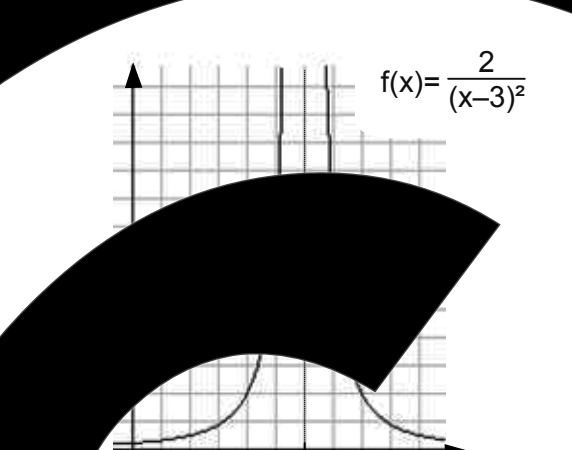
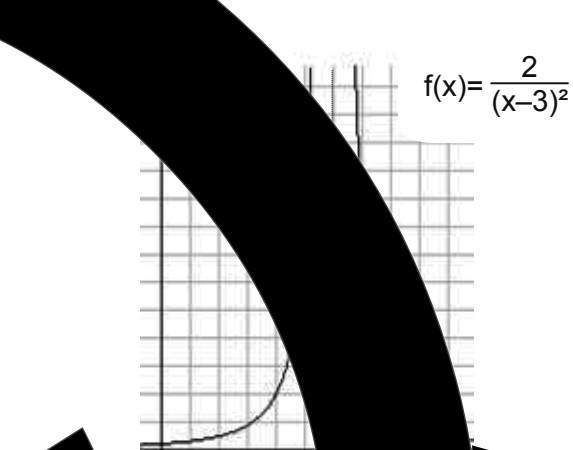
Setzt man für x nun $(-1+h)$ ein.

Vereinfachen und Grenzwert bestimmen:

$\frac{1}{h} \rightarrow \infty$

- b) Führen Sie in Tabelle 3 für die Funktion 4: $f(x) = \frac{2}{(x-3)^2}$ die zur Aufgabenstellung b) angegebenen Untersuchungen durch. Ergänzen Sie dazu in den die graphischen Darstellung der Funktion sowie $f(-h)$ und $f(h)$.

Tabelle 3:

Annäherung von links an die Stelle $x_0 = \underline{\hspace{2cm}}$	Annäherung von rechts an die Stelle $x_0 = \underline{\hspace{2cm}}$
1. Ausgehend von der Unstetigkeitsstelle $x_0 = \underline{\hspace{2cm}}$ geht man um die Strecke $\underline{\hspace{2cm}}$ nach links. Dadurch befindet man sich an der Stelle $x = \underline{\hspace{2cm}}$.  $f(x) = \frac{2}{(x-3)^2}$	1. Ausgehend von der Unstetigkeitsstelle $x_0 = \underline{\hspace{2cm}}$ geht man um die Strecke $\underline{\hspace{2cm}}$ nach rechts. Dadurch befindet man sich an der Stelle $x = \underline{\hspace{2cm}}$.  $f(x) = \frac{2}{(x-3)^2}$
2. Nun lässt man h immer kleiner werden, also nähert man sich von links wieder an die Unstetigkeitsstelle $x_0 = \underline{\hspace{2cm}}$ an. Die Funktionswerte wandern dabei nach $\underline{\hspace{2cm}}$ und werden also immer $\underline{\hspace{2cm}}$.  $f(x) = \frac{2}{(x-3)^2}$	2. Nun lässt man h immer kleiner werden, also nähert man sich von $\underline{\hspace{2cm}}$ wieder an die Unstetigkeitsstelle $x_0 = \underline{\hspace{2cm}}$ an. Die Funktionswerte wandern dabei nach $\underline{\hspace{2cm}}$ und werden also immer $\underline{\hspace{2cm}}$.  $f(x) = \frac{2}{(x-3)^2}$

3. Mathematische Formulierung der Annäherung von links

Ansatz: $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(3-h)$

Einsetzen in die Funktionsgleichung $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{(3-h-3)^2}$

Vereinfachen und Grenzwert bestimmen $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(-h)^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2}$

3. Mathematische Formulierung der Annäherung von rechts

Ansatz: $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(3+h)$

Einsetzen in die Funktionsgleichung $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{(3+h-3)^2}$

Vereinfachen und Grenzwert bestimmen $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2}$

Mathematische Formulierung der Grenzwertberechnung für $x \rightarrow x_0$

Die rechnerische Annäherung von links und rechts an eine Unstetigkeitsstelle durch die h-Methode kann man wie folgt formal darstellen.

Annäherung von links: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 - h)$

Annäherung von rechts: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h)$

Aufgabe 9.3

Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion $f(x) = \frac{1}{1-x}$ für $x \rightarrow \pm\infty$ und an der Unstetigkeitsstelle.



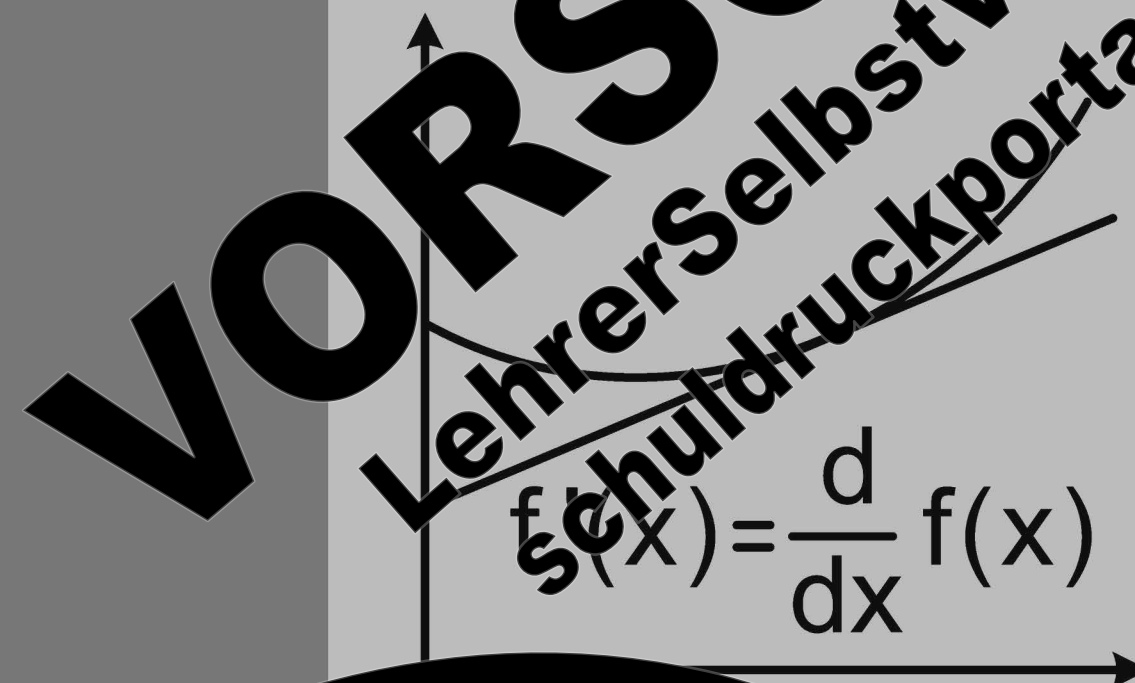
Übungen: _____

Raum für Notizen:



Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Differenzialrechnung selbstorganisiert erlernen



Kapitel 1

Einführung in die
Differenzialrechnung

Kapitel 2: Einführung in die Differenzialrechnung

Grundlegende Betrachtungen

Viele Zusammenhänge in den Natur- und Wirtschaftswissenschaften lassen sich durch Funktionen darstellen. Es ist dabei wichtig, die Funktionswerte, also die Werte zu kennen, aber auch die Information, ob eine Kurve fällt oder steigt und wie stark sie fällt oder steigt, ist von Bedeutung.



Die Untersuchung der Funktionswerte und des Steigungsverhaltens von Kurven und ihren Funktionsgleichungen ist ein zentrales Thema in der Mathematik und Gegenstand der so genannten **Differenzialrechnung**. Anhand einiger Problemstellungen aus dem Bereich Wirtschaft sollen Sie sich nun im ersten Schritt mit einige Zusammenhänge beschäftigen, die für das grundlegende Verständnis der Theorie wichtig sind.

Aufgabe 2.1

Aufgabenstellung

Um den Wachstum beim Anbau von Blaukresse im Gewächshaus zu optimieren, sollen die Pflanzen abhängig vom Wachstumszuwachs bewässert werden. Dies bedeutet, dass man am meisten Wasser zugeben muss, wenn die Pflanzen am stärksten wachsen. Um herauszufinden, zu welchem Zeitpunkt diese Zuwachsraten der Pflanzen am größten ist, wird in einer Versuchsreihe vom Zeitpunkt des Keimens am Tag 0 bis zur Ernte nach dem 10. Tag an jedem Tag die durchschnittliche Pflanzengröße bestimmt und in der Tabelle unten eingetragen.

Zeitpunkt (Tag)	0	0,25	1,75	4,5	6	7	8	9	10
Pflanzengröße (cm)	0	0,25	1,75	4,5	5	18,25	19,75	19,99	20

Tabelle 2.1.1

- Tragen Sie die Messdaten für die absolute Größe der Pflanzen in Abb. 2.1.1 im Anschluss an Aufgabe 2.1.1 ein und verbinden Sie die Punkte so, dass eine Kurve entsteht.
- Begründen Sie, warum die Pflanzen im Diagramm in Abb. 2.1.1 nicht gleichmäßig schnell wachsen, sondern der Zuwachs von Tag zu Tag unterschiedlich groß ist, indem Sie den folgenden Satz verwenden.

Ein gleichmäßiges Wachstum würde bedeuten, dass die Pflanzen jeden Tag um die gleiche Menge an Größe zunehmen. Da es sich in diesem Diagramm um eine proportionale Zunahme handelt, müsste sich im Diagramm eine Gerade ergeben.

In den ersten und in den letzten beiden Tagen steigt der Graph nur wenig an, d.h., die Funktionswerte von $g(t)$ nehmen nur _____ zu. Da die Funktionswerte die _____ der Pflanze angeben, ist der tägliche Zuwachs der Pflanzen hier gering. Und des Weiteren verläuft die Kurve am steilsten, d.h. die Funktionswerte von $g(t)$ nehmen hier am _____ zu. Das heißt, dass die Pflanzen hier den _____ Zuwachs haben.

- c) Die Zuwachsrate der Pflanzen soll nun genau untersucht werden. Ermitteln Sie dafür aus den gegebenen Messwerten der Tabelle 2.1.1 die täglichen Zuwächse bzw. die Zuwachsrate $z(t)$ der Pflanzen, also den Wert, um den die Größe der Pflanze jeweils im Zeitintervall von einem Tag zunimmt und tragen Sie die Werte in der folgenden Tabelle 2.1.2 ein. Markieren Sie anschließend durch Vergleich mit den bereits eingezeichneten Werten im $z(t)$ -Diagramm, dass Ihre berechneten Werte richtig sind und verbinden Sie auch hier die Punkte zu einer Kurve.

[illegible]

Tabelle 2.1.2

- d) Begründen Sie, warum der Verlauf dieser Kurve für die Zuwachsrate $z(t)$ zeigt, dass die Pflanzen während des Tages am stärksten wachsen, also am Tag 5 den größten Zuwachs haben und am meisten Wasser benötigen.

- e) Wenn Aufgabenteil d) richtig beantwortet wurde, haben Sie sicherlich erkannt, dass die Pflanzen die größte Zuwachsrate haben, wenn die zugehörige Kurve $z(t)$ in Abb. 2.1.2 ihren höchsten bzw. maximalen Punkt erreicht. Zeichnen Sie diesen qualitativen Zusammenhang zwischen dem Zuwachs der Pflanzen $z(t)$ und der Pflanzendichte $g(t)$ dar, indem Sie die folgenden Skizzen vervollständigen:

beschreibt, wie $\mathbf{p}(t)$ zum Zeitpunkt t sind.

Je tiefer die Kurve $g(t)$ verläuft, desto größer ist der tägliche Zuwachs der Pflanzen und um so

sind die Funktionswerte von $z(t)$. Je flacher $z(t)$ verläuft, desto

Wachstums der Pflanzen und um so besser die Funktionswerte

von $z(t)$. Analog ist die Tangente der Kurve $q(t)$ ist der Zuwachs $\dot{q}(t)$ und damit der

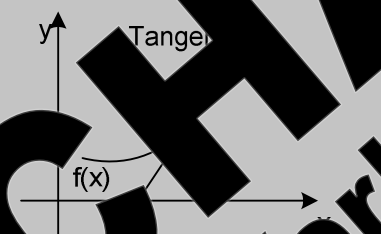
Funh

- f) Begründen Sie, warum es sinnvoll ist, diese Pflanzen nach dem 10. Tag zu ernten.

- g) Zeichnen Sie auf der folgenden Seite in der Abb. 2.1.1 so genau wie möglich jeweils eine Tangente an den Stellen $t_1 = 1,5$ und $t_2 = 4,5$ sowie an der Stelle $t_3 = 9,5$.

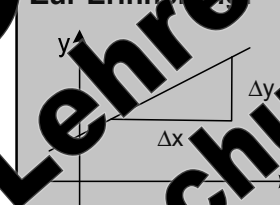
Zusatzinformation:

Die Gerade an der Stelle $t_2 = 4,5$ wird ebenfalls als Tangente bezeichnet, obwohl sie die Kurve schneidet. Entscheidend ist, dass diese Gerade tangential zur Kurve verläuft.



Ermitteln Sie anschließend die Steigung m der folgenden drei Tangenten auf zeichnerischem Weg, indem Sie die Längen a und b eines Steigungsdreiecks möglichst genau, beispielsweise durch Abzählen von Kästchen, ermitteln.

Zur Erinnerung



Die Definition der Steigung m
zweier Geraden:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Steigung

$$m_1 = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \underline{\hspace{2cm}}$$

Steigung m_2 der Tangente an der Stelle $t_2 = 4,5$:

~~$$m_2 = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$~~

$$m_2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

Stelle $t_3 = 9,5$: Tangente an γ in $\gamma(t_3)$

$$m_3 = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{0.0001}{0.0001} = 1$$

Diagramm zu Tab. 2.1.1

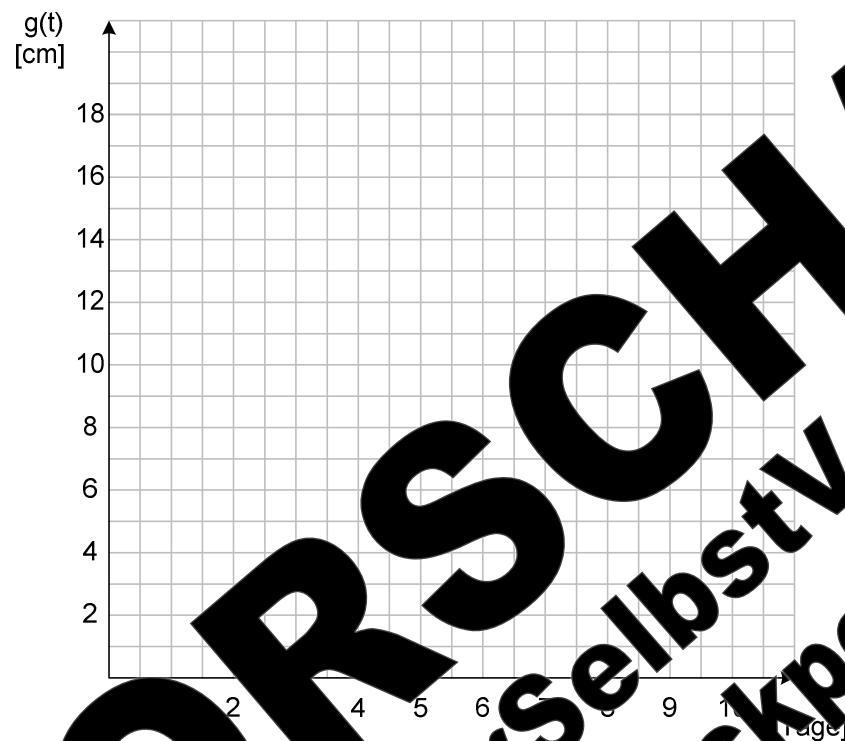


Abb. 2.1.1

Dynamic Tel 2.1.2

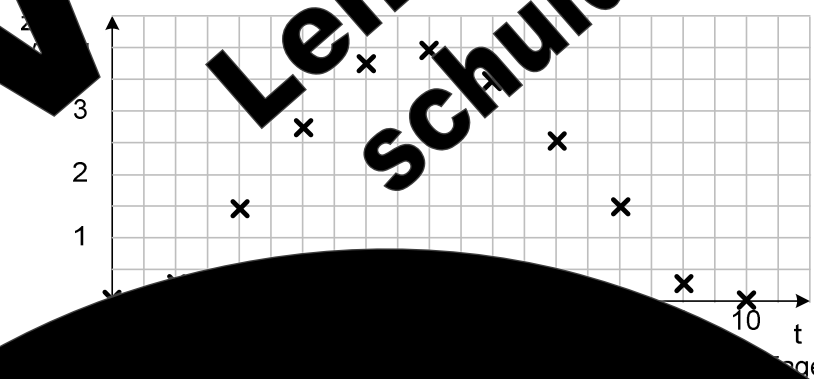


Abb. 2.1.2

Vergleichen Sie die aus der Messung ermittelten Werte für m und λ mit den in Tabelle 2.1.2 berechneten Zuwachsraten an den entsprechenden Tagen, und beschreiben Sie den folgenden Satz.

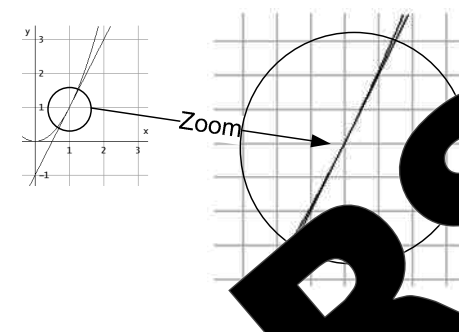
Die Statistik kann man berechnen, wenn man Zeichnungen auf der Hand hat. Berücksichtigt, den Wert der Stichprobe, die man in der Tabelle 2.1.2.

Zusammenfassung der Erkenntnisse aus Aufgabe 2.1

Formulieren Sie nun, unter Einbeziehung der nachfolgend angegebenen ergänzenden Information, eine Zusammenfassung der Erkenntnisse aus Aufgabe 2.1, indem Sie den Text im Kasten vervollständigen.

Ergänzende bzw. wiederholende Information über den Zusammenhang von Tangenten und Kurven

Begründen Sie anhand der Abb. 2.1.3, warum die Steigung der Kurve in einem Punkt immer mit der Steigung ihrer Tangente in diesem Punkt identisch ist, wenn Sie diesen Text ergänzen.



Wenn man den Berührungspunkt von Kurve und Tangente in das Diagramm einzoomt, sieht man, dass die Funktion in einem kleinen Bereich _____.

Daraus erkennt man, dass die Steigung der Kurve und der Tangente im _____

identisch ist.

Eine Funktion und ihre Tangente haben im selben Punkt die gleiche Steigung. Wenn die Steigung der Tangente im Bezugspunkt bekannt ist, kennt man daher auch die Steigung der Kurve. Dort in diesem Punkt, wo die Steigung der Tangente am größten ist, steigt auch die Kurve am stärksten an. Wo die Kurve nicht ansteigt, hat die Tangente die Steigung 0. Die Steigung der Kurve bzw. die Steigung der Tangente in einem Kurvenpunkt ist das Maß für die Zuwachsrate der Funktionswerte in diesem Punkt. An der Stelle mit der größten Zuwachsrate verlaufen die Kurve und die Tangente am steilsten und die Kurve, welche die geringste Zuwachsrate hat, hat hier ihren Wendepunkt. An Stellen mit Wendepunkt haben die Kurve und die Tangente die Steigung $m = 0$. An diesen Stellen ändern sich die Funktionswerte ebenfalls den Wert an.

Aufgabe 2.2

In Aufgabe 2.1 haben Sie sich mit den Zuwachsraten beim Wachstum von Blattoberfläche beschäftigt und festgestellt, dass die Zuwachsrate der Funktion $g(t)$ der Steigung der Funktion bzw. der Tangente im Berührungspunkt entspricht. Da die Beschreibung von Wachstumsprozessen in der Zoologie, in vielen Anwendungsfällen eine wichtige Rolle spielt, sollen nun mit Hilfe der Normalparabel und ihrer Tangenten allgemeine Zusammenhänge hinsichtlich der Berechnung der Steigung einer Kurve erarbeitet werden.

Die Parabel und ihre Tangenten

Die Abbildung zeigt die Normalparabel $f(x) = x^2$ sowie schließlich vierer Tangenten mit den zugehörigen Steigungsdreiecken. Füllen Sie die Tabelle unten aus, indem Sie an den angegebenen Stellen die Funktionswerte berechnen und zusätzlich mit Hilfe der bereits eingetragene Steigungsdreiecke die Steigung der Tangente und damit den Steigungswert an der jeweiligen Stelle angeben.

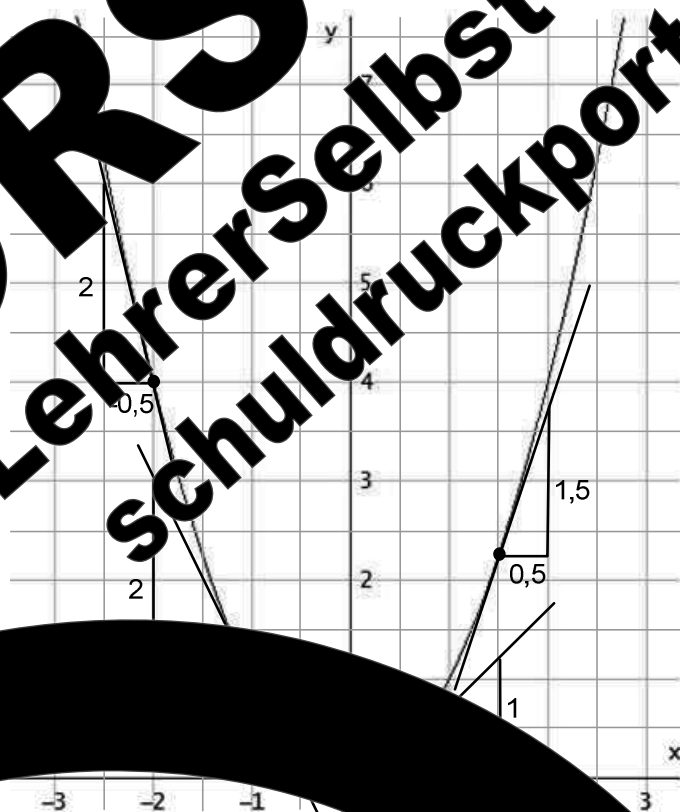


Abb. 2.2.1

Stelle x	y-Wert von $f(x) = x^2$ an der Stelle x	Steigung m_i der Tangente von $f(x)$ an der Stelle x	Steigungswert der Funktion $f(x)$ an der Stelle x
$x = -2$		$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} =$	
$x = -1$		$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} =$	
$x = 0,5$		$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} =$	
$x = 1$		$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} =$	

Tabelle 2.2.1

Vergleichen Sie in Tabelle 2.2.1 in jeder Zeile den gegebenen Wert der Stelle x in der ersten Spalte mit dem ermittelten Wert für die Steigung der Kurve in der letzten Spalte. Sie werden sicher feststellen, dass zwischen den Ergebnissen für die Steigung der Tangente bzw. der Kurve und dem Wert von x ein Zusammenhang besteht, der auf eine **Gesetzmäßigkeit** schließen lässt.

- Welche Vermutung haben Sie auf Grund der Feststellung für die Steigung der Tangente und der Kurve an der Stelle $x = 10$?
Die Steigung hat den Wert _____.

- Formulieren Sie eine Rechenvorschrift, wie man die Steigung m der Funktion $f(x) = x^2$ an einer beliebigen Stelle x berechnen kann.

Ergebnis Aufgabe 2.2: $m =$ _____

Ausblick

Da es für die Normalparabel auch ohne Hilfe der Steigung m der Tangente bzw. die Steigung m der Kurve an einer beliebigen Stelle über den Ansatz $m = 2x$ zu berechnen, entsteht die Frage, ob es solche Rechenvorschriften für Ermittlung der Steigung bei Kurven auch für andere Funktionen gibt und welchen Gesetzmäßigkeiten diese Berechnungen folgen. Anhand der Parabel, für die wir diese Gesetzmäßigkeit nach Hilfe von zeichnerischen Methoden erarbeitet haben, wird mit den folgenden Aufgaben ein Verfahren hergeleitet, mit dem auch die Steigung anderer beliebiger Funktionen berechnet werden kann, die sog. Differenzialrechnung.

Aufgabe 2.3

Berechnen der Steigung von Kurven

In Aufgabe 2.1 haben Sie mit Hilfe von zeichnerischen Methoden festgestellt, dass die Steigungen der Tangenten an die Funktion $f(x) = x^2$ einem formelmäßigen Zusammenhang genügen, nämlich mit der Rechenvorschrift $m = 2x$. Wie Sie jedoch wissen, besteht bei zeichnerischen Methoden das Ablesen von Δx und Δy aus einem Steigungsdreieck immer die Gefahr, dass kleine Ableserfehler zu Ablesefehlern führen können.

Ein mathematischer Weg erlaubt es, die Steigung der Tangenten an beliebigen Funktionen die Steigung der Tangenten an der Stelle x_0 mit der Kurve im Berührungspunkt zu berechnen. Diese Berechnungen so einfach wie möglich zu gestalten, wird auch hier die Funktion $f(x) = x^2$ verwendet.

Für die Berechnung der Tangentensteigung soll hier beispielsweise $x_0 = 0,5$ verwendet werden. Durch Einsetzen von $x_0 = 0,5$ in die Funktionsgleichung $f(x) = x^2$ erhält man die Tangente den Berührungspunkt $B(0,5 / 0,25)$. Berechnen Sie unter Einbeziehung des bereits bekannten rechnerischen Ansatzes für die Steigung einer Geraden (vgl. „Arbeitsblätter Mathematik – Ablesendes zu Algebra & Funktionen“) die Steigung der Tangente nicht ermitteln, sondern nur ein Punkt auf der Kurve.

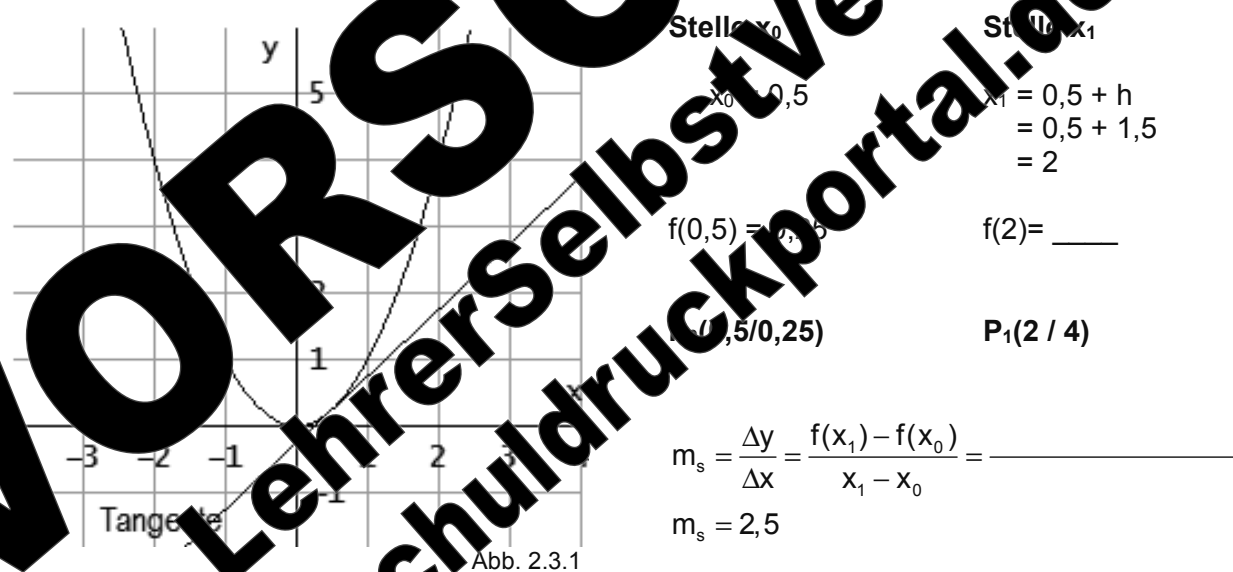
Für die Berechnung der Geradensteigung: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

b) Um mit der unter a) angegebenen Formel die Steigung berechnen zu können, benötigt man also mindestens zwei Punkte auf einer Geraden. Bei der Tangente ist jedoch nur eine Stelle x_0 , an der die Kurve berührt wird, bekannt. Somit kann diese Formel nicht direkt verwendet werden. Da es jedoch keine Alternative zu dieser Formel gibt, an einer beliebigen Stelle die Steigung der Kurve bzw. der Tangente zu berechnen, verwendet man die Formel bei einem **Näherungsverfahren**. Verdeutlichen Sie sich die Vorgehensweise und ergänzen Sie fehlende Angaben und Teilergebnisse.

(1) Verdeutlichung des Näherungsverfahrens anhand der Normalformel $f(x) = x^2$

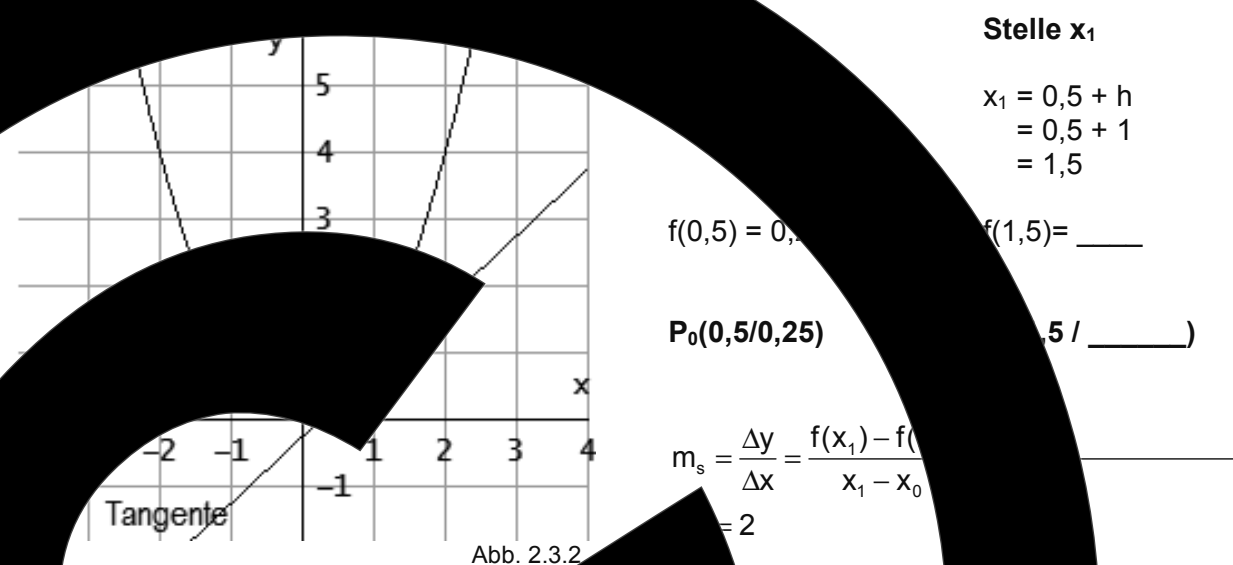
Näherung 1

Man wählt rechts von $x = x_0$ an der Stelle $x_1 = x_0 + h$ einen weiteren Punkt auf der Parabel aus und zeichnet möglichst genau eine **Sekante** durch diese beiden Punkte. Ermitteln Sie für das Beispiel $x_0 = 0,5$ und $h = 1,5$ die Steigung der Sekante, indem Sie fehlende Angaben ergänzen und zeichnen Sie die Sekante im folgenden Diagramm ein.



Näherung 2

Da die Sekante sehr stark von der Tangente abweicht, verkleinert man den Wert von h . Ermitteln Sie für das Beispiel $x_0 = 0,5$ und $h = 0,5$ die Steigung der Sekante, indem Sie fehlende Angaben ergänzen und zeichnen Sie die Sekante im folgenden Diagramm ein.



Näherung 3

Auch die Sekante aus Schritt 2 weicht sehr stark von der Tangente ab. Um der Tangente näher zu kommen, verkleinert man den Wert von h weiter. Ermitteln Sie für das Beispiel $x_0 = 0,5$ und $h = 0,25$ die Steigung der Sekante, indem Sie fehlende Angaben ergänzen und zeichnen Sie die Sekante ebenfalls so genau wie möglich im folgenden Diagramm ein.

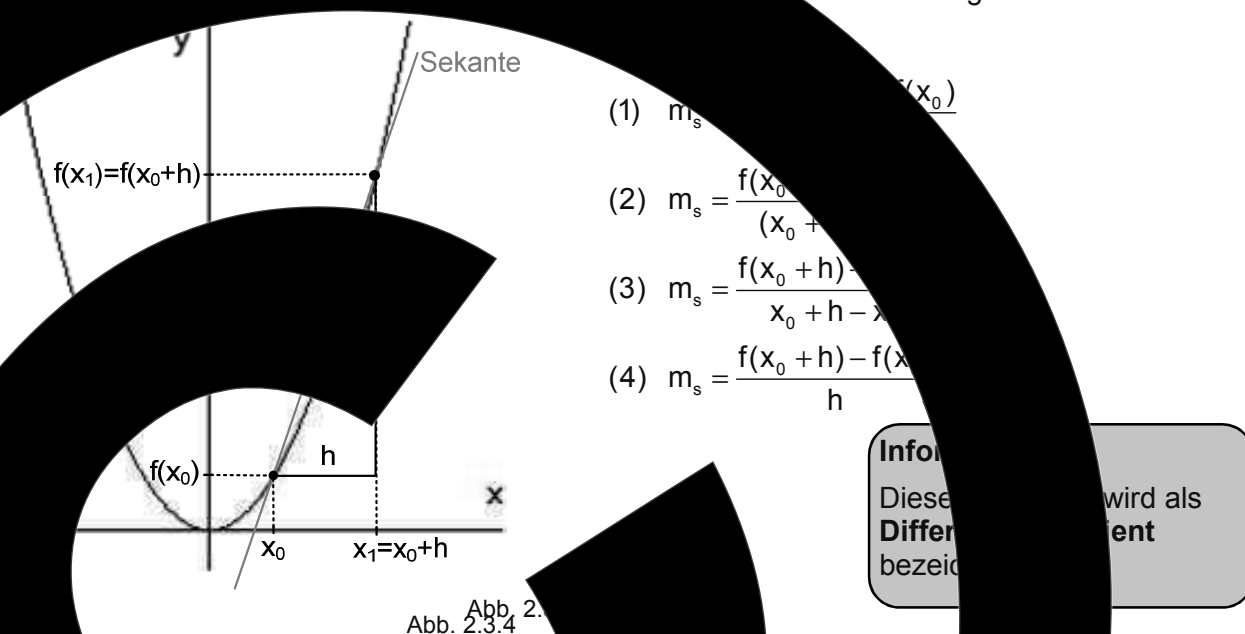


(2) Verallgemeinerung des Näherungsverfahrens

Wenn man die drei Beispiele in (1) betrachtet, nähert sich die Sekante der Tangente an, wenn h immer kleiner wird. In Folgenden soll die am Zahlenbeispiel verdeutlichte Annäherung nun für eine beliebige Stelle x_0 und eine rechts davon liegende Stelle $x_1 = x_0 + h$ verallgemeinert werden.

Zeichnen Sie in Abb. 2.3.4 an der Stelle x_0 so genau wie möglich eine Tangente farblich ein. Verdeutlichen Sie sich anschließend die Herleitungsschritte für die Berechnung der Sekantensteigung m_s anhand der Abb. 2.3.4, indem Sie auf der nächsten Seite die Bedeutung von Zeile (1) sowie die angegebenen Umformungsschritte (2) bis (4) beschreiben.

Wenn man die Stelle x_0 und $x_1 = x_0 + h$ erhält man für die Steigung m_s der Sekante die folgenden Ausdrücke. Ergänzen Sie die Umformungsschritte auf der nächsten Seite.



Info: Diese Formel wird als Differenzialquotient bezeichnet.

Erläuterung von Zeile (1) und der Umformungsschritte.

(1) _____

(1)→(2) _____

(2)→(3) _____

(3)→(4) _____

(3) Grenzfall

Wenn h nun immer kleiner wird und schließlich als Grenzwert den Wert Null annimmt, wird im Grenzfall aus der Sekante die Tangente. Man kann dieses „Hineinrutschen“ der Sekante in die Tangente mit dynamischen Geometrieprogrammen am PC oder Tablet auch visualisieren. Damit ergibt sich aus dieser Aufgabenstellung ein **Grenzwertproblem**.

Mathematisch wird die Berechnung der Tangentensteigung als Grenzwert der Steigung der Sekante wie folgt formuliert.

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{Differenzialquotient}$$

Im Grenzfall $h \rightarrow 0$ wird aus der Steigung m_s der Sekante die Steigung m_t der Tangente.

Die Tangentensteigung zu x_0 erhält man als Grenzwert der Sekantensteigung, wenn der Abstand der Kurve gegen Null führt. Man geht dabei vom Differenzenquotient über.

Man erhält die Tangentensteigung erhält man als Grenzwert der Sekantensteigung, wenn der Abstand der Kurve gegen Null führt. Man geht dabei vom Differenzenquotient über.

Aufgabe 2.4

Anwenden des Differenzialquotienten

In der rechten Sprechblase der vorangegangenen Grenzwertbildung wird angedeutet, dass man mit Hilfe des Differenzialquotienten die Steigung der Tangente berechnen kann. Diese Rechnung wird nun anhand der Normalparabel exemplarisch gezeigt. Erläutern Sie die Schritte und die Umformungen.

Rechenschritte für $f(x) = x^2$

Erläutern der Schritte bei Umformungen:

(1) $f(x_0) = x_0^2$

$f(x_0 + h) = (x_0 + h)^2$

(2) $m_t = \lim_{h \rightarrow 0} m_s = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

$m_t = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h}$

(3) $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h}$

(4) $m_t = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x_0h + h^2}{h}$

(5) $m_t = \lim_{h \rightarrow 0} (2x_0 + h)$

(7) $m_t = 2x_0$

Im Grenzfall nimmt h den Wert Null an und fällt in der Summe weg.

Da die Steigung beliebig wählbar ist, kann allgemein x_0 durch x ersetzt werden.

Sie dieses Ergebnis mit dem Ergebnis 2.2 und ergänzen Sie den folgenden Satz auf der nächsten Seite.

Die Ergebnisse bei der zeichnerisch und rechnerisch ermittelten Rechenvorschrift für die Berechnung der Tangentensteigung bei einer Normalparabel an einer beliebigen Stelle x _____

_____. Für die Rechenvorschrift zur Berechnung der Steigung an der Stelle x _____

ergibt sich bei der Normalparabel: $m_t =$ _____

Aufgabe 2.5

Berechnen von Steigungen bei der Normalparabel

Berechnen Sie nun exemplarisch für die Normalparabel die Funktionswerte und Steigung der Tangente an den folgenden Stellen und ergänzen Sie die Tabelle mit den Ergebnissen.

Stelle x	x = -5	x = -4	x = -5
Steigung m der Funktion bzw. Steigung m_t der Tangente an der Stelle x			
Funktionswert y an der Stelle x			

Im Punkt A(_____ / _____) haben die Funktion $f(x) = x^2$ und ihre Tangente die Steigung $m_t =$ _____

Im Punkt A(-2 / _____) haben die Funktion $f(x) = x^2$ und ihre Tangente die Steigung $m_t =$ _____

Im Punkt A(-4 / _____) haben die Funktion $f(x) = x^2$ und ihre Tangente die Steigung $m_t =$ _____

Im Punkt A(-5 / _____) haben die Funktion $f(x) = x^2$ und ihre Tangente die Steigung $m_t =$ _____

Übung 2.1

Bisher wurde die Normalparabel angewendet. In den folgenden Aufgaben wird die Binomische Formel zur Berechnung der Steigung einer Tangente an einer beliebigen Stelle x an der Stelle x angewendet. Dazu in den beiden Beispielen die Rechenvorschriften ergänzen und bearbeiten Sie die anschließenden Aufgaben.

Im Band „Grundlegendes zu Algebra und Funktionen“ der Schulbuchreihe wird im Kapitel 1 Aufgabe 1.6 beschrieben, wie man Binome höherer Ordnung mit dem Binomischen Formel berechnen kann und in Übung 1.11 finden sich weitere Beispiele zur Berechnung des Differenzialquotienten.

a) Ermitteln Sie die Rechenvorschrift für die Berechnung der Steigung bei der Funktion $f(x) = x^3$, indem Sie die folgenden Rechnungen ergänzen.

$$f(x_0) = x_0^3$$

$$f(x_0 + h) = (x_0 + h)^3$$

$$m_t = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^3 - x_0^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0^3 + 3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3 - x_0^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3x_0^2 + 3x_0h + h^2) = 3x_0^2$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3x_0^2 + 3x_0h + h^2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3x_0^2 + 3x_0h + h^2) = 3x_0^2$$

$$m_t = 3x_0^2 \quad \text{oder allgemein für beliebige } x: m_t = 3x^2$$

b) Ermitteln Sie die Rechenvorschrift für die Berechnung der Steigung bei der Funktion $f(x) = 3x^2$, indem Sie die folgenden Rechnungen ergänzen.

$$f(x_0) = 3x_0^2$$

$$f(x_0 + h) = 3(x_0 + h)^2$$

$$m_t = \lim_{h \rightarrow 0} m_s = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x_0 + h)^2 - 3x_0^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x_0^2 + 2x_0h + h^2) - 3x_0^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x_0^2 + 6x_0h + 3h^2 - 3x_0^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6x_0h + 3h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (6x_0 + 3h) = 6x_0$$

$$m_t = 6x_0 \quad \text{für allgemeine Stelle } x: m_t = 6x$$

c) Ermitteln Sie die Rechenvorschrift für die Berechnung der Steigung bei der Funktion $f(x) = x^3 + 1$, indem Sie die folgenden Überlegungen und Umformungen in Stichworten beschreiben.

$$(1) f(x_0) = x_0^3 + 1 \text{ ist der Funktionswert von } f(x) = x^3 + 1 \text{ an der Stelle } x_0$$

$$(2) f(x_0 + h) = (x_0 + h)^3 + 1$$

$$(3) f(x_0 + h) = x_0^3 + 3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3 + 1$$

$$(4) m_t = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^3 + 1 - (x_0^3 + 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0^3 + 3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3 + 1 - x_0^3 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3x_0^2 + 3x_0h + h^2) = 3x_0^2$$

$$(5) m_t = 3x_0^2 \quad \text{für allgemeine Stelle } x: m_t = 3x^2$$

$$(6) m_t = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^3 - x_0^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0^3 + 3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3 - x_0^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3x_0^2 + 3x_0h + h^2) = 3x_0^2$$

$$(8) m_t = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3x_0^2 + 3x_0h + h^2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3x_0^2 + 3x_0h + h^2) = 3x_0^2$$

$$(9) m_t = \lim_{h \rightarrow 0} 3x_0^2 = 3x_0^2$$

$$(10) m_t = 3x_0^2 \quad \text{für allgemeine Stelle } x: m_t = 3x^2$$

$$(6) m_t = 3x_0^2 \quad \text{für allgemeine Stelle } x: m_t = 3x^2$$

d) Zeigen Sie, analog zu den Berechnungen für die Funktionen in Aufgabenteil a) bis c), auch die Anwendung des Differenzialquotienten, dass sich für die Rechenvorschrift zur Berechnung der Steigung der Tangente jeweils der angegebene Ausdruck ergibt. Führen Sie die Berechnungen im Heft durch.

- (1) Bei $f(x) = x^4$ lässt sich die Steigung m_t der Tangente an der Stelle x über die Rechenvorschrift $m_t = 4x^3$ berechnen.
- (2) Bei $f(x) = 5x^2$ lässt sich die Steigung m_t der Tangente an der Stelle x über die Rechenvorschrift $m_t = 10x$ berechnen.
- (3) Bei $f(x) = 4x^3$ lässt sich die Steigung m_t der Tangente an der Stelle x über die Rechenvorschrift $m_t = 12x^2$ berechnen.
- (4) Bei $f(x) = 2x$ lässt sich die Steigung m_t der Tangente an der Stelle x über die Rechenvorschrift $m_t = 2$ berechnen. Die Steigung einer Geraden ist eine Konstante.
- (5) Bei $f(x) = 3x^2 + x$ lässt sich die Steigung m_t der Tangente an der Stelle x über die Rechenvorschrift $m_t = 6x + 1$ berechnen.

Information 1

In den angegebenen Aufgaben wurde zu jeder Funktion $f(x)$ angegeben, wie die Steigung m_t der Tangente bzw. ihrer Tangente an einer Stelle x mit Hilfe des Differenzialquotienten bestimmt werden kann. Man erkennt hier, dass die Vorschrift zur Berechnung von m_t genau wie das normalerweise bei Funktionen ist, eine Variable x enthält. In diesen funktionalen Charakter der Rechenvorschrift zur Ermittlung der Steigung einer Funktion bzw. ihrer Tangente zu berücksichtigen, ordnet man dem Ausdruck m_t eine neue Funktion $f'(x)$ zu.

Die Ableitung einer Funktion differenzieren oder Ableiten

Die Steigung m_t der Tangente an einer Stelle x einer Funktion $f(x)$ bzw. die Steigung m_t der Tangente an einer Stelle x einer Funktion $f(x)$ bezeichnet man als **Ableitung** der Funktion $f(x)$.

Man berechnet $f'(x)$ mit Hilfe des **Differenzialquotienten**: $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Die Berechnung des Differentialquotienten bezeichnet man als **Ableiten einer Funktion** oder das **Differenzieren einer Funktion**.

Ergänzung zur Differentialrechnung

Da die Steigung m_t der Tangente an einer Stelle x einer Funktion $f(x)$ mit Hilfe des Differenzialquotienten bestimmt werden kann, bezeichnet man den gesamten Bereich mit dem Begriff **Differenzialrechnung**.

Ergänzung zur Differentialrechnung

Wenn eine Funktion $f(x)$ abgeleitet wurde, spricht man von der **ersten Ableitung**. Man bezeichnet den Strich am f . Wenn eine Funktion ein zweites Mal abgeleitet wird, spricht man von der **zweiten Ableitung**. Der zweifache Strich am f und kennzeichnet die zweite Ableitung (vgl. Aufgabe 1.1).

Zusammenfassung zur mathematischen Formulierung des Begriffs differenzieren

Steigung der Sekante m_s

$$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Steigung der Tangente m_t

$$m_t = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Ableitungsfunktion $f'(x)$

Die Ermittlung der Ableitungsfunktion ist vom Kurvenweg (s. Aufgabe 2.4) identisch mit der Berechnung der Tangentensteigung über den Differenzialquotienten, da $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ die Steigung der Tangente in einem Kurvenpunkt mit der Steigung der Kurve in diesem Punkt identisch ist. Die Berechnung des Differenzialquotienten wird als **Differenzieren** oder auch **Ableiten** bezeichnet.

Ergänzungen zur Steigung

Oft, beispielsweise bei der Tastenbelegung von Taschenrechnern, wird für $f'(x)$ die nachfolgende Darstellung verwendet.

$$\text{Ableitung } f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)$$

Mit dieser Schreibweise spricht: „ df von x nach dx “ wird folgendes verdeutlicht: Das d entspricht bei der Sekantensteigung dem Δ im Steigungsdreieck. Da nach der Bildung des Grenzübergangs $h \rightarrow 0$ der Abstand Δx praktisch Null wird, und diese Berechnung auch als Differenzieren bezeichnet wird, verwendet man anstatt des großen griechischen Delta Δ das kleine d .

Ableitung nach t : $v'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv(t)}{dt}$

Mit dieser Schreibweise kann man gut verdeutlichen, nach welcher Variablen abgeleitet bzw. differenziert wird. Bei der Ableitung nach t wird die Funktion oft anstatt mit einem x mit einem t bezeichnet. $v'(t) = \dot{v}(t)$

Verwendung des T

Sollten Sie die Ableitungsfunktion $f'(x)$ verwenden, mit dem man Ableitung $f'(x)$ oder auch symbolisch $\frac{df(x)}{dx}$ schreiben Sie die folgende Tastenbelegung.

Tastensymbol Taschenrechner: $\frac{d}{dx}$

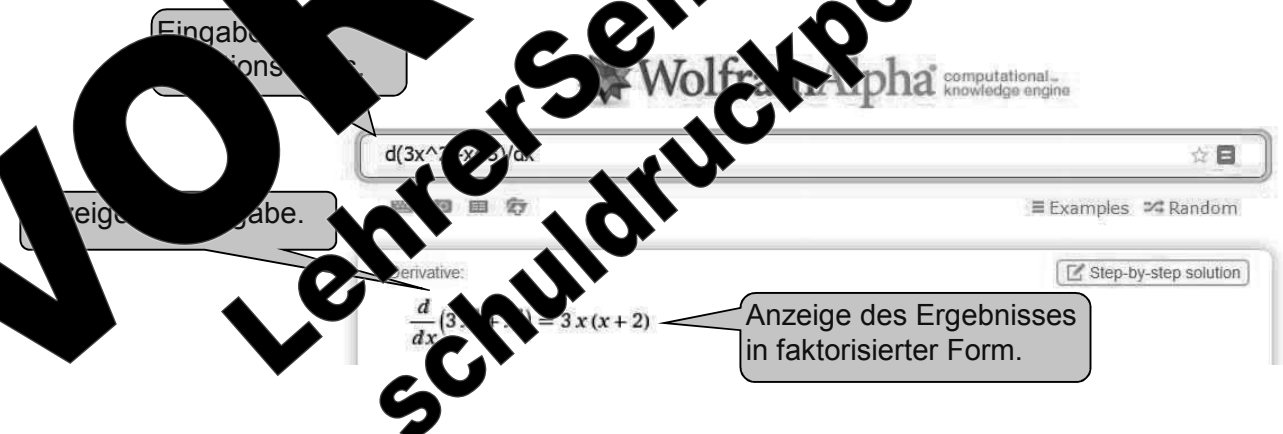
Die Angabe auf dem Taschenrechner zeigt, dass eine Funktion nach der Variablen x abgeleitet bzw. differenziert wird. Daher muss die Funktionsterm in dem Kasten eingegeben werden, der verwendet werden soll.

Verwendung eines Computer-Algebra-Systems (CAS)

Der Begriff **Computeralgebrasystem** oder abgekürzt **CAS** wird für Computerprogramme verwendet, mit denen Computer-sym-bolisch algebraische Ausdrücke symbolisch umgeformt werden können, mit denen man eine beliebige Gleichung lösen kann oder die Ableitungen, denen sich auch Ableitungen berechnen lassen. Also: Software, die man hier auf dem PC das Programm **Maple** nutzen.

Wie bei einem Taschenrechner wird hier ebenfalls nicht die „Schreibweise $f(x)$ “ verwendet, sondern die „Differenzialschreibweise“ $\frac{d}{dx}f(x)$. Man kann hier auch nach einer beliebigen Variablen (z.B. t oder z) ableiten lassen.

Beispiel für die Berechnung der Ableitung von $f(x) = 3x^2 + x^3$



Aufgabe 2.6

Berechnung der gewählten Funktionen.

Diese Funktionen sind als Differenzialquotienten, also deren Ableitungen $f'(x)$, im Rahmen von 2.1 c) ermittelt wurden bzw. deren Funktionswerte sind den Angaben der Übung 2.1 c) zu entnehmen.

Wenn Sie die Tabelle ohne Einsatz des Taschenrechners ausfüllen, so anschließend den nachfolgenden Text. Falls Sie über einen Taschenrechner verfügen, so die Ableitung einer Funktion an einer gegebenen Stelle x numerisch berechnen kann, kann die Übung des Umgangs mit dem Taschenrechner anhand ermittelten Wert der Steigung mit dem Taschenrechner überprüfen.

Funktion	Ableitung	Stelle x	y-Wert an Stelle x	Steigung an der Stelle x
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$	-3		
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 6x$	5		

Funktion	Ableitungsfunktion	Stelle x	y-Wert an der Stelle x	Schnittpunkt an der Stelle x
$f(x) = x^4$	$f'(x) = 4x^3$	-1		
$f(x) = 5x^2$	$f'(x) = 10x$	2,5		
$f(x) = 4x^3$	$f'(x) = 12x^2$	-2		
$f(x) = 2x$	$f'(x) = 2$	1,5		
$f(x) = 3x^2 + x^3$	$f'(x) = 6x + 3x^2$	1		

Wenn man den **Funktionswert**, d.h. den Wert einer Funktion an der Stelle x berechnen will, muss man den Wert von x in die Funktionsgleichung einsetzen und $f(x)$ einzeln berechnen.

Wenn man die **Steigung** einer **Funktion** oder einer **Tangente** an der Stelle x berechnen will, muss man den Wert x in die **1. Ableitung** $f'(x)$ einsetzen.

Aufgabe 2.7

Ableitungsregeln

Wie Sie bei den vorangegangenen Aufgaben sicherlich bemerkt haben, ist die Berechnung des Differenzialquotienten meistens sehr aufwendig und mühsam. Wenn man allerdings für die berechneten Beispiele jeweils die Funktion $f(x)$ mit der Ableitung $f'(x)$ vergleicht, kann man eine Gesetzmäßigkeit für das Ableiten feststellen. Diese Gesetzmäßigkeiten vereinfacht sich der Vorgang des Ableitens, wenn man die Herleitung weiterer Gesetzmäßigkeiten

Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit Hilfe der Ergebnisse aus Aufgabe 2.5 sowie Übung 2.1 selbst. Diskutieren Sie die Abhängigkeiten für das Ableiten von Funktionen zu den Ableitungsregeln. Vergleichen Sie Ihre Annahme dann mit den im Schulbuch bzw. anderen geeigneten Quellen angegebenen Regeln.

Elementar			
Potenz	Funktion: $f(x) = x^n$	Ableitungsfunktion: $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$	
Exponential	Funktion: $f(x) = a \cdot x^n$	Ableitungsfunktion: $f'(x) = n \cdot a \cdot x^{n-1}$	
Summenregel:	Funktion: $f(x) = u(x) + v(x)$	Ableitungsfunktion: $f'(x) = u'(x) + v'(x)$	

b) Berechnen Sie in den folgenden Aufgaben die Ableitungen jeweils genauso ausführlich, wie in den zugehörigen Beispielen und ergänzen Sie die Texte in den Sprechblasen.

Funktion	Ableitungsfunktion
(1) $f(x) = x^6 \Rightarrow$	$f'(x) = 6x^{6-1} = 6x^5$
$g(x) = x^5 \Rightarrow$	$g'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$
(2) $f(x) = 7x^3 \Rightarrow$	$f'(x) = \underline{\hspace{2cm}} = 21x^2$
$g(x) = 6x^4 \Rightarrow$	$g'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$
(3) $f(x) = 5x = 5x^1 \Rightarrow$	$f'(x) = \underline{\hspace{2cm}} = 5x^{1-1} = 5x^0 = 5$
$g(x) = 2x = \underline{\hspace{2cm}} \Rightarrow$	$g'(x) = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$
$h(x) = ax = \underline{\hspace{2cm}} \Rightarrow$	$h'(x) = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$
$i(x) = \underline{\hspace{2cm}} \Rightarrow$	$i'(x) = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$
(4) $f(x) = 4 = 4 \cdot 1 = 4 \cdot x^0 \Rightarrow$	$f'(x) = 0 \cdot 4x^{-1} = 0$
$g(x) = 5 = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} \Rightarrow$	$g'(x) = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$
(5) $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + x - 5 \Rightarrow$	$f'(x) = 9x^2 - 8x + 1$
$g(x) = \underline{\hspace{2cm}} \Rightarrow$	$g'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

Wenn ein Term ax^n wird nach x abgeleitet, indem man den vorhandenen Exponenten n als Faktor n vor das x schreibt und n um 1 multipliziert. Der neue Exponent entsteht, indem man vom vorhandenen Exponenten 1 subtrahiert.

Wenn der abzuleitende Term die Form ax hat, fällt das x nach dem Ableiten $\underline{\hspace{2cm}}$, da der neue Exponent von x den Wert $\underline{\hspace{2cm}}$ annimmt und „irgendwas“ hoch null immer $\underline{\hspace{2cm}}$ ergibt. Es bleibt nur der Vorfaktor übrig.

Ein Term, der die Variable, nach der abgeleitet wird, nicht enthält, fällt $\underline{\hspace{2cm}}$, da er nach dem Ableiten den Wert $\underline{\hspace{2cm}}$ annimmt.

Wenn der Funktionsterm aus mehreren Summanden besteht, wird jeder Summand einzeln betrachtet und von den anderen Summanden abgeleitet.

c) In der folgenden Tabelle sind weitere elementare Funktionen angegeben. Leiten Sie die Funktionen mit Hilfe der Ableitungsregeln ab. Formen Sie die Funktionsterme dazu ggf. so um, dass die Potenzregel für die Ableitung angewandt werden kann. Geben Sie die Ableitungsfunktion an. Prüfen Sie Ihre gebrochene oder negative Exponenten an. Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse durch Einsetzen in geeigneter Literatur oder mit Hilfe von CAS

Funktion	Ableitungsfunktion
(1) $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$	$f'(x) = \underline{\hspace{2cm}} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$
$g(x) = \frac{a}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$	$g'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$
(2) $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$	$f'(x) = \underline{\hspace{2cm}} = -2 \cdot x^{-2-1} = -2 \cdot x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$
$g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$	$g'(x) = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$
(3) $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$	$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = a\sqrt{x} = \underline{\hspace{2cm}}$	$g'(x) = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

d) Berechnen Sie die Ableitung der Funktionen $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $f(x) = \sqrt{x}$ durch die Anwendung der Potenzregel. Geben Sie die Ableitungsfunktion an. Prüfen Sie Ihre Ergebnisse durch Einsetzen in geeigneter Literatur oder mit Hilfe von CAS. Ü1.11 im Arbeitsbuch „Grundlegendes“

Übungen

Ergänzende Übungsaufgaben zur Wiederholung und Vertiefung

Ü2.1: Erklären Sie unter Einbeziehung einer Skizze, was der Ausdruck $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ bedeutet und welcher Zusammenhang zwischen diesem Ausdruck und der Ableitung $f'(x)$ einer Funktion besteht.

Ü2.2: Berechnen Sie die Ableitung von $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ mit Hilfe des Differenzialquotienten.

Ü2.3: Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = 2x^3 + 4x - 2$ unter Verwendung des Differenzialquotienten und überprüfen Sie das Ergebnis mit Hilfe der Ableitungsregeln.

Ü2.4: Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = \frac{2}{x^3}$ mit Hilfe der Ableitungsregeln.

Ü2.5: Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = \sqrt[3]{x}$ mit Hilfe der Ableitungsregeln.

Ü2.6: Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen mit Hilfe von Potenz-, Summen- und Kettenregel.

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^8 + x^6 - 4x^2 + 5$

b) $f(x) = \frac{1}{x} + x + 1$

c) $v(t) = \frac{1}{t^2} - \sqrt{t} + x$

d) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$

Ü2.7: Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f(t) = \sin(t)$ an der Stelle $t = \frac{1}{4}$.

Übungen:

Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Differenzialrechnung selbstorganisiert lernen

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)$$

Kapitel 2

Grundlegende Anwendungen
der Differenzialrechnung

Kapitel 3: Grundlegende Anwendung der Differenzialrechnung

Aufgabe 3.1

Grundlegende Aufgabentypen

Wiederholen Sie die bisher gelernten Zusammenhänge hinsichtlich der Steigung einer Kurve, indem Sie die folgenden Sätze vervollständigen.

In einem Berührungspunkt x_0 haben eine Funktion $f(x)$ und ihre Tangente t die gleiche Steigung. Wenn man den Wert x_0 in die Gleichung der Funktion $f(x)$ einsetzt, erhält man den Funktionswert. Wenn man den Wert x_0 in die Gleichung der Ableitungsfunktion $f'(x)$ einsetzt, erhält man den Wert der Steigung der Funktion und der Tangente an der Stelle x_0 .

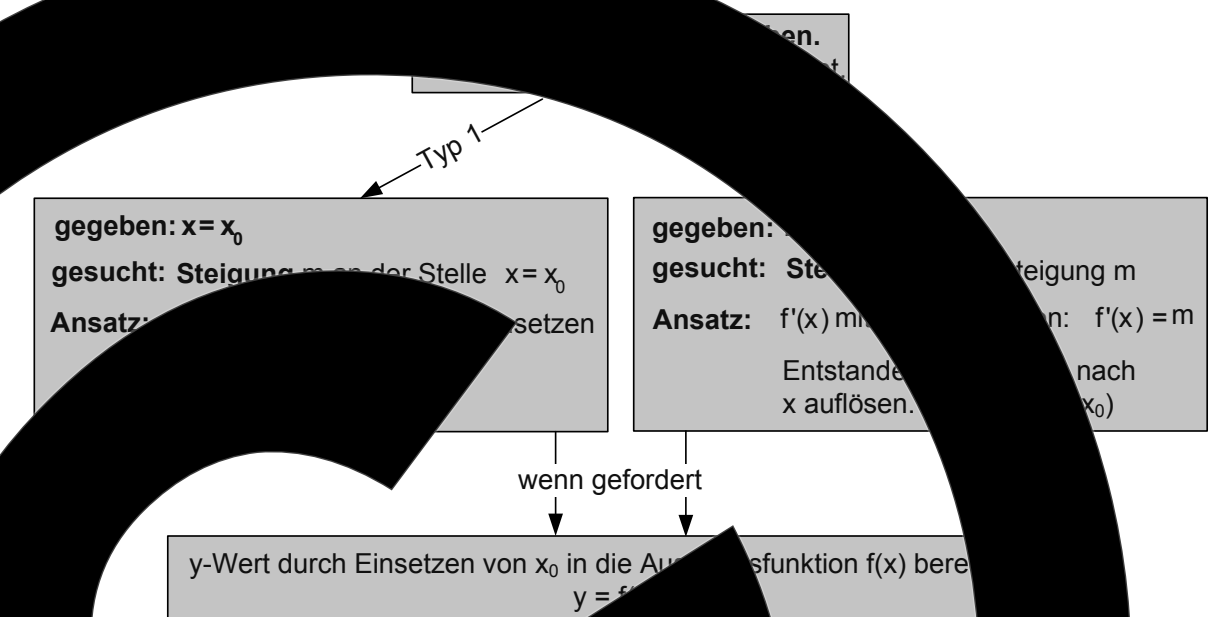
Dieser Zusammenhang zwischen der Steigung einer Kurve, der Steigung einer Tangente und dem Wert der Ableitungsfunktion spielt in vielen Anwendungsaufgaben der Differenzialrechnung eine zentrale Rolle. Prägen Sie sich daher diesen Zusammenhang im folgenden Kasten ein.



Informations 3.1

Die Aufgabenstellungen bei der Anwendung der Differenzialrechnung führen im Wesentlichen auf zwei Aufgabentypen, die im Rahmen dieser Unterlagen mit Typ 1 und Typ 2 bezeichnet werden sollen. Verdeutlichen Sie sich die folgende Abbildung.

Überblick über die Aufgabentypen bei der Anwendung der Differenzialrechnung



Kapitel 1:		
Grenzwertbetrachtungen	11	
Kapitel 2:		
Einführung in die Differenzialrechnung	43	
Kapitel 3:		
Grundlegende Anwendung der Differenzialrechnung	63	
Kapitel 4:		
Anwendung der Differenzialrechnung – Verlauf von Funktionsgraphen	71	
Kapitel 5:		
Rekonstruktion von ganzrationalen Funktionen	101	
Kapitel 6:		
Extremwertaufgaben	121	
Kapitel 7:		
Produkt- Quotienten- und Kettenregel	135	
Kapitel 8:		
Ableitungen von Exponentialfunktionen	157	
Kapitel 9:		
Ableitungen der Logarithmusfunktion	165	

Gesamtwortung der Anwendung selbstorganisiert erlernt
(Bestandteile der Anwendung selbstorganisiert erlernt)

Alle Rechte vorbehalten. All rights reserved.
Nachdruck, auch auszugsweise, vorbehalten. Vorbehaltlich der Rechte,
aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.
LehrersebstVerlag
LehrersebstVerlag GmbH, Koblenz (Germany)
LehrersebstVerlag.de
www.f-druck.de

Aufgabe 3.2

Beispiel zu den grundlegenden Aufgabentypen der Differenzialrechnung

Verdeutlichen Sie sich das folgende Beispiel zu den Aufgabentypen 1 und beachten Sie die nachfolgenden Übungen.

Beispiel:

Gegebene Funktion: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x$

1. Ableitung: $f'(x) = x + 2$

Aufgabenstellung Typ 1

Berechnen Sie die Steigung m_t der Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = 2$.

Damit ist die Stelle gegeben mit: $x = 2$

Ansatz:

Einsetzen von 2 in die erste Ableitung $f'(x)$.
Die Steigung m_t der Funktion an der gegebenen Stelle bzw. die Tangentensteigung m_t .

$$f'(2) = 2 + 2$$

$$f'(2) = 4$$

Wenn berechnet (nur wenn gefordert)

$$y = f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 = 4$$

Antwortsatz:

Die Funktion $f(x)$ hat in der Stelle $x = 2$ die Steigung 4.

Aufgabenstellung Typ 2

Bestimmen Sie die Stelle, an der die Funktion $f(x)$ die Steigung 5 hat.

Damit ist die Steigung gegeben mit: $m = 5$

Ansatz:

Gleichsetzen von $f'(x)$ mit m , denn die Steigung entspricht dem Funktionswert der ersten Ableitung (s. Kasten oben). Auflösen der entstandenen Gleichung nach x .

$$f'(x) = m$$

$$f'(x) = 5$$

$$x + 2 = 5$$

$$x = 3$$

y-Wert (nur wenn gefordert)

$$y = f(3) = \frac{1}{2} \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 = 6,75$$

Antwortsatz:

Die Funktion $f(x)$ hat in der Stelle $x = 3$ die Steigung 5.

Übung 3.1

Aufgabe zu Typ 1

Steigung m_t an der bekannten Stelle x_0 der Funktion f gesucht

Verfahren Sie bei der Berechnung der Steigung m_t wie im Beispiel zu Aufgabe 3.2

In der Abbildung unten ist die Funktion $f(x) = x^3 + x$ und ihre Tangente an der Stelle $x = 3$ abgebildet. Berechnen Sie die Koordinaten des Berührungspunktes und die Steigung m_t der Tangente bzw. die Steigung der Funktion f in dieser Stelle. Formulieren Sie einen Antwortsatz.

Berechnen der Ableitung: $f'(x) = 3x^2 + 1$

1. Ansatz: $m_t = f'(x)$

2. Einsetzen: $m_t = 3 \cdot 3^2 + 1$

Antwortsatz:

Die Funktion $f(x) = x^3 + x$ hat in der Stelle $x = 3$ die Steigung $m_t = 28$.



1. Wenn die Koordinaten gesucht werden, muss die Stelle x_0 in die Funktion $f(x)$ eingesetzt werden.
2. Wenn die Stelle gesucht wird, muss die Steigung m_t in die Ableitung $f'(x)$ eingesetzt werden.

Aufgabe zu Typ 2

Stelle x der Funktion f an der bekannten Steigung m_t gesucht

Verfahren Sie bei der Berechnung der Stelle x wie im Beispiel zu Aufgabe 3.2

a) Berechnen Sie die Koordinaten, an der die Funktion $u(x) = 2,5x^2 + 8$ die Steigung $m = 8$ hat.

Berechnen der Ableitung: $u'(x) = 5x$

1. Ansatz: Gleichung: $u'(x) = m$

$5x = 8$

2. Lösen der Gleichung

$$x = \frac{8}{5} = 1,6$$

$$y = u(1,6) = 2,5 \cdot 1,6^2 + 8 = 10,4$$

3. y-Wert: $y = 10,4$

4. Antwortsatz:

Die Funktion $u(x) = 2,5x^2 + 8$ hat in der Stelle $x = 1,6$ die Steigung $m = 8$.

b) Berechnen Sie die Stelle*, an der die Funktion $u(x)$ eine Tangente mit der Steigung 0 hat.

Gleichung: $u'(x) = m$

$$5x = 0$$

2. Lösen der Gleichung

$$x = 0$$

$$y = u(0) = 2,5 \cdot 0^2 + 8 = 8$$

3. Antwortsatz:

Die Funktion $u(x) = 2,5x^2 + 8$ hat in der Stelle $x = 0$ die Steigung $m = 0$.

Übung 3.2

Die folgenden Aufgabenstellungen können ebenfalls mit den Ansätzen von Typ 1 und Typ 2 berechnet werden. Allerdings ist hier der Wert x_0 bzw. die Steigung m nicht mehr explizit gegeben. Die Werte müssen mit Hilfe von Zusatzüberlegungen bzw. Nebenrechnungen auf Basis der Aufgabenangabe bestimmt werden. Überlegen Sie jedoch jeweils, wenn nicht angegeben, welcher Aufgabentyp vorliegt.

- a) Berechnen Sie die Steigung der Funktion $g(x) = x^2 - 6x$ an der Nullstelle $x = 3$.

Hinweis: Aufgabe vom Typ 1

Ableitung berechnen: $g'(x) =$ _____

Nebenrechnung: Nullstellenberechnung, Bestimmung von x

CRS Selbstverwaltungskorporation

Berechnung der geschätzten Steigung β_1 und Antwort $\hat{y}$

Lehrschular

- b) Berechnen Sie die Gleichung der Geraden g , die parallel zu f verläuft und die Funktion $k(x) = 2x^2 - 1$ die gleiche Steigung hat wie f .

Zusammenfassung:
Zur Überlegung:

Da $k(x)$ die gleiche Steigung wie die Gerade haben soll, gilt für

Ableitung von $k(x)$ bzgl. x : $k'(x) =$ _____

Ansatz: $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$

Reg

- c) Berechnen Sie die Steigung der Funktion $h(x) = 3x^2 - x + 2$ am y-Achsenabschnitt.

Ableitung berechnen: $h'(x) =$ _____

Aufgabe vom Typ ____

Zusatzüberlegung zur Bestimmung von x: $x =$ _____

Berechnung der Steigung m:

GCH Verlag

- d) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P, an dem die Funktion $p(x) = -2x^2 + 4$ die gleiche Steigung hat wie die Funktion $q(x) = 7x^2 + 2x - 5$ an ihrem y-Achsenabschnitt.

Hilfe: In dieser Aufgabe sind beide Aufgabenteile enthalten. Die Aufgabe muss daher in zwei Teilaufgaben zerlegt werden.

Example Text: Tabular Form Typ 1:

Bestimmung der Steigung der Funktion $q(x)$ in ihrem y-Achsenabschnitt.

Le schéma

... vom Typ 2:

...nennen, für welche Koordinaten die Funktion $p(x)$ die ... berechnete Steigung hat.

- e) Berechnen Sie die Steigung der Funktion $f(x) = x^3 + 2x - 1$ im Schnittpunkt mit der Geraden $g(x) = -x + 3$

Aufgabe vom Typ ____

Nebenrechnung zur Bestimmung von x:



Bestimmung der Steigung m: $m = f'(\text{____}) =$

Ergebnis: Für die Steigung gilt $m = 5$

- f) Gegeben sind die Funktionen $u(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 3x$ und $v(x) = 2x - \frac{2}{3}x^3$.

An welchen Stellen haben beide Funktionen die gleiche Steigung?

Hilfe: Hier ist die Stelle x mit einer bestimmten Steigung gesucht, aber keine Angabe vom Typ _____. Da m jedoch nicht direkt ermittelt werden kann, aber beide Steigungen gleich sein sollen, liefert der folgende Ansatz die Lösung.

Steigung $u(x) =$ Steigung

$u'(x) = v'(x)$



Ergebnis: $x_1 = 1$ und $x_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$

Aufgabe 3.3

Ermitteln der Tangente / Normale in einem bekannten Punkt der Funktion

Information:

Die **Normale** ist eine Gerade, welche orthogonal zur Tangente bzw. im Berührungspunkt von Tangente und Kurve orthogonal zur Kurve verläuft.

Es gibt unterschiedliche Möglichkeiten, die Gleichung einer Tangente zu ermitteln. Die hier verwendete Methode entspricht von der Struktur dem Vorgehen, das Sie bei der analytischen Ermittlung von Geradengleichungen angewendet haben, wenn Sie das 1. Semester im Heftbuch „Grundlegendes zu Algebra und Funktionen“ durchgearbeitet haben.

Verdeutlichen Sie sich jeweils die Vorgehensweise zur Ermittlung der Tangenten und Normalen für die Ausgangsfunktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$. Erläutern Sie die Bedeutung der Angaben der Aufgaben (1) bis (4).

Tangente: $y = m_t x + b_t$ in der Stelle $x =$	Normale: $y = m_n x + b_n$ in der Stelle $x = 2$
(1) $x = 2$	(1) $x = 2$
(2) $y = f(2) = 2 + 2 = 4$	(2) $y = f(2) = 2 + 2 = 4$
(3) $m_t = f'(2) = 1 + x = 3$	(3) $m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{f'(2)} = -\frac{1}{3}$
(4) $b_t = y - m_t x = 4 - 3 \cdot 2 = -2$	(4) $b_n = y - m_n x = 4 - (-\frac{1}{3}) \cdot 2 = \frac{14}{3}$
Tangente: $t(x) = 3x - 2$	Normale: $n(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{14}{3}$
(1) _____	(1) _____
(2) _____	(2) _____
(3) _____	(3) _____
(4) _____	(4) _____

Übungen: _____

Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Differenzialrechnung selbstorganisiertes Lernen

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)$$

Kapitel

Anwendung der Differenzialrechnung
an Funktionsgraphen

Kapitel 1: Grenzwertbetrachtungen	11
Kapitel 2: Einführung in die Differenzialrechnung	43
Kapitel 3: Grundlegende Anwendung der Differenzialrechnung	63
Kapitel 4: Anwendung der Differenzialrechnung – Verlauf von Funktionsgraphen	71
Kapitel 5: Rekonstruktion von ganzrationalen Funktionen	101
Kapitel 6: Extremwertaufgaben	121
Kapitel 7: Produkt- Quotienten- und Kettenregel	135
Kapitel 8: Ableitung von Exponentialfunktionen	157
Kapitel 9: Ableitung der Logarithmusfunktion	165

Kapitel 4: Anwendung der Differenzialrechnung – Verlauf von Funktionsgraphen

Anhand des Wachstums von Blattgemüse wurden in Aufgabe 2.1 die grundlegenden Zusammenhänge zwischen der Steigung einer Funktion, ihrer Tangenten und der Bedeutung der Steigung als Maß für den täglichen Zuwachs, also der **Wachstumsrate** der Pflanzen, mit zeichnerischen Methoden bearbeitet.

Zur Erinnerung:

In Aufgabe 2.1 wurde mit zeichnerischen Methoden festgelegt:

- Die Steigung der Tangente an einer Kurve gibt die Wachstumsrate der Funktionswerte an.
- Die Wachstumsrate der Funktionswerte ist dann am größten, wenn die Steigung der Funktion am größten ist.
- Die Kurve, welche die Wachstumsrate der Funktionswerte darstellt, hat ihren Maximumpunkt bei der größten Steigung der Ausgangsfunktion (vgl. Kasten Zusammenfassung der Erkenntnisse aus Aufgabe 2.1).

Im Folgenden soll diese Aufgabe unter dem Gesichtspunkt, dass die Bewässerung der Pflanzen automatisch durch einen Computer gesteuert werden soll, nun erneut aufgegriffen werden. Für eine Computergesteuerung muss ein Programm geschrieben werden. Das bedeutet, dass es nun nicht mehr ausreicht eine Frage zu untersuchen, für die lediglich eine Wertetabelle vorliegt, sondern man benötigt für die Programmierung einen Funktionsterm, der das Wachstum beschreibt. Eine mögliche

Funktion für das Wachstum unserer Pflanzen ist in dem relevanten Bereich durch $g(t) = -\frac{1}{25}t^3 + \frac{3}{5}t^2$

beschrieben. Die Ermittlung dieser Funktion, also der Vorgang für einen anwendungsbezogenen Prozess ein mathematisches Modell zu entwickeln, wird in der Mathematik auch als Modellierung bezeichnet. Die Modellierung der Funktion $g(t)$ wird später in Kapitel 5 aufgegriffen und soll an dieser Stelle nicht weiter vertieft werden, da nun zunächst die Untersuchung des Verlaufs von Funktionen mit Hilfe der neu erlernten Methoden der Differenzialrechnung im Fokus steht.

Aufgabe

Graph der Funktion $g(t) = -\frac{1}{25}t^3 + \frac{3}{5}t^2$
ist in Abb. 4.1.1 dargestellt.

a) Vergleich und 4.1

Maße für die Funktion $g(t)$ im
Wertebereich $[0;10]$ einigermaßen
auf der modellierten Kurve

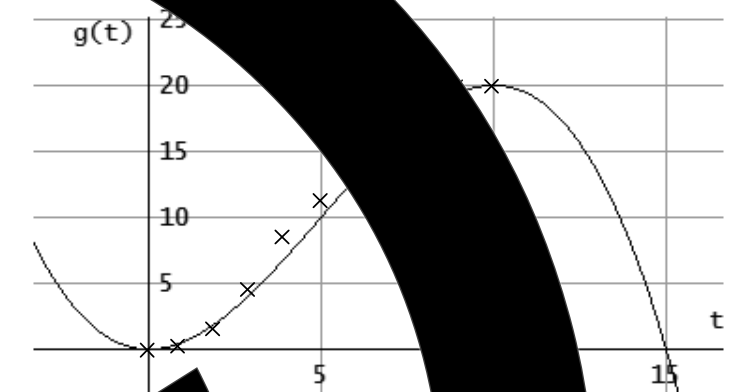


Abb. 4.1.1

b) Berechnungen zur Steigung der Kurven

In Aufgabe 2.1 wurde die Kurve für das Wachstum mit den Werten der Tabelle 1 gezeichnet und die Steigung der Funktion näherungsweise mit Hilfe der eingezeichneten Tangenten bzw. den zugehörigen Steigungsdreiecken zeichnerisch ermittelt. Die Differenzialrechnung kann die Möglichkeit, die Steigungen der modellierten Funktion $g(t)$ rechnerisch zu bestimmen. Zeichnen Sie dazu zunächst an den Stellen $t = 0$, $t = 0,5$, $t = 5$ und $t = 10$ Tangenten an den modellierten Graphen $g(t)$ und berechnen Sie anschließend die Steigung der eingezeichneten Tangenten und damit gleichzeitig der Kurve an diesen Stellen.

Funktion: $g(t) = -\frac{1}{25}t^3 + \frac{3}{5}t^2$

Ableitung: $g'(t) =$ _____

Steigung an der Stelle $t = 0$: $g'(0) =$ _____

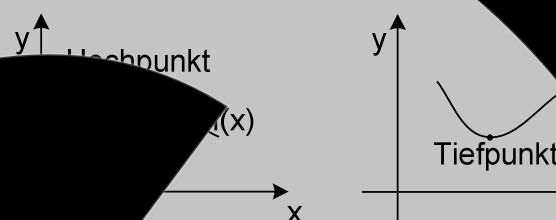
Steigung an der Stelle $t = 0,5$: $g'(0,5) =$ _____

Steigung an der Stelle $t = 5$: $g'(5) =$ _____

Steigung an der Stelle $t = 10$: $g'(10) =$ _____

Information 1

Die Funktion $f(x)$ hat an den Stellen $x = 0$ und $x = 10$ jeweils den Wert 0. Man kann solche, für die Funktion charakteristische Stellen, mit den Begriffen **Hochpunkt** und **Tiefpunkt TP** bezeichnen.

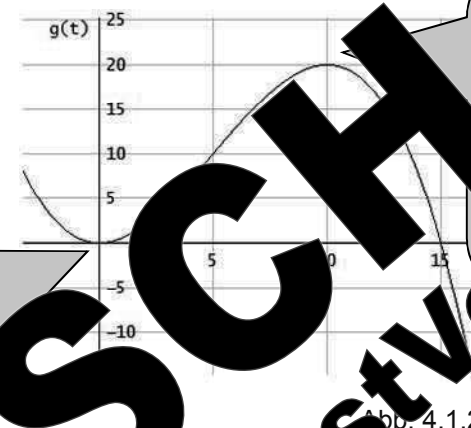


c) Untersuchung von Funktionen auf Hoch- und Tiefpunkte

- (1) Lesen Sie zunächst die Informationen in den Sprechblasen und erläutern Sie, warum man die Begriffe Minimum und Maximum durch den Zusatz lokal bzw. relativ ergänzen muss. Ergänzen Sie den nachfolgenden Text vervollständigen.

Information 2:

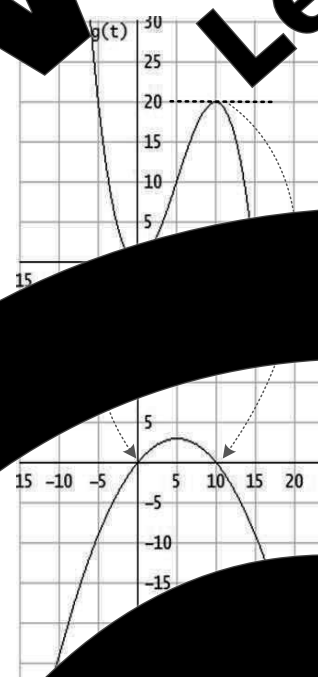
Wenn eine Funktion an einer Stelle mit einer waagerechten Tangente einen **Tiefpunkt TP** besitzt, bezeichnet man das auch als lokales oder relatives **Minimum** oder **Extremwert** einer Funktion.



Information 3:
Wenn eine Funktion an einer Stelle mit einer waagerechten Tangente einen **Hochpunkt HP** besitzt, bezeichnet man das auch als lokales oder relatives **Maximum** oder **Extremwert** einer Funktion.

Der Zusatz lokal bzw. relativ bei den Begriffen Minimum und Maximum ist notwendig, da

- (2) Betrachten Sie sich Abb. 4.1.3 und ergänzen Sie den Lückentext sowie den nachfolgenden Satz.



Die Tangenten an den Hoch- und Tiefpunkten der Funktion $g(t)$, also an den Stellen $t =$ _____ und $t =$ _____, verlaufen die Tangenten _____ und der Graph von $g(t)$ hat hier die Steigung _____. Genau an den Stellen $t = 0$ und $t = 10$ liegen die Stellen der Ableitungsfunktion $g'(t)$. Das bedeutet, dass die Stellen der Ableitungsfunktion $g'(t)$ die Hoch- und Tiefpunkte bei der Funktion $g(t)$ angeben. Die Ableitungsfunktion $g'(t)$ stellt die Steigung der Funktion _____ dar. Man kann bei der Funktion $g(t)$ die Stellen mit Hoch- und Tiefpunkten, d.h. die Extremwerte der Funktion $g(t)$ berechnen, indem man die Nullstellen der Ableitungsfunktion $g'(t)$ ermittelt.

Die Extremwerte von $g(t)$: $g'(t) =$ _____

2 Berechnung Extremwerte einer Funktion

Man kann die Stellen, an denen eine Funktion $f(x)$ **Extremwerte**, d.h. **Hochpunkte** oder **Tiefpunkte** besitzt, berechnen, indem man die _____ der Funktion $f(x)$ Null setzt. Die entstandene Gleichung $f'(x) = 0$ löst man.

(3) Berechnung der Hoch- und Tiefpunkte am Beispiel der Funktion $g(t)$

$$g(t) = -\frac{1}{25}t^3 + \frac{3}{5}t^2$$

$$g'(t) = \quad t^2 + \quad t$$

$$\text{Extremwert: } g'(t) = 0$$

$$= 0$$

$$= 0$$

$$3t(-t + 10) = 0$$

$$-t = -10$$

Berechnung der y-Werte

$$g(10) = 40 + 60 = 100$$

$$g(10) = 40 + 60 = 100 \quad \text{HP}(10/20)$$

d) Untersuchung lokaler Extremstellen einer Funktion

Nun, da Sie nun wissen haben, dass man über die Berechnung der Nullstellen einer Ableitung die Extremwerte der ursprünglichen Funktion berechnen kann, soll im Folgenden untersucht werden, wie man mathematisch die Stelle findet, an der die Gemüsepflanzen die größte Zuwachsrage haben, also die größte Wasserschleife benötigen. Dazu werden erneut die Funktionsgraphen von $g(t)$ und von $g'(t)$ herangezogen. Vervollständigen Sie den Lückentext.

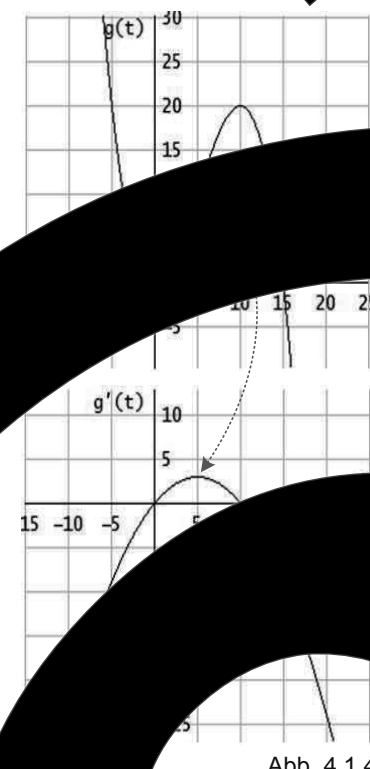


Abb. 4.1.4

Sie wissen bereits aus Aufgabe 2.1, dass die Pflanzen im Intervall $[0; 10]$ an der Stelle mit der _____ Steigung der Funktion $g(t)$ auch die größte Zuwachsrage haben. Das ist am

also zum Zeitpunkt $t = \underline{\quad}$ der Fall. Wenn man nun die

Ableitungsfunktion $g'(x)$ untersucht, stellt man

an dieser Stelle

einen _____ Wenn man die x-Koordinate des

Hochpunkts von $g(t)$ betrachtet, so findet man also gleichzeitig die

Stelle mit dem _____ von $g(t)$. Laut Merksatz

auf der vorangegangenen Seite sind dies die Stellen, an denen

Extremwerte vorliegen, indem man _____ einer

Funktion Null setzt. Das bedeutet hier, dass die

Ableitungsfunktion von $g'(x)$ _____, d.h. man

muss nun $g'(x)$ ableiten. Damit hat man die Funktion

$g(x)$ _____ mal abgeleitet. Man bezeichnet die nun

entstandene Funktion als die **zweite Ableitung** $g''(x)$ und

kennzeichnet dies mit zwei Strichen als $g''(x)$.

(Sprich: „g zweites“)

Ergänzende Information zur Stelle mit der größten Steigung

Stellen Sie sich vor, dass das Koordinatensystem in der Abbildung rechts auf der ebenen Erdoberfläche liegt (kein Berg!), und die eingezeichnete Kurve den Verlauf einer ebenen Straße darstellt, auf der Sie mit einem Fahrrad entlang fahren. Sie fahren gerade durch die Linkskurve auf die Rechtskurve zu. Markieren Sie die Stelle, an der sich der Einschlag des Lenkers von links nach rechts ändert, und vergleichen Sie die Position der Stelle mit der größten Zuwachsrage in Abb. 4.1.4



Vergleich: Die Stelle mit der größten Zuwachsrage und die Stelle, an der die Kurve von einer Links- in eine Rechtskurve übergeht, sind _____, da sich das **Verhaltens-**

verhalten der Kurve hier wandelt. Man bezeichnet diesen Punkt als **Wendepunkt** oder **Wendestelle**.

Berechnung des Wendepunkts am Beispiel von $g(t)$

$$g(t) = -\frac{1}{25}t^3 + \frac{3}{5}t^2$$

$$g'(t) = -\frac{3}{25}t^2 + \frac{6}{5}t$$

$$g''(t) = -\frac{6}{25}t + \frac{6}{5}$$

$$\text{Wendepunkt: } g''(t) = 0$$

$$= 0$$

$$=$$

Berechnung des y-Wertes

$$g(5) = -\frac{1}{25}125 + \frac{3}{5}25 = 10 \quad \text{WP}(5/10)$$

Das Ergebnis bestätigt den abgelesenen Wert.

Merksatz Berechnung von Wendepunkten

Man kann den **Wendepunkt WP** einer Funktion $f(x)$ berechnen, indem man die zweite Ableitung $f''(x)$ Null setzt und die entstandene Gleichung $f''(x) = 0$ nach x auflöst. An dieser Stelle ändert die Funktion ihre Krümmung und geht von einer _____ Kurve über. Liegt der Wendepunkt zwischen zwei Extremwerten, so ist die Kurve im Wendepunkt lokal die _____ Steigung und die Funktionswerte _____ rate.

Aufgabe 4.2

Die Wendetangente

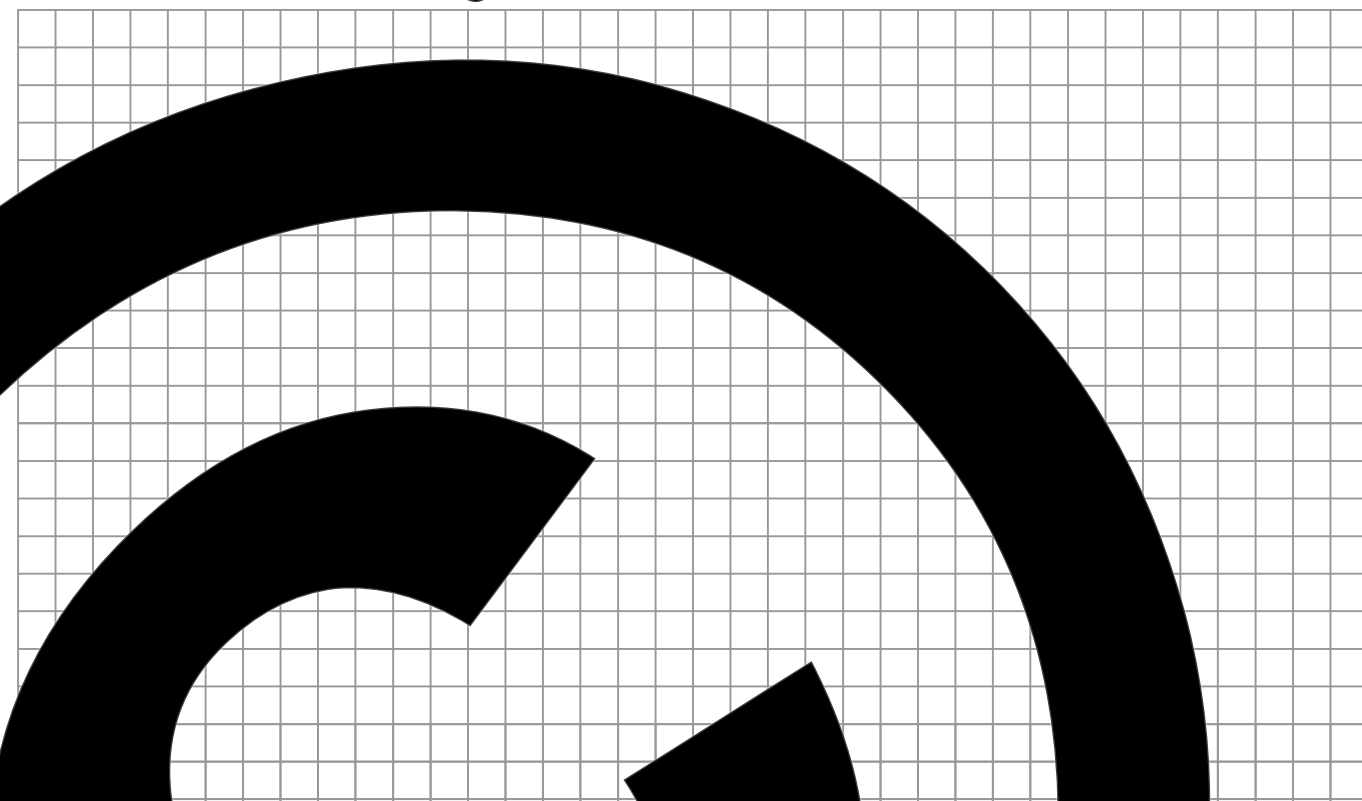
Sie haben anhand des Bewässerungsproblems der Gewächshauspflanzen gelernt, dass die Ableitung einer Funktion eine zentrale Rolle spielen und gelernt, wie man diese Punkte rechnerisch bestimmen kann. In den folgenden, nun rein formalen, Aufgabenstellung sollen die bisher gewonnenen Kenntnisse im Themenbereich Differenzialrechnung wiederholt, gefestigt und erweitert werden.

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x$.

- a) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion auf zwei Dezimalstellen genau.
- b) Berechnen Sie die Koordinaten der Extremwerte auf zwei Dezimalstellen genau.
- c) Zeigen Sie, dass der Wendepunkt die Koordinaten $WP(-1 \mid -2)$ hat.
- d) Ermitteln Sie die Gleichung der Wendetangente mit einem Minimalschrittverfahren. Verwenden Sie dazu ggf. das Beispiel von Aufgabe 3.3. als Hilfe.

Eine Gerade, welche im Wendepunkt tangential zur Kurve verläuft, wird als **Wendetangente** bezeichnet, obwohl sie die Kurve nicht nur berührt, sondern auch schneidet. (Vgl. Aufgabe 2.1 g))

Raum für Rechnungen:



Aufgabe 4.3

Die Bedeutung der zweiten Ableitung als hinreichendes Kriterium für das Vorliegen von Hoch- und Tiefpunkten

Gegeben ist die Funktion $f(x) = -0,25x^3 + 0,75x^2$. Bearbeiten Sie die Aufgabenteile a) bis e) und fertigen Sie anschließend mit den Hinweisen in f) ein Zeichnung des Graphen von $f(x)$ an.

- a) Begründen Sie, dass bei $f(x)$ für $x \rightarrow \pm\infty$ gilt:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \rightarrow -\infty \text{ und } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \rightarrow +\infty$$

Die Funktion $f(x)$ verhält sich für $x \rightarrow \pm\infty$ wie

die Funktion $f(x) =$

- b) Ermitteln Sie die erste und zweite Ableitung der Funktion $f(x)$.

$$f'(x) =$$

- c) Zeigen Sie durch Rechnung, dass die Funktion $f(x)$ an den Stellen 0 und 3 jeweils eine Nullstelle hat. Tragen Sie die Punkte im Koordinatensystem in Abb. 4.3.1 ein und ergänzen Sie anschließend den nachfolgenden Satz.

Nullstelle

$$f(x) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 0$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0$$

$$\Rightarrow f''(x) =$$

$$\Rightarrow N_{1,2}(\text{ } / \text{ }) \text{ und } (\text{ } / \text{ })$$

Die Bestimmung der Nullstellen liefert an der Stelle $x = 0$ eine Lösung. Damit

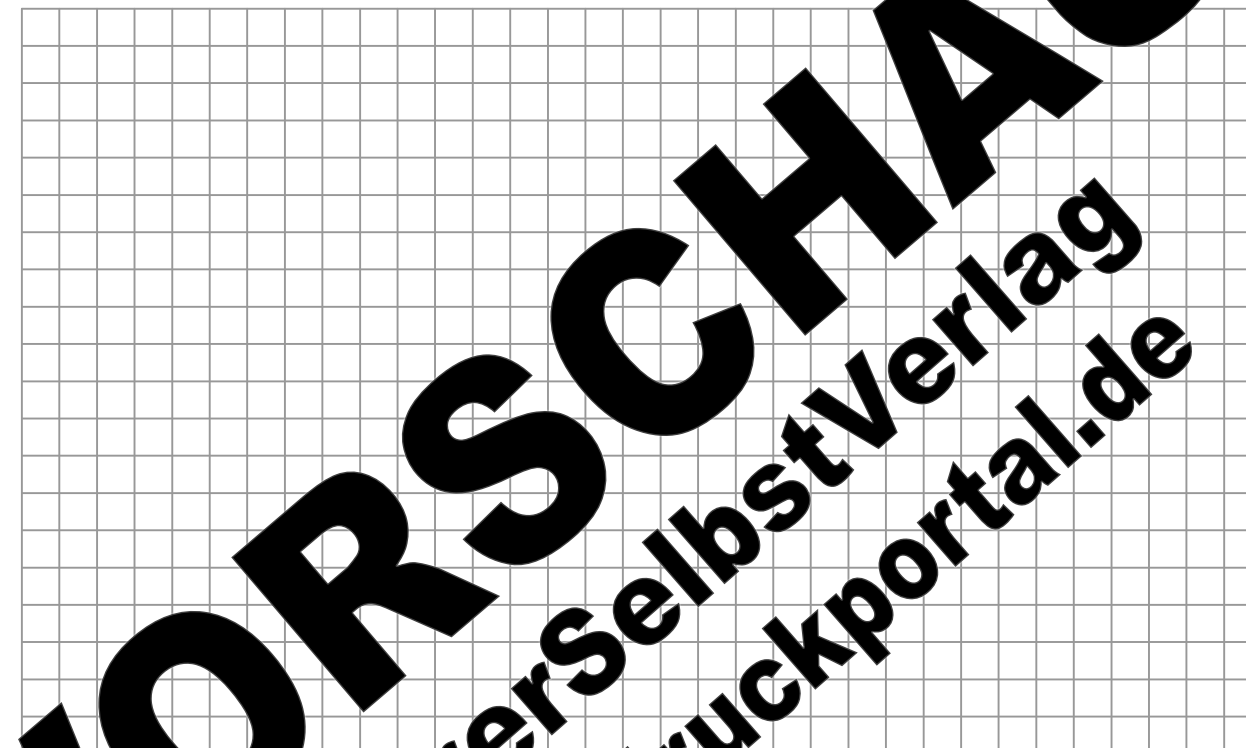
ist bereits bei der Berechnung der Nullstellen die Information, dass hier ein Wendepunkt und

Wert vorliegt.

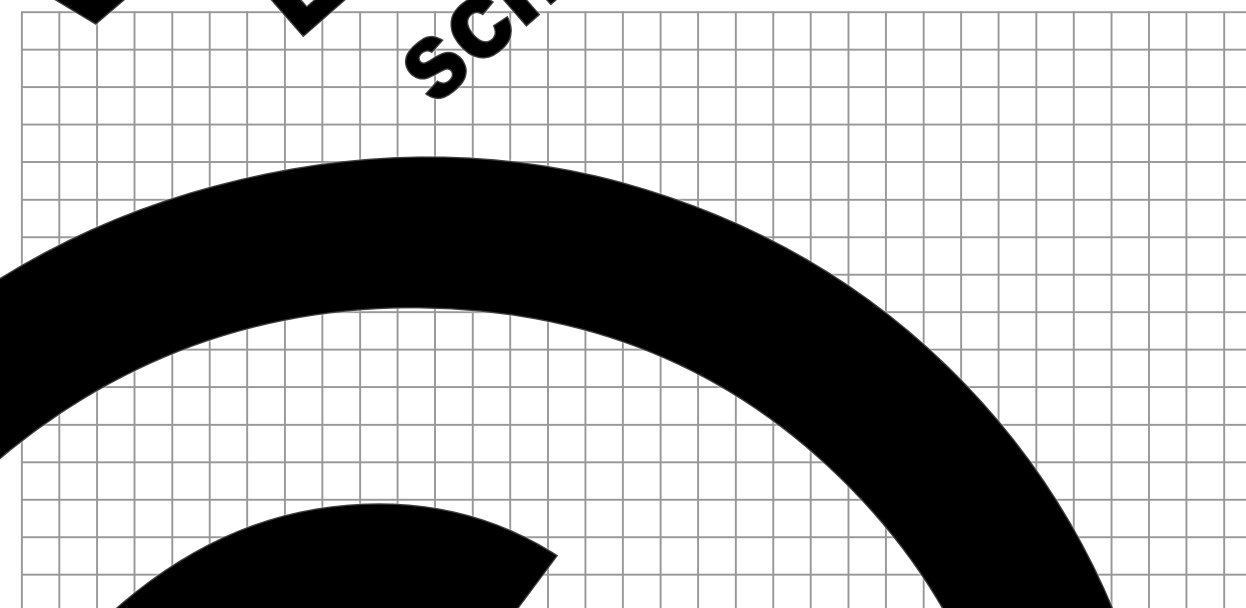


Abb. 4.3.1

- d) Zeigen Sie durch Rechnung, dass die Funktion, außer im Ursprung, im Punkt $(2/1)$ einen weiteren Extremwert besitzt. Tragen Sie die Koordinaten als Punkte im Koordinatensystem in Abb. 4.3.1 ein.



Berechnen Sie durch Rechnung, dass der Wendepunkt die Koordinaten WP(1/0,5) hat, und tragen Sie diesen Punkt ebenfalls im Koordinatensystem ein.



- f) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion

aus allen eingetragenen Punkten und einer Betrachtung des Verhaltens für $x \rightarrow \pm\infty$ kann erkennen, dass der Extremwert im Ursprung ein Wendepunkt und der Extremwert an der Stelle $x = 2$ ein Hochpunkt sein muss. Wie man rechnen kann, um zu zeigen, ob es sich um einen TP handelt, wird im Aufgabenteil g) erläutert. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion, indem Sie die Punkte verbinden.

g) Die Bedeutung der zweiten Ableitung für das Vorliegen von Hoch- und Tiefpunkten

In den folgenden Abbildungen sind die Funktion $f(x) = -0,25x^3 + 0,75x^2$ sowie zwei weitere beliebig gewählte Funktionen abgebildet. Zu jeder Funktion ist im gleichen Diagramm die zweite Ableitung dargestellt. Vergleichen Sie in allen Abbildungen, welches Vorzeichen die Werte der zweiten Ableitung an den Stellen haben, an denen die jeweilige Ausgangsfunktion Hoch- und Tiefpunkte hat.

$$f(x) = -0,25x^3 + 0,75x^2$$

$$f'(x) = -0,75x^2 + 1,5x$$

$$f''(x) = -1,5x + 1,5$$

Am Tiefpunkt der Funktion $f(x)$ hat der Funktionswert

$f''(x)$ ein _____ Vorzeichen.

Am Hochpunkt der Funktion $f(x)$ hat der Funktionswert von

$f''(x)$ ein _____ Vorzeichen.

$$f(x) = x^3 - 2x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2$$

$$f''(x) = 6x$$

Am Tiefpunkt der Funktion $f(x)$ hat der Funktionswert von

$f''(x)$ ein _____ Vorzeichen.

Am Hochpunkt der Funktion $f(x)$ hat der Funktionswert von

$f''(x)$ ein _____ Vorzeichen.

$$f(x) = 0,25x^4 - 2x^2 + 1$$

$$f'(x) = x^3 - 4x$$

$$f''(x) = 3x^2 - 4$$

Jeweils ein _____ Vorzeichen.

Am Hochpunkt der Funktion $f(x)$ hat der Funktionswert von

$f''(x)$ ein _____ Vorzeichen.

Aus den drei Beispielen ist der Zusammenhang zwischen dem Vorzeichen der zweiten Ableitung und dem Vorzeichen der zweiten Ableitung an den Stellen

Merkmale, die mit waagerechter Tangente bzw. mit der Steigung Null liegt, sind die notwendigen Bedingungen, die erfüllt sind, damit ein Punkt einer Funktion ein Hoch- oder Tiefpunkt ist. Der Funktionswert der zweiten Ableitung _____.

Am Hochpunkt einer Funktion ist der Funktionswert der zweiten Ableitung _____.

Am Tiefpunkt einer Funktion ist der Funktionswert der zweiten Ableitung _____.

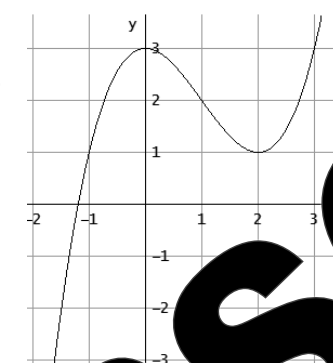
Aufgabe 4.4

Zusammenfassung und Vertiefung bisheriger Erkenntnisse zur Bedeutung der Ableitungen

Ermitteln Sie die x-Koordinaten der charakteristischen Stellen jeweils der Ableitung und ergänzen Sie anhand der Ergebnisse fehlende Angaben bzw. markieren Sie die richtigen Angaben. Vervollständigen Sie anschließend den Merksatz auf der folgenden Seite.

Funktion:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3$$



Charakteristische Stellen von $f(x)$

Nullstelle 1 von $f'(x)$: $x = -1,2$

relatives Maximum (HP) von $f(x)$: $x = \underline{\hspace{2cm}}$

relatives Minimum (TP) von $f(x)$: $x = \underline{\hspace{2cm}}$

Umgang Hoch- in Linkskurve bzw. Wendepunkt (WP) von $f(x)$: $x = \underline{\hspace{2cm}}$

1. Ableitung

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 3x$$

Charakteristische Stellen von $f'(x)$

Nullstelle 1 von $f'(x)$: $x = \underline{\hspace{2cm}}$

Nullstelle 2 von $f'(x)$: $x = \underline{\hspace{2cm}}$

relatives Minimum (TP) von $f'(x)$: $x = \underline{\hspace{2cm}}$

2. Ableitung

$$f''(x) = 3x - 3$$

Charakteristische Stellen von $f''(x)$

Nullstelle von $f''(x)$: $x = \underline{\hspace{2cm}}$

Vergleich der charakteristischen x-Werte:

- Wenn die Funktion einen Hochpunkt hat, sind die Funktionswerte von $f'(x)$ positiv / negativ / null.
- Wenn die Funktion einen Tiefpunkt hat, sind die Funktionswerte von $f'(x)$ positiv / negativ / null.
- Die Nullstelle 1 von $f'(x)$ ist die Nullstelle von _____.
- Die Nullstelle 2 von $f'(x)$ ist die Nullstelle von _____.
- Der Wendepunkt von $f(x)$ ist die Nullstelle von _____.
- Am Hochpunkt von $f(x)$ sind die Funktionswerte von $f''(x)$ positiv / negativ / null.
- Am Tiefpunkt von $f(x)$ sind die Funktionswerte von $f''(x)$ positiv / negativ / null.

Die Bedingung, dass an Extremwerten die 1. Ableitung den Wert null annehmen muss, wird auch als **notwendige Bedingung** für einen Extremwert bezeichnet.

Die Bedingung, dass bei Vorzeichen eines Extremwerts die 2. Ableitung einer oder gar null sein muss, wird auch als **hinreichende Bedingung** für einen Extremwert bezeichnet.

Merke:

An den Hochpunkten einer Funktion $f(x)$ gilt $f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$.

An den Tiefpunkten einer Funktion $f(x)$ gilt $f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$.

Am Wendepunkt einer Funktion gilt:

Sie kennen jetzt wichtige Kriterien, mit denen man den Verlauf eines Funktionsgraphen untersuchen kann. Mit den bisher bekannten Kriterien in Aufgabe 4. wird jedoch deutlich, dass diese Kriterien, insbesondere bei ganzrationalen Funktionen 4. und höheren Grades, **nicht** ausreichen.

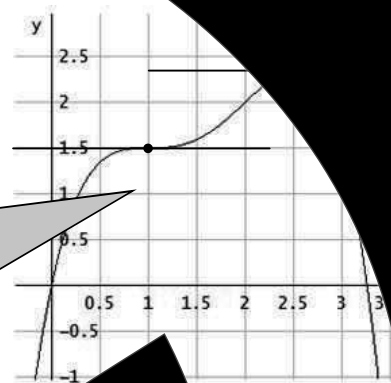
Aufgabe 4.5

Erweiterung der Betrachtungen von Funktionen mit Sattelpunkten und „topfförmigen Extremwerten“

a) Funktionen mit Sattelpunkten

Der Verlauf der Funktion einschließlich der Tangenten ist in Abb. 4.5.1 dargestellt.

Die Funktion hat an der Stelle $x = 1$ zwar eine waagerechte Tangente, aber keinen Hoch- oder Tiefpunkt. Man muss diese Stelle weiter untersuchen.



- (1) Ermitteln Sie die erste und zweite Ableitung der Funktion $f(x)$

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 3x^3 - 6x^2 + 5x$$

$$f'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f''(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

- (2) Berechnung von Extrema bzw. Stellen mit waagerechten Tangente. Ergänzen Sie die Rechnungen und den Text.

$$\text{Extremstellen: } f'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$-2x^3 + 9x^2 - 12x + 5 = 0$$

Da $x_1 = 1$ die Lösung ist, erhalte die Polynomdivision durch $(x - 1)$.

$$(-2x^3 + 9x^2 - 12x + 5) : (x - 1) = -2x^2 + 7x - 5$$

$$\underline{\hspace{2cm}} \quad \quad \quad -2x^2 + 7x - 5 = 0$$

$$\underline{\hspace{2cm}} \quad \quad \quad \underline{\hspace{2cm}} = 0$$

$$\underline{\hspace{2cm}} \quad \quad \quad x_{2,3} = \underline{\hspace{2cm}} \pm \sqrt{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} \pm \sqrt{\hspace{2cm}}$$

$$\underline{\hspace{2cm}} \quad \quad \quad x_{2,3} = \underline{\hspace{2cm}} \pm \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\underline{\hspace{2cm}} \quad \quad \quad x_2 = 2,5$$

$$\underline{\hspace{2cm}} \quad \quad \quad x_3 = 1$$

Zur Erinnerung:
Der Nachtest:
Für einen Extremwert muss $f''(x) > 0$ (Tiefpunkt) oder $f''(x) < 0$ (Hochpunkt) sein.

Die 2. Ableitung an einem HP kleiner als null ist, an einem TP größer als null ist.

Hinreichende Bed.: $f''(2,5) = -6 \cdot 2,5^2 + 18 \cdot 2,5 - 12 = -15 < 0$ liegt ein HP vor.
 $f''(1) = -6 \cdot 1^2 + 18 \cdot 1 - 12 = 0$ keine Untersuchung an dieser Stelle notwendig.

An der Stelle $x = 1$ nimmt den Wert null an. Da die 2. Ableitung für einen Hoch- oder Tiefpunkt nicht eindeutig ist, muss diese Stelle weiter untersuchen.

Hinweis: Ein Hinweis auf das Vorliegen eines Sattelpunktes besteht bei dieser Aufgabe darin, dass die Stelle $x = 1$ bei der Berechnung der Extremwerte auftritt.

- (3) Berechnung von Wendestellen bzw. Wendepunkten. Ergänzen Sie die Rechnung und den Text.

Wendestellen : $f''(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

$$-6x^2 + 18x - 12 = 0$$

$$\underline{\hspace{2cm}} = 0$$

$$x_{1,2} = \underline{\hspace{1cm}} \pm \sqrt{\underline{\hspace{1cm}}} = \underline{\hspace{1cm}} \pm \sqrt{\underline{\hspace{1cm}}} = \underline{\hspace{1cm}}$$

$$x_1 = 2 \quad \wedge \quad x_2 = 1$$

Da das notwendige Kriterium für einen Wendepunkt erfüllt ist, und bestimmt, dass die Funktion an den Stellen $x_1 = 2$ und $x_2 = 1$ einen Wendepunkt besitzt. Da Sie unter Punkt (2) bereits festgestellt haben, dass an der Stelle $x_2 = 1$ die 1. Ableitung den Wert annimmt, und die Tangente an dieser Stelle waagrecht verläuft, besitzt die Kurve an dieser Stelle einen Sattelpunkt, also einen Wendepunkt mit waagrechtlicher Wendetangente. Das dieses Untersuchungskriterium allein nicht ausreicht, um eindeutig auf einen Wendepunkt zu schließen, sondern dass man auch hier noch ein hinreichendes Kriterium benötigt, werden Sie anhand der folgenden Aufgabe erkennen.

Die Kurve kann mit „topfförmigem“ Hoch- oder Tiefpunkt

Gegeben ist die Funktion $h(x) = x^4 - 1$. Das ist eine um 1 nach unten verschobene Parabel 4. Grades, die man anhand der Regeln zur Verschieben von Funktionen skizzieren kann und die in Abb. 4.5.2 dargestellt ist.

Da die Kurve der Funktion „topfförmig“ (wie ein Topf) aussieht, wird in diesen Unterlagen der Begriff „topfförmiger“ Tief- bzw. Hochpunkt verwendet.

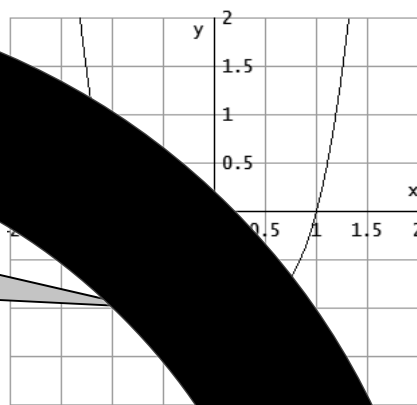


Abb. 4.5.2

- (1) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion $h(x)$.

$$h(x) = x^4 - 1$$

$$h'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$h''(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

- (2) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion sowie die Extremalstellen und Wendestellen, in dem Sie die folgenden Rechnungen vervollständigen. Vergleichen Sie die Ergebnisse jeweils mit Abb. 4.5.2, und ergänzen Sie den Ergebnistext.

Nullstellen : $h(x) = 0$

$$\underline{\hspace{2cm}} = 0$$

$$x^4 = 1$$

$$x = \pm \sqrt[4]{1}$$

$$x = \pm 1$$

Vergleich:

Das Ergebnis stimmt mit der Zeichnung

Extremwerte : $h'(x) = 0$

$$\underline{\hspace{2cm}} = 0$$

$$x^3 = 0$$

$$x_{1,2,3} = \underline{\hspace{1cm}} \quad (\text{Doppelte Lösung})$$

hinreichende Bedingung

$$h''(0) = 0 \Rightarrow \text{kein TP}$$

Die notwendige Bedingung für einen TP ist erfüllt, aber die hinreichende Bedingung ist nicht erfüllt, daher ist $x = 0$ kein TP.

Vergleich:

Das Ergebnis stimmt mit der Zeichnung überein

Das Ergebnis zeigt, dass die Funktion an der Stelle $x = 0$

die Steigung $\underline{\hspace{1cm}}$ hat.

Die hinreichende Bedingung für einen

Extremwert ist jedoch mit $f''(x) = 0$ nicht erfüllt,

obwohl die Funktion bei $x = 0$ tatsächlich einen

$\underline{\hspace{1cm}}$ punkt besitzt. D.h. man muss die

Stelle weiter untersuchen.

Wendepunkte : $h''(x) = 0$

Vergleich:

Das Ergebnis zeigt, dass die notwendige

Bedingung für einen Wendepunkt an der Stelle x

$\underline{\hspace{1cm}}$ ist, obwohl kein

Wendepunkt

Ergebnis:

Die Untersuchungsmethoden reichen nicht aus, um Hoch-, Tief- und Wendepunkte eindeutig zu bestimmen. Die Kriterien müssen ergänzt werden. Bisher:

Ermittlung Extremwerte: $h'(x) = 0$

Testen mit der 2. Ableitung $f''(x)$

Ermittlung Wendepunkte: $h''(x) = 0$

Testen mit ?

Es liegt nahe, die 3. Ableitung zu testen, um zu entscheiden, ob es sich um einen Hochpunkt, Tiefpunkt oder Wendepunkt handelt.

c) Die 3. Ableitung als Kriterium für das Vorliegen eines Wendepunkts

Die Verwendung der 3. Ableitung zur Bestätigung des Vorliegens von Wendepunkten soll empirisch anhand der bisher in Aufgabe 4.4, 4.5 a) und 4.5 b) untersuchten Funktionen vorgenommen werden. Markieren Sie jeweils die Wende- bzw. Sattelpunkte in den Funktionsgraphen, bilden Sie für die Funktionen jeweils die dritte Ableitung und setzen dann – basierend auf den x-Werten der Wende- und Sattelpunkte in die 3. Ableitung ein. Vergleichen Sie anschließend Ihre Ergebnisse, indem Sie den Lückentext auf der folgenden Seite ergänzen.

Aufgabe	Abbildung	Wende- bzw. Sattelpunkt an der Stelle x	3. Ableitung an der Stelle x
4.4		Wendepunkt bei x = 1	$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x$ $f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 3x + 3$ $f''(x) = 3x - 3$ $f'''(x) = 3$ $f'''(1) = 3$
4.5 a)		Wendepunkt bei x = 1	$f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 3x^3 - 6x^2 + 5x$ $f'(x) = -2x^3 + 9x^2 - 12x + 5$ $f''(x) = -6x^2 + 18x - 12$ $f'''(x) = -12x + 18$ $f'''(1) = -12 \cdot 1 + 18 = 6$ $f'''(2) = -12 \cdot 2 + 18 = -6$
4.5 b)		„topfförmiger“ Tiefpunkt bei x = 0	$f(x) = x^4 - 1$ $f'(x) = 4x^3$ $f''(x) = 12x^2$ $f'''(x) = 24x$ $f'''(0) = 0$

Vergleich:

Bei allen Funktionen, bei denen ein Wendepunkt bzw. auch ein Sattelpunkt vorliegt, ergibt sich beim Einsetzen der entsprechenden x-Werte in die 3. Ableitung der Funktion der Wert 0. Für die Funktion h(x), die an dieser Stelle einen „topfförmigen“ Tiefpunkt besitzt, ergibt sich der Wert 0. Da dieser Zusammenhang für andere Funktionen gleichermaßen gezeigt werden kann, soll der folgende Satz formuliert werden:

Überblick charakteristische Punkte in Funktionen

Charakteristischer Punkt	1. Ableitung	2. Ableitung	3. Ableitung
 Hochpunkt (HP) gilt:	notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$	hinreichende Bedingung: $f''(x) < 0$	
 Tiefpunkt (TP) gilt:	notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$	hinreichende Bedingung: $f''(x) > 0$	
 Am Wendepunkt WP gilt:	$f'(x) \neq 0$	notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$	hinreichende Bedingung: $f'''(x) \neq 0$
 Am Sattelpunkt SP gilt:	$f'(x) = 0$	notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$	hinreichende Bedingung: $f'''(x) \neq 0$
 Hochpunkt und Tiefpunkt gilt:		$f''(x) = 0$	$f'''(x) = 0$

Wichtig:

Die x-Werte, die sich bei den hinreichenden Bedingungen einsetzen, sind reine Testparameter und werden nicht zum Nachweis für das Vorliegen dieser charakteristischen Punkte benötigt.

Diese Werte dürfen auf keinen Fall mit dem Funktionswert f(x) an der Stelle x verwechselt werden. Funktionswerte erhält man, wenn man einen x-Wert in die Funktionsformel einsetzt.

Ergänzende Informationen zum Nachweis von charakteristischen Stellen:

Bei komplizierteren Funktionen ist es oftmals sehr aufwendig, den Nachweis für ein Hoch- oder Tiefpunkt bzw. für Wendepunkte über die hinreichenden Bedingungen nach $f''(x)$ bzw. $f'''(x)$ zu führen. Dies gilt vor allem, wenn bei der zweiten bzw. dritten Ableitung umfangreiche Rechnungen auftreten. Im Prinzip lassen sich die obigen Beispiele im Polynomgrad immer weiter erhöhen, so dass zum Nachweis – also der hinreichenden Bedingung für das Vorliegen von HP, TP, WP – die vierte, fünfte usw. Ableitung benötigt werden. Es ist auch möglich, den Nachweis wie folgt zu führen:

- (1) Wenn für die Ableitungsfunktion $f'(x)$ an der Stelle x_0 gilt:
- $f'(x_0) = 0$ und die Funktionswerte der Ableitungsfunktion an x_0
 - einen **Vorzeichenwechsel von – nach +** haben, so liegt bei x_0 ein **relatives Minimum** von $f(x)$ vor
 - einen **Vorzeichenwechsel von + nach –** haben, so liegt bei x_0 ein **relatives Maximum** von $f(x)$ vor
 - **keinen Vorzeichenwechsel** haben, so liegt bei x_0 ein **Sattelpunkt** von $f(x)$ vor

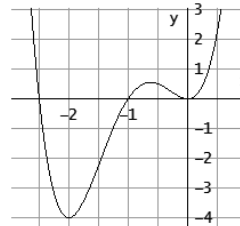
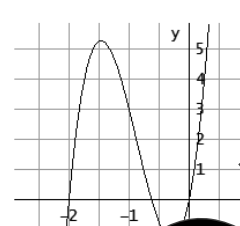
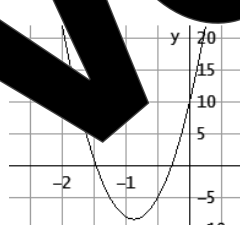
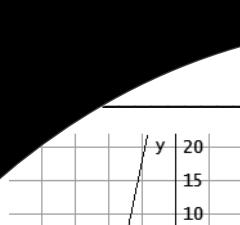
- (2) Argumentative Begründungen für das Vorliegen von Extremwerten, Wendepunkten bzw. Sattelpunkten unter Anwendung einer mathematisch korrekten Fachterminologie, wenn aus bereits vorgelegten Darstellungen eindeutig auf den Verlauf der Funktion geschlossen werden kann. Gegebenenfalls kann auch auf Wertetabellen zurückgegriffen werden.

Übung 4.1

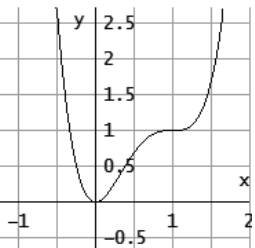
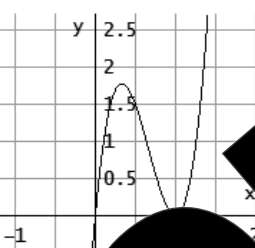
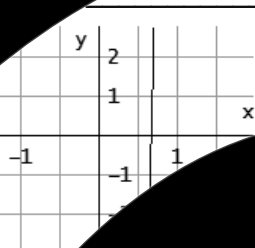
Anhand der dieser Übung sollen die oben formulierten Zusammenhänge zwischen dem Verlauf einer Funktion, den Ableitungen sowie notwendigen und hinreichenden Bedingungen geübt und vertieft werden.

Wendepunkte sind für die Untersuchung des Verlaufs von Funktionen an. Anhand der Ableitungen dargestellt und die Stellen, an denen Hoch-, Tief- und Wendepunkte liegen, sind jeweils zu markieren und müssen **nicht erneut berechnet** werden. Für jede der gegebenen Funktionen gilt die folgende Aufgabenstellung.

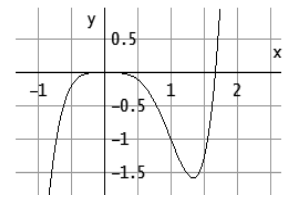
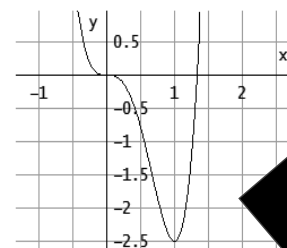
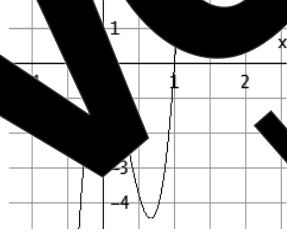
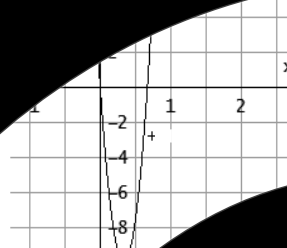
- a) Berechnen Sie jeweils die Ableitungen der gegebenen Funktionen $f(x)$ und $h(x)$ und tragen Sie die Funktionsterme in die entsprechenden Stellen ein.
- b) Markieren Sie jeweils Hoch- und ggf. Sattelpunkte jeweils in Abb. 4.5.3a, 4.5.4a und 4.5.5a.
- c) Prüfen Sie, indem Sie die bereits gegebenen Werte in die entsprechenden Bedingungen einsetzen, ob die notwendigen Bedingungen erfüllt sind. Kreuzen Sie danach an, welche Schlussfolgerungen aus dem Ergebnis von Hoch-, Tief-, Wende- bzw. auch Sattelpunkten aus dem Ergebnis der hinreichenden Bedingungen gezogen werden können. Runden Sie dabei sinnvoll.
- d) Ziehen Sie jeweils ein Ergebnis, indem Sie den Text ausfüllen.

Funktion	Bereits vorgebene bzw. berechnete Werte
$f(x) = 2x^4 + 7x^3 + 5x^2$  Abb. 4.5.3a	$f'(x) = 0$ ergibt $x_1 = -2$ $x_2 = 0$ $x_3 = -\frac{5}{8} = -0,625$ $f''(x) = 0$ ergibt $x_1 \approx -1,466$ $x_2 \approx -0,284$ Markieren Sie die Hoch-, Tief- und Wendepunkte in Abb. 4.5.3a.
1. Ableitung $f'(x) =$  Abb. 4.5.3b	Die notwendige Bedingung für Extremwerte ist: $f'(-2) =$ ☐ erfüllt ☐ nicht erfüllt $f'(-0,625) =$ ☐ erfüllt ☐ nicht erfüllt $f'(0) =$ ☐ erfüllt ☐ nicht erfüllt
2. Ableitung $f''(x) =$  Abb. 4.5.3c	Überprüfung hinreichende Bedingung für Extremwerte: $f''(-2) =$ ☐ OTP ☐ OHP ☐ Vermut. SP $f''(-0,625) =$ ☐ OTP ☐ OHP ☐ Vermut. SP $f''(0) =$ ☐ OTP ☐ OHP ☐ Vermut. SP Die notwendige Bedingung für Wendepunkte ist: Runden Sie sinnvoll. $f'''(-1,466) =$ ☐ erfüllt ☐ nicht erfüllt $f'''(-0,284) =$ ☐ erfüllt ☐ nicht erfüllt
 Abb. 4.5.3d	Überprüfung hinreichende Bedingung für Wendepunkte: $f'''(-1,466) \approx$ ☐ WWP und OSP $f'''(-0,284) \approx$ ☐ WWP und OSP

Entsprechend zur Abbildung zeigen die Berechnungen, dass die Funktion $f(x)$ an den Stellen $x =$ jeweils einen Tiefpunkt, an der Stelle $x =$ einen Wendepunkt und an der Stelle $x =$ sowie $x =$ einen Hochpunkt besitzt.

Funktion $g(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$  Abb.4.5.4a	Bereits berechnete Werte: $g'(x) = 0$ ergibt $x_1 = 0$ $x_2 = 1$ $g''(x) = 0$ ergibt $x_1 = \frac{1}{3}$ $x_2 = 1$ Markieren Sie die H- und W-Punkte in Abb. 4.5.4a.
1. Ableitung $g'(x) =$ _____  Abb. 4.5.4b	Die notwendige Bedingung für Extremwerte ist: $g'(0) =$ _____ ☐ erfüllt ☐ nicht erfüllt $g'(1) =$ _____ ☐ erfüllt ☐ nicht erfüllt
2. Ableitung $g''(x) =$ _____  Abb. 4.5.4c	Überprüfung hinreichende Bedingung für Extremwerte: $g''(0) =$ _____ $\Rightarrow$ ☐ TP ☐ HP ☐ Vermutung SP $g''(1) =$ _____ $\Rightarrow$ ☐ TP ☐ HP ☐ Vermutung SP Die notwendige Bedingung für Wendepunkte ist: $g''(\frac{1}{3}) =$ _____ ☐ erfüllt ☐ nicht erfüllt $g''(1) =$ _____ ☐ erfüllt ☐ nicht erfüllt
	Überprüfung hinreichende Bedingung für Wendepunkte: $g'''(\frac{1}{3}) =$ _____ ☐ WWP und ☐ OSP $g'''(1) =$ _____ ☐ WWP und ☐ OSP

Entsprechend zur Abbildung zeigen die Berechnungen, dass die Funktion an der Stelle $x = 0$ einen Tiefpunkt, an der Stelle $x = 1$ einen Wendepunkt und an der Stelle $x = \frac{1}{3}$ einen Wendepunkt besitzt.

Funktion $h(x) = 1,5x^5 - 2,5x^4$  Abb.4.5.5a	Bereits berechnete bzw. vorgegebene Werte: $h'(x) = 0$ ergibt $x_1 = 0$ $x_2 = \frac{4}{3}$ $h''(x) = 0$ ergibt $x_1 = 0$ $x_2 = 1$ Markieren Sie die H- und W-Punkte in Abb. 4.5.5a.
1. Ableitung $h'(x) =$ _____  Abb. 4.5.5b	Die notwendige Bedingung für Extremwerte ist: $h'(0) =$ _____ ☐ erfüllt ☐ nicht erfüllt $h'(\frac{4}{3}) =$ _____ ☐ erfüllt ☐ nicht erfüllt
2. Ableitung $h''(x) =$ _____  Abb.4.5.5c	Überprüfung hinreichende Bedingung für Extremwerte: $h''(0) =$ _____ $\Rightarrow$ ☐ TP ☐ HP ☐ Vermutung SP $h''(\frac{4}{3}) =$ _____ $\Rightarrow$ ☐ TP ☐ HP ☐ Vermutung SP Die notwendige Bedingung für Wendepunkte ist: $h''(0) =$ _____ ☐ erfüllt ☐ nicht erfüllt $h''(1) =$ _____ ☐ erfüllt ☐ nicht erfüllt
3. Ableitung $h'''(x) =$ _____  Abb. 4.5.5d	Überprüfung hinreichende Bedingung für Wendepunkte: $h'''(0) =$ _____ ☐ WWP und ☐ OSP $h'''(\frac{2}{3}) =$ _____ ☐ WWP und ☐ OSP

Ergebnis: Die Berechnungen zeigen die Berechnungen, dass die Funktion an der Stelle $x = 0$ einen Tiefpunkt und an der Stelle $x = \frac{4}{3}$ einen Wendepunkt besitzt. Die Funktion hat die Form einer waagerechten Tangente. Die hinreichende Bedingung für Wendepunkte ist, dass hier $h'''(x) \neq 0$ vorliegen kann. Es handelt sich daher nur um einen Wendepunkt.

Übung 4.2

Anzahl von Hoch-, Tief- und Wendepunkten bei ganzrationalen Funktionen 4. Grades

Im Folgenden sind jeweils die Funktionsterme ganzrationaler Funktionen 4. Grades als Polynom gegeben.

Ermitteln Sie jeweils die geforderten Ableitungen und ergänzen Sie den Satz:

a) Ganzrationale Funktionen 2. Grades

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f''(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

- Bei der Berechnung der Nullstellen entsteht eine Gleichung ____ Grades. Da diese Gleichung maximal ____ Lösungen haben kann, existieren bei einer Funktion 2. Grades max. ____ Nullstellen.
- Bei der Berechnung der Extremwerte entsteht eine Gleichung ____ Grades. Da diese Gleichung maximal ____ Lösungen haben kann, existieren bei einer Funktion 2. Grades max. ____ Extremwerte.
- Bei der Berechnung der Wendepunkte entsteht eine Gleichung ____ Grades. Da diese Gleichung maximal ____ Lösungen haben kann, existieren bei einer Funktion 2. Grades max. ____ Wendepunkte.

b) Ganzrationale Funktionen 3. Grades

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f''(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f'''(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

- Bei der Berechnung der Nullstellen entsteht eine Gleichung ____ Grades. Da diese Gleichung maximal ____ Lösungen haben kann, existieren bei einer Funktion 3. Grades max. ____ Nullstellen.
- Bei der Berechnung der Extremwerte entsteht eine Gleichung ____ Grades. Da diese Gleichung maximal ____ Lösungen haben kann, existieren bei einer Funktion 3. Grades max. ____ Extremwerte.
- Bei der Berechnung der Wendepunkte entsteht eine Gleichung ____ Grades. Da diese Gleichung maximal ____ Lösungen haben kann, existieren bei einer Funktion 3. Grades max. ____ Wendepunkte.

Begründen Sie, dass eine Funktion 3. Grades immer genau einen Wendepunkt besitzt:

c) Ganzrationale Funktionen 4. Grades

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$f'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f''(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

- Bei der Berechnung der Nullstellen entsteht eine Gleichung ____ Grades. Da diese Gleichung maximal ____ Lösungen haben kann, existieren bei einer Funktion 4. Grades max. ____ Nullstellen.
- Bei der Berechnung der Extremwerte entsteht eine Gleichung ____ Grades. Da diese Gleichung maximal ____ Lösungen haben kann, existieren bei einer Funktion 4. Grades max. ____ Extremwerte.
- Bei der Berechnung der Wendepunkte entsteht eine Gleichung ____ Grades. Da diese Gleichung maximal ____ Lösungen haben kann, existieren bei einer Funktion 4. Grades max. ____ Wendepunkte.

Aufgabe 4.6

Graphisches Differenzieren

a) Ermitteln des Graphen der Ableitungsfunktion durch graphisches Differenzieren

Ergänzen Sie anhand der Abbildungen 4.6.1 und 4.6.3 zunächst die leeren Kästen und skizzieren Sie danach die drei Ableitungsfunktionen in Abbildungen 4.6.2 und 4.6.4. Als Hilfestellung können Sie auch die Abbildungen von Aufgabe 4.4 und Übung 4.1 heranziehen.



Anmerkung: Hier vorgestellte graphische Differenzieren kann auf beliebige Funktionen, wie beispielsweise trigonometrische Funktionen oder Exponential- und Logarithmusfunktionen übertragen werden.

b) Ermittlung der Ableitungsfunktion von $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = \cos(x)$ durch graphisches Ableiten

Verdeutlichen Sie sich die Abbildungen und ergänzen Sie die Texte in den Spreckblöcken.



c) Aus der Ableitungsfunktion auf graphischem Weg eine mögliche Funktion ermitteln, von der die Ableitungsfunktion abstammt.

Ermitteln Sie, wie im Beispiel erläutert, jeweils aus dem gegebenen Graphen, den Verlauf einer Funktion, von dem dieser Graph abstammen kann.

Beispiel:



Aufgabe 4.7

Vollständige „Kurvendiskussion“

Anhand dieser Musteraufgabe soll dargestellt werden, wie man schrittweise vorgeht, um eine Funktion, ohne Einsatz von Graphikprogrammen oder der Erstellung einer Wertetabelle zu zeichnen. Ergänzen Sie fehlende Angaben.

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 3x^2 - x^3$.

(1) Ableitungen

$$f(x) = 3x^2 - x^3$$

$$f'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f''(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f'''(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

(2) Symmetrie

Da die Exponenten von $\underline{\hspace{2cm}}$ und $\underline{\hspace{2cm}}$ sind, liegt $\underline{\hspace{2cm}}$ die Symmetrie zur y-Achse oder zum Ursprung vor.

(3) Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3) \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \underline{\hspace{2cm}} \rightarrow \underline{\hspace{2cm}}$$

Die Funktion verhält sich für große negative und positive Werte wie die Funktion $f(x) = -x^3$.
Markieren Sie im Koordinatensystem die Quadranten, in denen die Funktion für große Werte verläuft.

Nullstellen: $f(x) = 0$

$$3x^2 - x^3 = 0$$

$$\underline{\hspace{2cm}} \quad \text{oder} \quad x_{1,2} = 0 \Rightarrow \text{Hinweis auf} \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x_3 = 3$$

Zeichnen Sie alle Nullstellen im Koordinatensystem. Anhand der bisherigen Ergebnisse können Sie die den Verlauf der Funktion schon annähernd bestimmen. Beispielsweise kann man den Berührungspunkt im Ursprung mit einem nach rechts gerichteten Bogen kennzeichnen. Eine Zeichnung der Lage von Extremwerten ist nicht benötigt, wenn diese charakteristisch aus dem Verlauf noch ermittelt werden können.

(6) Extremwerte: $f'(x) = 0$

$$6x - 3x^2 = 0$$

$$\underline{\hspace{2cm}} = 0 \Rightarrow x_1 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

Hinreichende Bedingung:

$$f''(\underline{\hspace{2cm}}) > 0 \Rightarrow \text{TP}(0/0)$$

$$f''(2) = \underline{\hspace{2cm}} < 0 \Rightarrow \text{HP}(\underline{\hspace{2cm}})$$

Funktionswerte:

$$f(2) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$f(0)$ ist Nullstelle und ist schon bekannt, muss also nicht berechnet werden.

Notieren Sie die berechneten Funktionswerte und tragen Sie den Punkt oder die Punkte im Koordinatensystem ein. Achten Sie hier besonders darauf, dass die Lage von Hoch- und Tiefpunkten und die Lage der Nullstellen einen sinnvollen Funktionsverlauf ergeben. Sollte dies nicht der Fall sein, überprüfen Sie Ihre Lösungswege bei den Gleichungen auf Rechenfehler.

(7) Wendepunkte: $f''(x) = 0$

$$6 - 6x = 0$$

$$\underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

Bei ganzrationalen Funktionen 3. Grades ist die 3. Ableitung immer ungleich null. Daher haben diese Funktionen immer einen Wendepunkt.

$$\text{Lösung: } f'''(1) = \underline{\hspace{2cm}} \Rightarrow \text{WP}(1/\underline{\hspace{2cm}})$$

$$\text{Funktionswert: } f(1) = \underline{\hspace{2cm}} = 2$$

Wert notieren und den Koordinatensystem

(8) Zeichnung

Zeichnen Sie den Verlauf so genau wie möglich, in dem Sie beim Eintragen der Punkte alle Ergebnisse berücksichtigen.

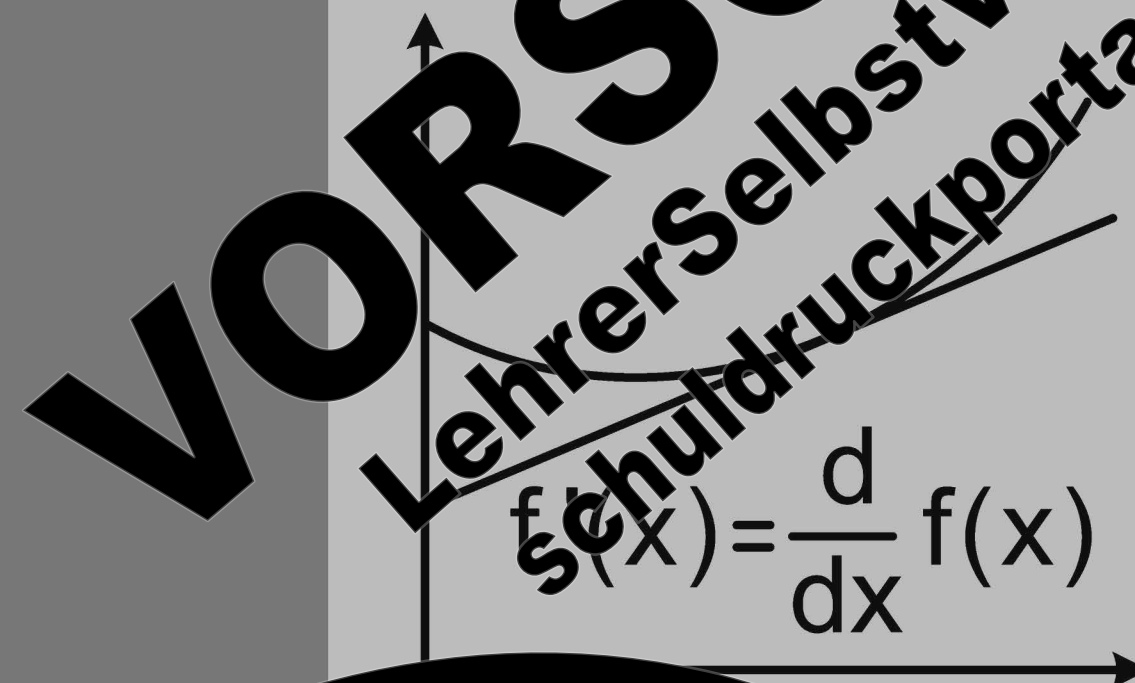
Ergebnisse:

Raum für Notizen



Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Differenzialrechnung und selbstorganisiertes Lernen



Kapitel 4

Rekonstruktion von
Funktionsgraphen

Kapitel 1: Grenzwertbetrachtungen	11
Kapitel 2: Einführung in die Differenzialrechnung	43
Kapitel 3: Grundlegende Anwendung der Differenzialrechnung	63
Kapitel 4: Anwendung der Differenzialrechnung – Verlauf von Funktionsgraphen	71
Kapitel 5: Rekonstruktion von ganzrationalen Funktionen	101
Kapitel 6: Extremwertaufgaben	121
Kapitel 7: Produkt- Quotienten- und Kettenregel	135
Kapitel 8: Ableitung von Exponentialfunktionen	157
Kapitel 9: Ableitung der Logarithmusfunktion	165

Gesamtwortung selbstorganisiert erlernt
(Bestandteil der Ausbildung)

Alle Rechte vorbehalten. All rights reserved.

Druck, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet

SelbstVerlag

tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germany)

Lehrerselbstverlag.de

www.f-druck.de

Kapitel 5: Rekonstruktion von ganzrationalen Funktionen

Prinzipiell kann man die Rekonstruktion von Funktionen als Umkehrung der Kurvendiskussion betrachten. Während man bei der Kurvendiskussion den Funktionsterm und die Funktion anhand von charakteristischen Punkten zeichnet, wird bei der Rekonstruktion der Funktionsterm aus bekannten Eigenschaften ermittelt, wie der Lage von Koordinaten, Extremwerten und Wendepunkten sowie aus Informationen zum Steigungsverhalten.

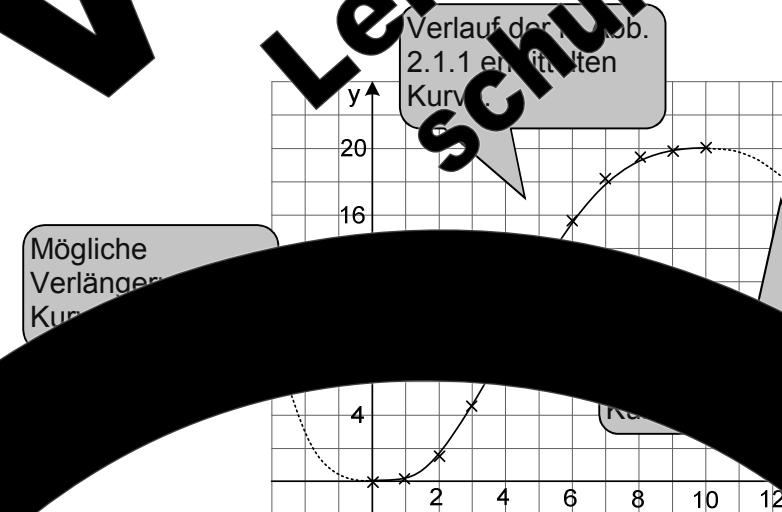
Die Rekonstruktion von Funktionen spielt insbesondere in der Modellierungsaufgaben eine Rolle. Die Aufgabenstellungen stammen hier in der Regel aus dem Bereich der Wirtschaft, Architektur und Technik aber auch den Naturwissenschaften. In den folgenden zwei Beispielen wird ansatzweise jeweils in Grundzügen eine solche Modellierung durchgeführt.

Aufgabe 5.1

Als Beispiel für diese Aufgabe wird das Wachstum der Geißpflanze zurückgegriffen und gezeigt, wie die in Aufgabe 4.1 verwendete Funktion ermittelt werden kann. Verdeutlichen Sie sich die Schritte bei der Vorgehensweise und ergänzen Sie dabei fehlende Angaben und Begründungen.

Herleitung der allgemeinen Funktionsgleichung

Auf der Basis der aufgenommenen Messdaten für das Pflanzenwachstum ermittelten Funktionsgraphen in Abb. 1.1 werden Überlegungen angestellt, mit welcher ganzrationalen Funktion man den Verlauf der empirisch erhaltenen Kurve möglichst einfach abbildern kann.



Mögliche Verlängerung der Kurve

Man könnte die Kurve der Messdaten auch so verlängern, dass im Ursprung und im Punkt P(10/20) Sattelpunkte entstehen. Das widerspricht jedoch der Forderung, eine möglichst einfache Funktion zu finden.

Begründen Sie, warum die in 5.1.1 entstandene Kurve durch eine ganzrationale Funktion 3. Grades approximiert werden kann. Ergänzen Sie den folgenden Satz.

Der durch die Messdaten ermittelte Graph hat _____ Extremwerte. Die einfachste

Funktion, die eine ganzrationale Funktion mit diesen Eigenschaften ist, ist ein _____ Grades.

$$\text{Form: } f(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$$

Dies ist eine Möglichkeit, den Verlauf der Kurve durch eine Funktion 3. Grades

Formulieren von Bedingungen, welche die Funktion erfüllen muss.

Anhand von Abb. 5.1.1 erkennt man, dass die gesuchte Funktion eine ganzrationale Funktion 3. Grades sein kann. Auf der Basis der Messwerte und aus dem Verlauf der Kurve kann man gute Vermutungen annehmen, dass die Funktion im Ursprung und in Punkt P(10/20) jeweils einen Extremwert hat. Diese beiden Informationen reichen als Bedingungen aus, um den möglichen Funktionsterm zu bestimmen.

Die Bedingungen werden, in dieser oder ähnlicher Form, häufig in der Aufgabenstellung zur Rekonstruktion von Funktionen vorgegeben. Mit diesen Bedingungen werden die Koeffizienten a , b , c und d des allgemeinen Funktionsterms $f(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$ ermittelt. Wie man das vorgehen kann, wird hier nun folgendes Beispiel zeigt.

Rekonstruktion

1. Schritt: Dem Text entnehmen wir, welchen allgemeinen Funktionsterm es sich hier um handelt. Wir benötigen die Ableitungen.

Funktionsterm: $f(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$
 1. Ableitung: $f'(t) = 3at^2 + 2bt + c$

Man entnimmt dem Text zunächst, welchen Grad die Funktion haben soll und welche Ableitungen benötigt werden. Da hier nur Koordinaten und Extremwerte genannt werden, kommen nur die allgemeine Ausgangsfunktion und ihre erste Ableitung in Frage.

2. Schritt: Dem Text entnehmen wir, welche die Funktion erfüllen muss.

Hinweis:

Wenn man die Bedingung, die sich auf $t = 0$ bezieht, wendet, vereinfacht sich die Ausgangsgleichung. Man beachtet, dass die Kurve im Ursprung einen Extremwert hat.

Die Funktion hat im Ursprung einen Extremwert.

Bedingung A:
 Der Punkt O(0/0) liegt auf dem Graph der Funktion.
 $\Rightarrow f(0) = \underline{\hspace{2cm}}$

Bedingung B:
 Die Funktion hat in der Stelle $t = 0$ einen Extremwert.
 $f'(0) = \underline{\hspace{2cm}}$

Einsetzen von $t = 0$ in den Funktionsterm
 $f(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$

Hier erscheint eine 0, da $f'(0) = 0$ ist.

Ansatz für die Bedingung A.

A: $f(0) = 0 \Rightarrow a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 0 \Rightarrow d = 0$
 $f'(0) = 0 \Rightarrow 3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$

Ansatz für die Bedingung B.

Einsetzen von $t = 0$ in den Funktionsterm
 $f'(t) = 3at^2 + 2bt + c$

Hier erscheint eine 0, da $f'(0) = 0$ ist.

1. Zwischenergebnis:

Man kennt nun c und d und setzt die beiden Werte in die Ausgangsgleichung und ihre Ableitung ein. Man erhält ein erstes Zwischenergebnis.

$f(t) = at^3 + bt^2 + \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}}$
 $f_1'(t) = 3at^2 + 2bt + \underline{\hspace{2cm}}$

Man rechnet ab Schritt 2 mit diesen vereinfachten Funktionen weiter.

3. Schritt: Dem Text entnehmen wir, welches Zwischenergebnis einschließlich der noch notwendigen Ableitungen.

Funktionsterm: $f_1(t) = at^3 + bt^2$
 1. Ableitung: $f_1'(t) = 3at^2 + 2bt$

Die erste Ableitung ist $f_1'(t) = 3at^2 + 2bt$, da die zweite Bedingung einen Extremwert bezieht.

4. Schritt: Wenn vorhanden, dem Text die zweite Information zu den Bedingungen entnehmen, welche die Funktion erfüllen muss.

Die Funktion hat im Punkt P(10/20) einen Extremwert.

Bedingung C:

Der Punkt P(10/20) liegt auf dem Graphen der Funktion.

$$\Rightarrow f(10) = \underline{\hspace{2cm}}$$

Bedingung D:

Die Funktion hat an der Stelle $t = 10$ eine Steigung 0.

$$\Rightarrow f'(10) = \underline{\hspace{2cm}}$$

Einsetzen von $t = 10$ in die allgemeine Funktionsgleichung

$$f_1(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$$

Hier erscheint nun eine Gleichung, da $f(10) = 20$ gilt.

Ansatz für die Bedingung C

$$f_1(10) = 20 \Rightarrow a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d = 20$$

$$3a + 2b + c + d = 20$$

$$1000a + 100b + 10c + d = 20$$

Ansatz für die Bedingung D

Einsetzen von $t = 10$ in die Ableitung des ersten Zwischenergebnisses

$$f_1'(t) = 3at^2 + 2bt + c$$

Hier erscheint wieder eine 0, da $f'(10) = 0$ gilt.

Man erhält nun zwei Gleichungen für zwei Unbekannte und kann damit im nächsten Schritt a und b berechnen.

5. Schritt: Wenn keine weiteren Bedingungen benötigt werden, sind die gesuchten Parameter berechnet.

$$I \quad 1000a + 100b + 10c + d = 20$$

$$II \quad 3a + 2b + c + d = 20$$

Lösen des Gleichungssystems

Durch das Einsetzen der Bedingungen entstehen meist Gleichungssysteme, die entweder mit dem **Einsetzungsverfahren**, dem **Gleichsetzungsverfahren** oder einem **Additionsverfahren** gelöst werden können. Hier wird das Einsetzungsverfahren gewählt.

$$\text{Gleichung II nach b auflösen: } 20b = -20 - 3a - c - d$$

$$b \text{ in Gleichung I einsetzen: } 1000a + 100 \cdot (-15a) = 20$$

$$1000a - 1500a = 20$$

$$-500a = 20$$

$$a = -\frac{20}{500} = -\frac{1}{25}$$

für b ergibt sich damit:

$$b = -\frac{1}{5}$$

Schritt 6: Mit den berechneten Funktionskoeffizienten

$$f(t) = -\frac{1}{25}t^3 - \frac{3}{5}t^2 + \frac{1}{5}t + \frac{1}{5}$$

Man setzt nun a und b in das Zwischenergebnis ein und erhält genau die Funktion, welche in Kapitel 4 für das Wachstum des Blattgehaltes verwendet wurde.

meinen Funktionsgleichung zu

mitteln, werden mit Hilfe der

aufgestellt. Bei dieser Rekonstruktion waren die Koeffizienten $\underline{\hspace{1cm}}$, $\underline{\hspace{1cm}}$, $\underline{\hspace{1cm}}$

und $\underline{\hspace{1cm}}$ zu bestimmen. Mit den $\underline{\hspace{1cm}}$ gegebenen Koeffizienten wurden vier

Gleichungen aufgestellt. Wir werden in den folgenden Schritten zeigen, dass bei

Angabe die **Anzahl der Bedingungen** mit der

bestimmenden Koeffizienten übereinstimmt.

Aufgabe 5.2

Modellierungsaufgabe zum Ermitteln eines funktionalen Zusammenhangs – Das Profil einer Skater-Bahn

Herleitung einer allgemeinen Funktionsgleichung

Eine Baufirma möchte für den Bau von Skater-Bahnen, die für die Parks passgenaues und vorgefertigtes Schalungsmaterial anbieten, das vor Ort mit einem Kran ausgelegt werden muss. Die Schalungen müssen so genau sein, dass verschiedene Module miteinander kombiniert werden können.

In der Skizze Abb. 5.2.1 ist ein solches Modul abgebildet, bei dem die Übergänge zu den nächsten Anschlussstücken (gestrichelte Linien) kreisförmig verlaufen.

Für den automatisierten Zusammenbau der Schalungsteile benötigt man zur Erstellung des Steuerungsprogramms für die Maschinen eine formelmäßige Beschreibung des Bahnverlaufs. Aus der Abb. 5.2.2 kann man entnehmen, dass die Bahn einer ganzrationalen Funktion ähnelt. Aus den Angaben in der Abbildung soll nun eine passende Funktionsgleichung ermittelt werden.

Um die Gleichung zu ermitteln, muss man zunächst die folgenden Fragen klären:

- (1) Welchen Grad muss die Polynomfunktion mindestens haben, damit die gewünschte Form entstehen kann?
- (2) Wie fügt man am besten ein Koordinatensystem ein, so dass ein möglichst geringer Rechenaufwand entsteht?
- (3) Wie kann man die Gleichung der Funktion ermitteln?

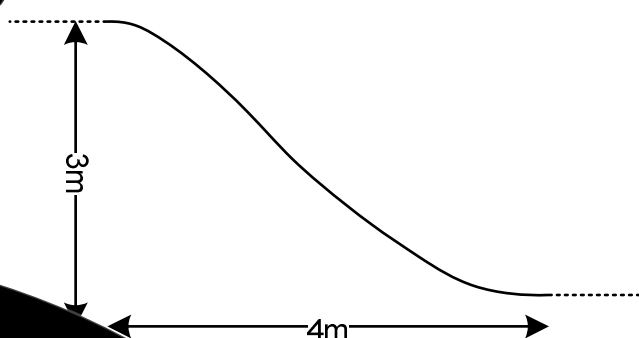


Abb. 5.2.2

- (1) Begründen Sie, warum die gesuchte ganzrationale Funktion den Grad 3 haben muss und verlängern Sie dazu auf Grund Ihrer bisher erworbenen Kenntnisse zum Verlauf von ganzrationalen Funktionen in der Skizze den dargestellten Verlauf dieser möglichen ganzrationalen Funktion nach rechts.

- zu (2) In die Skizze von Abb. 5.2.2 soll nun ein Koordinatensystem eingefügt werden. Es gibt es mehrere Alternativen. Ziel ist es hier, das Koordinatensystem so einzufügen, dass die Funktion mit einer möglichst einfachen Funktionsgleichung beschrieben werden kann. In den Abbildungen unten sind zwei Varianten für das Einfügen eines Koordinatensystems dargestellt.

- a) Erstellen Sie für beide Varianten in Abb. 5.2.3 und 5.2.4 auf Basis der Maßangaben in Abb. 5.2.2 eine Skalierung für die Achsen.

- b) Geben Sie für jede der zwei dargestellten Varianten die allgemeine Form einer ganzrationalen Funktion dritten Grades an. Begründen Sie, warum man sich bei der Rechnung für die Variante 2 entscheidet.



Abb. 5.2.3

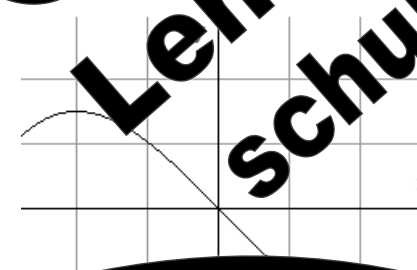


Abb. 5.2.4

Begründung: _____

Die allgemeine Form einer ganzrationalen Funktion dritten Grades $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ werden auch als Polynom 3. Grades oder Polynom 3. Grades bezeichnet.

Da die Funktion durch zwei Koeffizienten zu bestimmen sind, benötigt man _____ Bedingungen. Man kann hier die Koordinaten des Hochpunktes HP(_____) oder die Koordinaten des Tiefpunktes TP(_____ / _____) verwenden. Begründen Sie, dass die Funktion eine Sprungstelle hat.

einen _____ besitzt, ist ungeeignet, da jede punktsymmetrische Funktion 3. Grades diese Eigenschaft hat.

Zusatzinfo:

Ein Wendepunkt im Ursprung führt zu den Werten $f(0) = 0$ und $f''(0) = 0$. Daraus ergeben sich Gleichungen der Form $0 = 0$, mit denen man keine Koeffizienten ermitteln kann.

Formulieren von Bedingungen, welche die Funktion erfüllen muss.

Die Funktion ist eine zum Ursprung punktsymmetrische ganzrationale Funktion 3. Grades und hat einen Tiefpunkt TP(2/–1,5).

Man kann den Zugschritt Modellierung auch die Koordinaten der Hochpunkte eintragen.

Rekonstruktion

Ergänzen Sie die folgenden Rekonstruktion folgende Angaben und Rechenschritte. Erläutern Sie die folgenden Rechnungen.

1. Schritt: Dem Text die Informationen entnehmen, um welchen allgemeinen Funktionsterm es sich handelt; notwendige Ableitungen bilden.

Funktion: $f(x) = ax^3 + bx$

1. Ableitungen:

2. **Bedingungen:** Dem Text die Informationen entnehmen, welche die Funktion erfüllen muss.

Die Funktion hat einen Tiefpunkt TP(2/–1,5).

Bedingung A:

Der Punkt TP(2/–1,5) liegt auf der Funktion.

Bedingung B:

Die Funktion hat an der Stelle $x = 2$ eine Steigung von –1,5.

$\Rightarrow f'(2) = -1,5$

$$f'(2) = 0 \Rightarrow 3a \cdot \underline{\quad} + b = 0$$

$$\underline{\quad} a + b = 0$$

A: $f(2) = -1,5 \Rightarrow a \cdot \underline{\quad} + b \cdot \underline{\quad} = -1,5$

3. Schritt: Da keine weiteren Bedingungen vorhanden und notwendig sind, berechnen Sie die Parameter.

Erläutern Sie wie sich die die Zeile (1) ergibt bzw. die angegebenen Formeln.

(1) $b = -12a$ (1)

(2) $8a - 24a = -1,5$ (1)

(3) $-16a = -1,5 \Rightarrow (3) \rightarrow (4)$

(4) $a = \frac{15}{16}$ (3) $\rightarrow$ (4)

(4) $b = -\frac{9}{4}$ (4) $\rightarrow$ (5)

4. Schritt: Endergebnis für $f(x)$ formulieren

$$f(x) = \frac{3}{32}x^3 - \frac{9}{8}x$$

Oben berechnete Werte für a und b in $f(x) = ax^3 + bx^2$ einsetzen.

Rekonstruktion eines Funktionsterms einer ganzrationalen Funktion mit Anwendungsbezug.

Die ganzrationale Funktion 4. Grades hat im Ursprung einen Sattelpunkt P(3 / –27) einen Extremwert. Bestimmen Sie einen möglichen Funktionsterm.

Rekonstruktion

1. Schritt: Dem Text die Informationen entnehmen, um welchen allgemeinen Funktionsterm es sich handelt; notwendige Ableitungen bilden.

Funktionsterm: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

Ableitungen: $f'(x) = \underline{\quad}$

$f''(x) = \underline{\quad}$

Es handelt sich um eine ganzrationale Funktion 4. Grades

Da der Text die Bedingung Sattelpunkt enthält, muss man die 1. und 2. Ableitung bilden.

2. Schritt: Dem Text die erste Information zu den Bedingungen entnehmen, welche die Funktion erfüllen muss.

Die Funktion hat im Ursprung einen Sattelpunkt.

Bedingung A:
Der Graph geht durch den Punkt O(0/0).

$$\Rightarrow f(0) = \underline{\hspace{2cm}}$$

Bedingung B:
Ein Sattelpunkt hat eine waagerechte Tangente. Daher ist in O(0/0) die 1. Ableitung null.

$$f'(0) = \underline{\hspace{2cm}}$$

Bedingung C:
Ein Sattelpunkt ist gleichzeitig ein Wendepunkt:

$$f''(0) = \underline{\hspace{2cm}}$$

A: $f(0) = 0 \Rightarrow a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 0 \Rightarrow d = 0$

B: $f'(0) = 0 \Rightarrow 3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$

C: $f''(0) = 0 \Rightarrow 6a \cdot 0 + 6b = 0 \Rightarrow 2c = 0 \Rightarrow c = 0$

Information: In Aufgabe 5.1 erwähnt, man zuerst die Bedingung, welche zentral ist, verwenden. Hier fallen die Koeffizienten weg, da sie den Wert Null annehmen.

In der Ausgangsfunktion wird jeweils nur eine Angabe 5.1 erwähnt, um einfach sich für c, d, und e jeweils 0 einzusetzt. Dadurch entsteht hier im 3. Schritt eine Funktionsgleichung, die nur noch die Koeffizienten a und b besitzt. Diese neue Funktionsgleichung wird hier als „erstes Zwischenergebnis $f_1(x)$ “ bezeichnet

3. Schritt: Erstes Zwischenergebnis für die gesuchte Funktion und ggf. ihre Ableitungen angeben.

In den weiteren Bedingungen die Information zu einem Extremwert vorhanden ist, die 2. Ableitung gebildet.

Ergebnis: $f_1'(x) = 4ax^3 + 3bx^2$

4. Schritt: Dem Text die zweite Information zu den Bedingungen entnehmen, welche die Funktion erfüllen muss.

Die Funktion hat an der Stelle $x = 3$ einen Extremwert.

Die Funktion verläuft durch P(3/-27).

$$\Rightarrow f_1(3) = \underline{\hspace{2cm}}$$

Bedingung E:
Die Funktion hat an der Stelle $x = 3$ die Steigung 0.

$$\Rightarrow f_1'(3) = \underline{\hspace{2cm}}$$

E: $f_1'(3) = 0 \Rightarrow 4a \cdot 3^3 + 3b \cdot 3^2 = 0 \Rightarrow 4 \cdot \underline{\hspace{1cm}} a + \underline{\hspace{1cm}} b = 0$
 $\Rightarrow 4a + b = 0$

D: $f_1(3) = 0 \Rightarrow a \cdot 3^4 + b \cdot 3^3 = -27 \Rightarrow 81a + 27b = -27$
 $\Rightarrow 3a + b = -1$

5. Schritt: Berechnen der Parameter

I $4a + b = 0$

II $3a + b = -1$ | I - II

$$a = \underline{\hspace{2cm}}$$

Hier bietet sich das Additionsverfahren an.

$a = 1$ in Gleichung I einsetzen: $4 \cdot 1 + b = 0 \Rightarrow b = -4$

6. Schritt: Angegebener ganzrationaler Funktionssatzung

Ergebnis: $f(x) = x^4 - 4x^3$

Aufgabe 5.4

Ermitteln des Funktionsterms einer ganzrationalen Funktion ohne Anwendungsbezug. Im Rahmen dieser Aufgabe werden die Schritte des Lösungsverfahrens für die Berechnung der Parameter a, b und c betrachtet.

Ein Polynom 4. Grades hat im Punkt WP(1/2) einen Wendepunkt und im Punkt P(3/-27) einen Extremwert.

Struktur

1. Schritt: Formelmäßige Umsetzung der Bedingungen durch Text

Funktionsterm: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + d$

Symmetrie zur y-Achse bedeutet, dass es keine ungerade Potenzen gibt.

Da der Ausdruck die Bedingung enthält, benötigt man die 2. Ableitung

Verfahren 1

Schrittweises Ersetzen der Variablen

Dieses Verfahren bietet sich an, wenn man das Lösen linearer Gleichungssysteme umgehen will, bzw. später Bedingungen auf die Integrationskurve beziehen.

2. Schritt: Dem Text die erste Information zu den Bedingungen entnehmen, welche die Funktion erfüllen muss.

Die Funktion hat im Punkt WP(1/2) einen Wendepunkt.

Bedingung A:

Der Punkt WP(1/2) liegt auf dem Graph der Funktion.

$$\Rightarrow f(1) = \frac{1}{2}$$

Bedingung B:

An der Stelle $x = 1$ gibt es einen Wendepunkt.

$$\Rightarrow f''(1) = 0$$

$$f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$$

$$2b = 0$$

$$b = -6a$$

Information:

Es ist empfehlenswert, beim Verwenden der Bedingungen $f''(1) = 0$ mit der zweiten Ableitung zu beginnen. Da durch das Ableiten im Funktionsterm Summanden weggefallen, wird die Rechnung einfacher.

Wenn man aus der Bedingung B in $f(x)$ einsetzt, erhält man als Funktionsterm, bei dem die Anzahl der Variablen reduziert wurde. Mit diesem Zwischenergebnis kann man die Bedingung A einsetzen.

Funktionsterm erstes Zwischenergebnis:

$$f(x) = a \cdot x^4 - 6a \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$$

Einsetzen des ersten Bedingungs-Punktes.

$$f(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow a \cdot 1^4 - 6a \cdot 1^3 + c \cdot 1^2 + d \cdot 1 + e = \frac{1}{2}$$

$$a - 6a + c + d + e = \frac{1}{2}$$

$$c = 5a$$

Man setzt nun die Variable c in das erste Zwischenergebnis ein und erhält damit ein zweites Zwischenergebnis.

Funktionsterm zweites Zwischenergebnis: $f(x) = a \cdot x^4 - 6a \cdot x^3 + 5a \cdot x^2 + d \cdot x + e$

3. Schritt: Dem Text die zweite Information zu den Bedingungen entnehmen, welche die Funktion erfüllen muss.

Die Funktion geht durch den Punkt P(2/-1).

Bedingung C:

Der Punkt P(2/-1) liegt auf dem Graph der Funktion.

$$\Rightarrow f_2(2) = -1$$

Durch Einsetzen der Bedingung C in das zweite Zwischenergebnis lässt sich der Parameter a bestimmen.

$$C: f_2(2) = -1 \Rightarrow a \cdot 2^4 - 6a \cdot 2^3 + 5a \cdot 2^2 + d \cdot 2 + e = -1$$

$$\Rightarrow 16a - 24a + 5a = -3$$

$$-3a = -3$$

$$a = 1$$

4. Schritt: Angeben der gesuchten Funktionsgleichung

Durch Einsetzen von $a = 1$ in das zweite Zwischenergebnis, also in $f_2(x)$, erhält man den gesuchten Funktionsterm für $f(x)$.

$$\text{Ergebnis: } f(x) = x^4 - 6x^3 + 5x^2 + d \cdot x + e$$

Verfahren 2

Erstellen eines linearen Gleichungssystems

1. Schritt: Siehe Verfahren 1

2. Schritt: Dem Text die erste Informationen zu den Bedingungen entnehmen und in den im Schritt 1 ermittelten Ansatz bzw. die entsprechenden Gleichungen einsetzen.

Die Funktion hat im Punkt WP(1) einen Wendepunkt.

Bedingung A:

Der Punkt WP(1/2) liegt auf dem Graph der Funktion.

$\Rightarrow f(1) = \frac{1}{2}$

Bedingung B:

An der Stelle $x = 1$ gibt es einen Wendepunkt.

$\Rightarrow f'(1) = 0$

$$f(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c = \frac{1}{2} \Rightarrow a + b + c = \frac{1}{2}$$

$$B: f'(1) = 0 \Rightarrow 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 = 0 \Rightarrow 3a + 2b = 0$$

3. Schritt: Wenn vorhanden, dem Text die zweite Information zu den Bedingungen entnehmen, welche die Funktion erfüllen muss.

Bedingung C:

Der Punkt P(2/-1) liegt auf dem Graph der Funktion.

$\Rightarrow f(2) = -1$

$$f(2) = -1 \Rightarrow a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c = -1 \Rightarrow 8a + 4b + c = -1$$

Dieses Verfahren lässt sich insbesondere auch wenn das Gleichungssystem nicht linear ist, z.B. wenn ein Taschenrechner verwendet werden kann.

4. Schritt: Erstellen und Lösen eines linearen Gleichungssystems zur Berechnung der Parameter.

$$I \quad 6a + b = 0 \quad | \text{übernehmen}$$

$$II \quad a + b + c = 2$$

$$III \quad 16a + 4b + c = -1 \quad | II - III$$

$$I \quad 6a + b = 0$$

$$IV \quad -15a - 3b = -2 \quad | I + \frac{1}{3}IV$$

$$a = 1$$

a einsetzen in I:

a und b einsetzen in II:

$$6 \cdot 1 + b = 0 \Rightarrow b = -6$$

$$1 + (-6) + c = 2 \Rightarrow c = 7$$

5. Schritt: Angeben der Funktionsgleichung.

$$f(x) = x^4 - 6x^2 + 7$$

Einsetzen der berechneten Werte in $f(x)$ liefert den gesuchten Funktionsterm.

Die Gleichungen I, II und C werden in ein lineares Gleichungssystem (LGS) zusammengefasst, und das LGS gelöst.

Information 5.1

a) Festlegen des allgemeinen Funktionsterms in polynomialer Form

Da das Lösen des Gleichungssystems im Schritt 2 schwierig werden kann, wenn viele Koeffizienten zu bestimmen sind, sollte man darauf achten, eine möglichst einfache Funktion zu verwenden. Vor allem führen die Berücksichtigung von Symmetrieeigenschaften zu vereinfachten Funktionstermen.

Ergänzen Sie nachfolgende Sätze und fehlende Angaben in der folgenden Tabelle.

Eine ganzrationale Funktion ist achsensymmetrisch zur y-Achse, wenn alle Exponenten von x

gerade sind und punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn

Grad der Funktion	Funktionsterm ohne Symmetrie	Funktionsterm bei Vorliegen von Achsensymmetrie zur y-Achse	Funktionsterm bei Vorliegen von Punktsymmetrie zum Ursprung
2	$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f(x) = ax^2 + c$	
3	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$		$f(x) = ax^3 + cx$
4	$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$	$f(x) = ax^4 + bx^2 + e$	
5	$f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$		$f(x) = ax^5 + cx^3 + ex$

b) Funktionen der Form Parabeln

Wenn der Scheitelpunkt $S(x_0, y_0)$ und ein weiterer Punkt P bekannt sind, kann man die **Punktform** der Parabel verwenden. Das Einsetzen der Koordinaten von Punkt P lässt sich dann in einem Schritt der Parameter a bestimmen.

$$f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$$

c) Funktionen der Form Funktionen mit Grad n, bei denen n Stellen $x_1, x_2, \dots, x_n$ sowie ein weiterer Punkt bekannt sind

Wenn die n Stellen $x_1, x_2, \dots, x_n$ und ein weiterer Punkt bekannt sind, kann man die **Funktionsform** verwenden. Das Einsetzen der Koordinaten von Punkt P liefert einen Wert für den Parameter a.

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

Übungen

In den folgenden Übungen soll die Vorgehensweise bei der Rekonstruktion, ohne ergänzende Erläuterungen, an weiteren Beispielen geübt werden, wobei die beiden alternativen Rekonstruktionsverfahren dargestellt werden. Vervollständigen Sie dazu im Folgenden ggf. fehlende Teilschritte.

Übung 5.1

Eine ganzrationale Funktion 3. Grades schneidet die x-Achse an der Stelle $x = -1$ mit der Steigung 3 und hat an der Stelle $x = 1$ einen Sattelpunkt.

Verfahren 1: Schrittweises Ersetzen der Parameter

1. Schritt: Allgemeine Funktion

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

2. Schritt: Erste Information aus Text entnehmen

Da an der Stelle $x = 1$ ein Sattelpunkt liegt, es liegt ein Wendepunkt mit einer waagerechten Tangente vor. Somit gilt die Steigung bzw. die erste Ableitung an der Stelle 1 den Wert 0 an.

Mit der Bedingung beginnen, die Informationen zum Wendepunkt an der Stelle $x = 1$ enthält

$$f'(1) = 0 \Rightarrow b = -3a$$

$$f(x) = ax^3 - 3ax^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 - 6ax + c$$

Die Information zur Steigung an der Stelle $x = 1$ in das 1. Zwischenergebnis einsetzen

$$f'(1) = 0 \Rightarrow c = 3a$$

$$\Rightarrow \text{2. Zwischenergebnis: } f_2(x) = ax^3 - 3ax^2 + 3ax + d$$

$$f_2'(x) = 3ax^2 - 6ax + 3a$$

3. Schritt: Zweite Information aus Text entnehmen

$x = -1$ ist Nullstelle. Die Steigung an der dieser Nullstelle ist 3.

Mit der Bedingung beginnen, die eine Information zu einer Ableitung enthält. Werte in das 2. Zwischenergebnis einsetzen.

$$\text{C: } f_2'(-1) = 3 \Rightarrow 3a \cdot \underline{\hspace{1cm}} + 3a = \underline{\hspace{1cm}} = 3$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

Zwischenergebnis: $f_3(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + d$

Information zur Nullstelle einsetzen. 2. Zwischenergebnis einsetzen.

$$\text{D: } f_3(-1) = 0 \Rightarrow \frac{1}{4} \cdot \underline{\hspace{1cm}} - \frac{3}{4} \cdot \underline{\hspace{1cm}} + \frac{3}{4} \cdot \underline{\hspace{1cm}} + d = 0 \Rightarrow \underline{\hspace{1cm}} = -\frac{7}{4} + d = 0$$

$$d = \frac{7}{4}$$

4. Schritt: Gesuchte Funktionsgleichung angeben.

$$f(x) = \frac{1}{4}(x^3 - 3x^2 + 3x + 7)$$

Verfahren 2: Ermitteln der Parameter mit einem linearen Gleichungssystem

1. Schritt: Allgemein

Dieser Schritt ist mit dem Verfahren 1 identisch.

$$6ax + 2b$$

2. Schritt: Erste Information aus Text entnehmen

$x = -1$ ist Nullstelle. Die Steigung ist 3.

Sofern keine Bedingungen erfüllt sind, die sich auf die Steigung 0 beziehen, spielt die Reihenfolge, in der die Informationen aus dem Text entnommen werden, bei diesem Verfahren keine Rolle.

$$\text{C: } f(-1) = 0 \Rightarrow a \cdot \underline{\hspace{1cm}} + b \cdot \underline{\hspace{1cm}} + c \cdot \underline{\hspace{1cm}} + d = \underline{\hspace{1cm}} = 0$$

$$\text{D: } f'(-1) = 3 \Rightarrow 3a \cdot \underline{\hspace{1cm}} + 2b \cdot \underline{\hspace{1cm}} + c = \underline{\hspace{1cm}} = 3$$

3. Schritt: Zweite Information aus Text entnehmen

An der Stelle $x = 1$ gibt es einen Wendepunkt (Wendepunkt mit waagerechter Tangente).

$$\text{A: } f''(1) = 0 \Rightarrow 6a \cdot \underline{\hspace{1cm}} + 4b = \underline{\hspace{1cm}} = 0$$

$$3a + b = 0$$

$$f'(1) = 0 \Rightarrow 3a \cdot \underline{\hspace{1cm}} + 2b \cdot \underline{\hspace{1cm}} + c = \underline{\hspace{1cm}} = 0$$

4. Schritt: Lineares Gleichungssystem lösen

I	$-a + b + c + d = 0$
II	$3a + b + c = 0$
III	$3a + 2b + c = 0$
IV	$3a - 2b + c = 3$

Die Reihenfolge, in der man die aus den Bedingungen hergeleiteten Gleichungen anordnet, spielt prinzipiell keine Rolle. Hier wurde unter dem Aspekt der Übersichtlichkeit darauf geachtet, dass die Gleichungen III und IV direkt untereinander stehen, da c eliminiert werden soll. Auf diesem Weg lässt sich dieses lineare Gleichungssystem auch ohne Computerunterstützung mit wenig Aufwand lösen.

$$\text{III} - \text{IV: } 4b = 3 \Rightarrow b = \frac{3}{4}$$

$$a, b \text{ in III: } 3a + \frac{3}{4} + c = 0 \Rightarrow c = -\frac{3}{4} - 3a$$

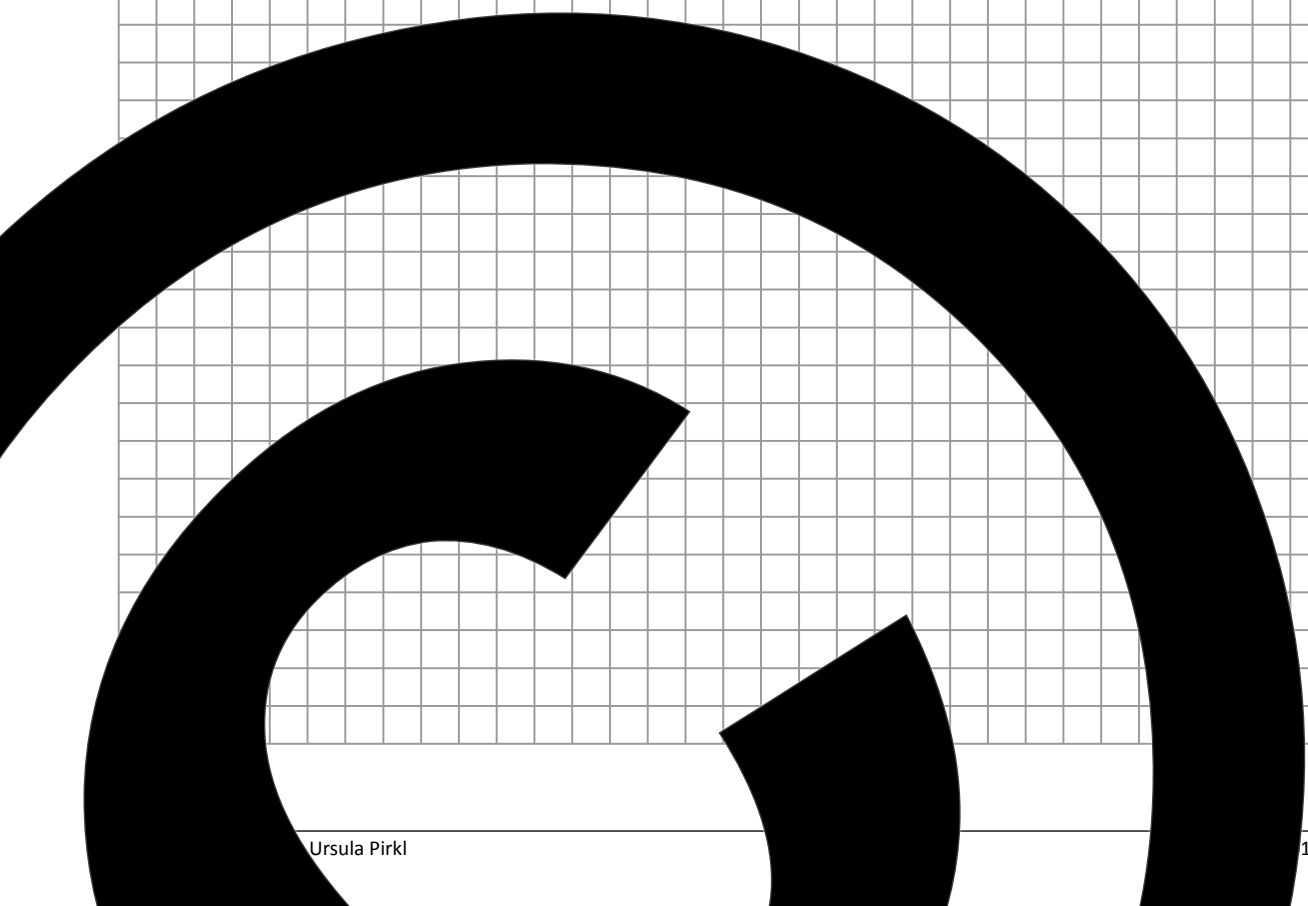
$$a, b, c \text{ in I: } -a + \frac{3}{4} + (-\frac{3}{4} - 3a) + d = 0 \Rightarrow d = \frac{7}{4}$$

5. Schritt: Funktionsgleichung angeben

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{7}{4} \quad \text{oder} \quad f(x) = \frac{1}{4}(x^3 - 3x^2 + x + 7)$$

Übungen: _____

VORSCHAU
 LehrerselbstVerlag
 schuldruckportal.de



Oberstudienrätin Ursula Pirkel

**Differenzialrechnung und
 selbstorganisiertes Lernen**

VORSCHAU
 LehrerselbstVerlag
 schuldruckportal.de

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)$$

Kapitel 5

Extremwertaufgaben



Kapitel 1: Grenzwertbetrachtungen	11
Kapitel 2: Einführung in die Differenzialrechnung	43
Kapitel 3: Grundlegende Anwendung der Differenzialrechnung	63
Kapitel 4: Anwendung der Differenzialrechnung – Verlauf von Funktionsgraphen	71
Kapitel 5: Rekonstruktion von ganzrationalen Funktionen	101
Kapitel 6: Extremwertaufgaben	121
Kapitel 7: Produkt- Quotienten- und Kettenregel	135
Kapitel 8: Ableitungen von Exponentialfunktionen	157
Kapitel 9: Ableitungen der Logarithmusfunktion	165

Kapitel 6: Extremwertaufgaben

Neben der Rekonstruktion von Funktionen bieten **Extremwertaufgaben** eine weitere Möglichkeit, anwendungsbezogene Aufgabenstellungen zu betrachten. Da man in der Vielzahl von Beispielen zu diesem Aufgabentyp findet, soll im Rahmen dieser Unterseite an zwei Beispielen die grundlegende Idee und der prinzipielle Lösungsweg bei Extremwertaufgaben erläutert werden.

Aufgabe 6.1

Grundlegendes zur Bearbeitung von Extremwertaufgaben

Angrenzend an eine bestehende Mauer soll eine größtmögliche rechteckige Fläche eingezäunt werden. Der gewünschte Zaun kann im Baumarkt als Gerüst für 75 Meter Zaunlänge erworben werden.

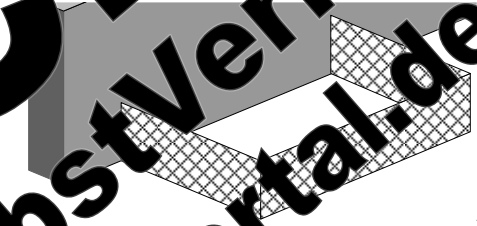
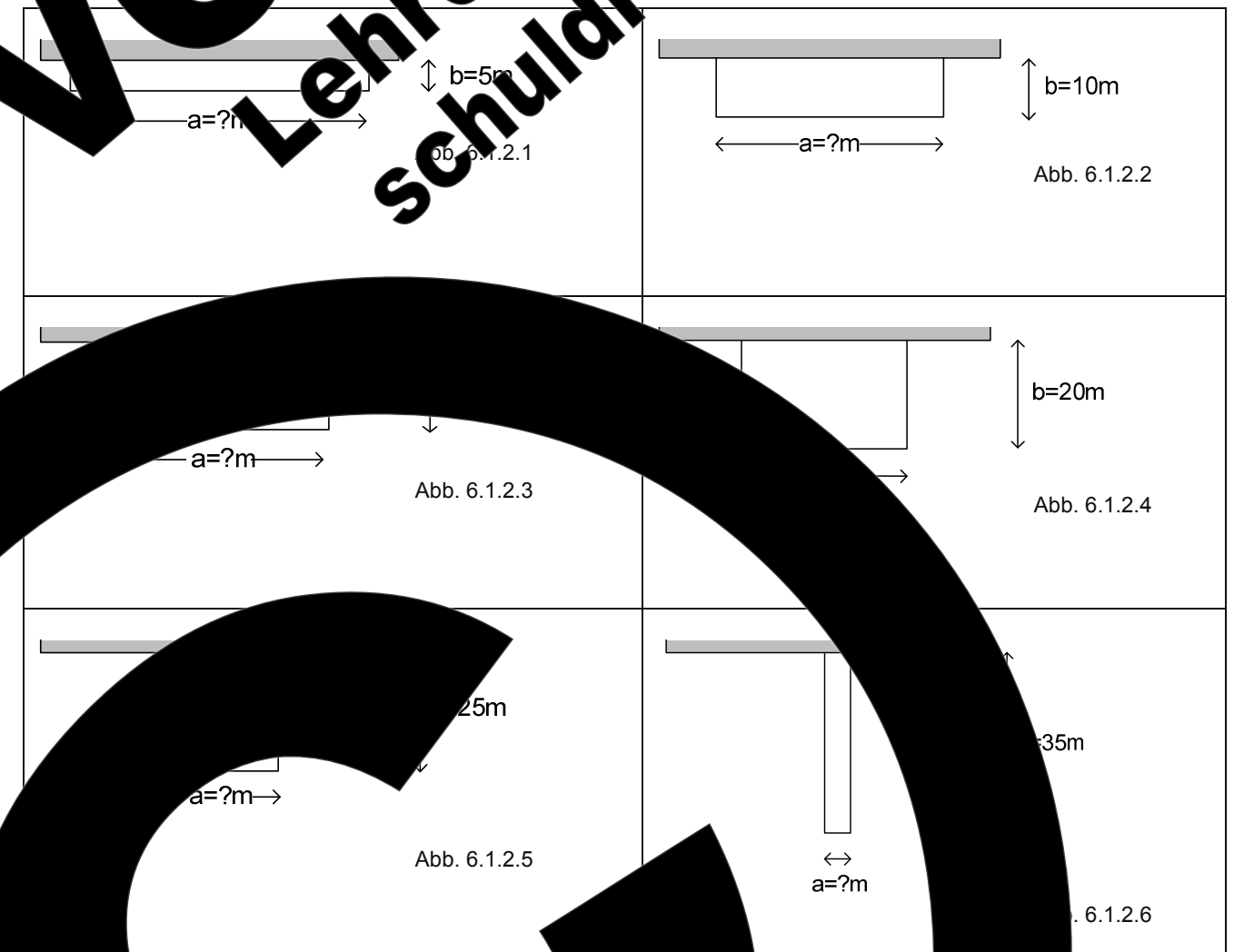


Abb. 6.1.1

- a) Die Bildserie Abb. 6.1.2.1 bis 6.1.2.6 zeigt in der Draufsicht von oben jeweils die Mauer und das Rechteck mit der Seitenlänge b , das bei der Einzäunung entsteht. Verdeutlichen Sie sich anhand dieser Abbildung die grundlegende Problemstellung, indem Sie den Satz auf der folgenden Seite ergänzen.



Die Länge der Seite a ist abhängig von der Länge der Seite _____. Je größer die Breite b wird, desto _____ wird die Länge a. Die Länge a kann man mit der Formel $a = \underline{\hspace{2cm}}$ berechnen. Verwendet man diese für a ermittelte Formel für die Flächenberechnung des Rechtecks, so ergibt sich für die Rechteckfläche der folgende Ansatz: $A = a \cdot b = \underline{\hspace{2cm}}$.

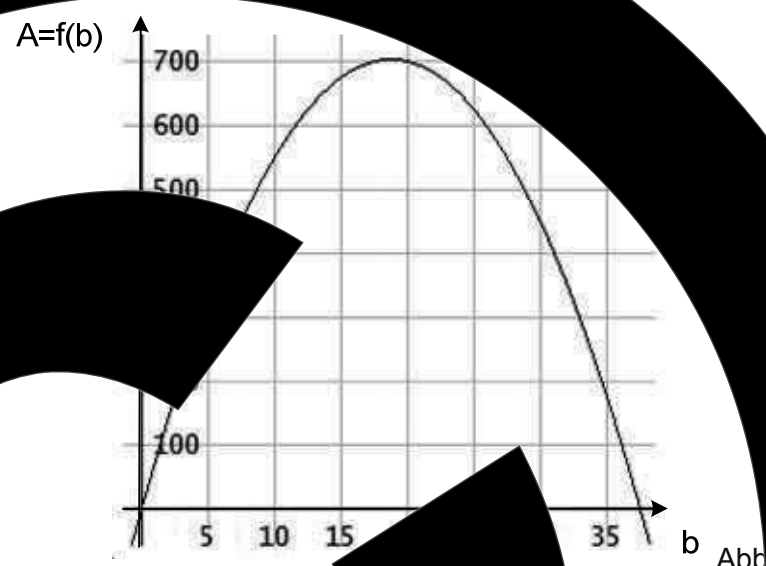
- b) Berechnen Sie für das eingezäunte Rechteck die Länge der Seite a und die Rechteckfläche A für die in der Tabelle angegebenen Werte von b.

b [m]	0	5	10	15	20	25	30	35	37,5
$a = 75 - 2b$ [m]									
$A = ab$ [m ²]									

- c) Der Verlauf der Funktion $f(b) = 75b - 2b^2$ ist in Abb. 6.3 dargestellt.

(1) Überprüfen Sie, dass die Funktion $f(b)$ die Größe der Rechteckfläche A beschreibt, indem Sie die entsprechenden Wertepaare aus der Tabelle in Aufgabenteil b) als Punkte im Diagramm unten eintragen.

(2) Erläutern Sie die Überlegungen, die der Bildung des Funktionsterms von $f(b)$ zu Grunde liegen.



- d) Ergänzen Sie den folgenden Satz einschließlich der Berechnungen.

Die Größe der eingezäunten Rechteckfläche hängt von den Werten ab, wenn die Seitenlänge b annimmt. Für $b = 0$ und $b = 37,5$ m entsteht ein Rechteck, dessen Fläche 0 m² annimmt. Die Fläche wird dort am größten, wo sich der _____ der Funktion $f(b)$ befindet, mit der die Fläche berechnet wurde. Damit kann man den Wert von b, für den die Fläche am größten wird, ermitteln, in dem man die Koordinaten des Hochpunktes der Funktion _____ ermittelt. Verwendet man für die Ermittlung des Hochpunktes der Parabel die Differenzialrechnung, so ergibt sich der Ansatz: _____.

Es sich die größtmögliche bzw. extremale Fläche zu den Wert von b ergibt, für den die Parabel einen Hochpunkt oder Extremwert besitzt, werden Aufgaben dieses Typs auch als **Extremwertaufgaben** bezeichnet.

- e) Berechnen Sie den Wert von b, für den die eingezäunte Rechteckfläche maximal bzw. extremal wird, und geben Sie die Maßzahl für den Extremwert dieser Fläche an, indem Sie die folgende Rechnung vollständig lösen.

$$f(b) = 75b - 2b^2$$

$$f'(b) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\text{Hochpunkt: } f'(b) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$b = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f''(b) = \underline{\hspace{2cm}} < 0 \quad \Rightarrow \text{Es liegt ein } \underline{\hspace{2cm}} \text{ Punkt vor}$$

$$\text{Größe der Fläche: } \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

Das hinreichende Kriterium für einen Hochpunkt ergibt sich hier schon bei der Prüfung der Ableitungen.

Satzinformation Optimierung:

Da man mit dem zur Verfügung stehenden Material die maximal mögliche oder auch optimale Fläche einzuzäunen möchte, werden Extremwertaufgaben auch als **Optimierungsaufgaben** bezeichnet.

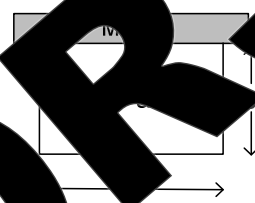
Aufgabe 6.2

Prinzipielle Vorgehensweise bei Extremwertaufgaben.

Obwohl es für Extremwertaufgaben eine Fülle von unterschiedlichen Aufgabenstellungen gibt, kann man die Betrachtungen aus Aufgabe 6.1 zu einer prinzipiellen Abfolge von Schritten zusammenfassen. Damit entsteht ähnlich zur Vorgehensweise bei Kurvendiskussionen und Extremwertaufgaben eine Art „Kochrezept“, das bei der Bewältigung der Aufgabenstellung zum Erfolg kommt. Verdeutlichen Sie sich die einzelnen Schritte und wenden Sie das Verfahren an den folgenden Übungen an.

1. Schritt Analyse der Aufgabenstellung

- (1) Zeichnen einer Skizze, wenn die prinzipielle Aufgabenstellung veranschaulicht werden soll.



Bei der Skizze darauf achten, dass nur die für die Rechnung wesentlichen Größen und Bedingungen einfließen. Unwichtige Details können weggelassen werden. Grundsätzlich die Formeln für die Lösung des Problems kann man bereits hier angeben.

- (2) Festlegen, welche Größe extremal werden soll.

Rechteckfläche $A \rightarrow a$

2. Schritt Ermitteln der Zielfunktion

- (1) Formulieren des Ansatzes für die zu optimierende Größe, wenn diese von einer Variablen abhängt.

$$f(a,b) = a \cdot b$$

Info 1: Die Fläche wird als $A = a \cdot b$ berechnet. Wir wissen aus Aufgabe 6.1, dass A ändert, wenn man b verändert. Das drückt man durch den Ausdruck $A(a,b)$ (sprich: A von a und b) aus. Das bedeutet, dass eine Funktion gleichzeitige von **zwei Variablen** abhängt. Bei Extremwertaufgaben kann man in diesem Fall **Nebenbedingungen** (s.u.) beachten.

Info 2: Nebenbedingung

Ergibt sich aus dem Ansatz für die zu optimierende Größe eine **Funktion**, die nur von **einer Variablen abhängt**, dann ist das bereits die gesuchte **Zielfunktion**. Das Bedeuten von **Nebenbedingungen entfällt** und man geht zum Schritt 3.

- (2) Formulieren der Nebenbedingung, wenn es die Aufgabe erfordert.

$$a = 75 - 2b$$

Um den Extremwert mit Hilfe der Zielfunktion berechnen zu können, muss man die ermittelte Funktion in eine Funktion einer Variablen überführen. Das geht aber nicht, wenn die Funktion gleichzeitig von zwei Variablen abhängt. Das heißt, man muss für eine der beiden Variablen eine sog. Nebenbedingung ermitteln. Diese Nebenbedingung kann dem Text entnommen werden. Hier steht hier in der Angabe, dass maximal 75 m Zaun zur Verfügung stehen. Aus Aufgabe 6.1 kann man die Nebenbedingung $a = 75 - 2b$ entnehmen.

- (3) Formulieren der Zielfunktion und Einbindung der Nebenbedingung, wenn es die Aufgabe erfordert.

$$f(b) = (75 - 2b) \cdot b$$

Durch das Einsetzen der Nebenbedingung für a in die Funktion $f(a,b)$ entsteht die Zielfunktion $f(b)$, die nur noch von der Variablen b abhängt und dann in Schritt 3 abgeleitet werden kann.

3. Schritt Berechnen des Extremwertes

- (1) Bilden der ersten beiden Ableitungen der Zielfunktion

- (2) Erste Ableitung null setzen und die Gleichung auflösen.

$$f'(b) = 0 \Rightarrow b = 18,75$$

- (3) Durch Einsetzen des Ergebnisses bzw. der Ergebnisse in die zweite Ableitung prüfen, ob es ein Maximum oder ein Minimum ist.

Maximum

- (4) Falls gefordert, die Maßzahl der zu optimierenden Größe berechnen.

$$\text{Für die maximale Fläche gilt: } A_{\max} = 75 \cdot 18,75 - 2 \cdot 18,75^2 \text{ m}^2 =$$

Übungen

In der folgenden Extremwertaufgabe soll untersucht werden, inwiefern man bei der Verpackung von Lebensmitteln und Getränken in Dosen dem rein mathematischen Optimierungsgesetz folgen kann, indem man bei vorgegebenem Doseninhalt versucht, den Materialbedarf für die Dose zu minimieren.

Wie häufig bei solchen Anwendungsproblemen werden vereinfachende Annahmen getroffen. Hier wird angenommen, dass für alle Bestandteile der Dose Metall gleich Dicke verwendet wird.

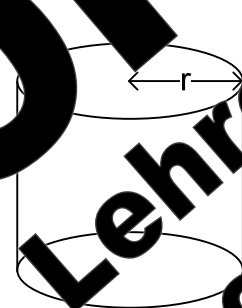
Übung 6.1

Handelsübliche Dosen haben beispielsweise bei Müsen, Marmeladen, Katzenfutter etc. Füllmengen von 850 ml und 425ml, während man bei Getränkedosens in der Regel Füllmengen von 0,33 l bzw. 0,5 l findet.

Es soll nun ermittelt werden, welche Höhe und welchen Durchmesser eine Getränkedose für ein vorgegebenes Volumen von 0,5 Litern so wählen sollte, dass der Materialverbrauch bei der Herstellung minimal wird, also Ressourcen geschont werden.

1. Schritt Analyse der Aufgabenstellung

(1) Zeichnen Sie eine prinzipielle Aufgabenstellung transparentlich.



Nur die wesentlichen Größen skizzieren. Die Dosen haben die Form eines Zylinders.

Formeln für den Zylinder können hier notiert werden.

Volumen: $V = \text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe} \Rightarrow V = \pi r^2 \cdot h$

Oberfläche: $O = \text{Grundfläche} + \text{Mantel} \Rightarrow O = \pi r^2 + 2\pi r \cdot h$

2. Schritt Ermitteln der Zielfunktion

Bestimmen Sie den funktionalen Zusammenhang für die zu optimierende Größe, die den Extremwert annehmen soll.

$f(r, h) = \pi r^2 + 2\pi r \cdot h$

Wenn beispielsweise die Höhe h kleiner wird, dann nimmt die Oberfläche unter der Bedingung, dass das Volumen der Dose konstant bleibt, zu. D.h. die Funktion f ist nicht von den Größen r und h unabhängig und man benötigt eine Nebenbedingung.

(2) Formulieren der Nebenbedingung, wenn es die Aufgabe erfordert.

$V = 0,5 \text{ l} = \text{ } \text{cm}^3$

Die Information, dass das Volumen 0,5 Liter betragen soll, legt die Nebenbedingung fest.

$$500 = \pi r^2 \cdot h \Rightarrow h = \frac{500}{\pi r^2}$$

Einsetzen von V in die Formel für das Volumen des Zylinders. Die Einheit cm^3 zwecks Vereinfachung hier weglassen. Damit beziehen sich immer noch die Längenmaße auf cm.

Auslösen der Formel für die Nebenbedingung nach einer der Größen, von denen die Funktion f abhängt, hier also nach r oder h .

Kriterium für die Wahl möglichst wenig Aufwand für die Umformungen.

(3) Formulieren der Zielfunktion unter Einbindung der Nebenbedingung, wenn es die Aufgabe erfordert.

$$f(r) = \pi r^2 + \frac{500}{\pi r} \cdot 2$$

$$f(r) = 2\pi r^2 + \frac{1000}{\pi r}$$

Durch das Einsetzen der Nebenbedingung h in die Funktion $f(r, h)$ entsteht die Zielfunktion $f(r)$, die nur noch von der Variablen r abhängt und damit in Schritt 3 abgeleitet werden kann.

3. Schritt Berechnen des Extremwertes

Bestimmen Sie die Ableitung der Zielfunktion

$$f'(r) = \frac{4\pi r}{\pi r^2} - \frac{1000}{\pi r^2}$$

$$f'(r) = \frac{4\pi r^2 - 1000}{\pi r^2}$$

$$f''(r) = \frac{8\pi r + 2000}{\pi r^3}$$

(2) Erste Ableitung null setzen und entstandene Gleichung auflösen.

$$f'(r) = 0 \Rightarrow 4\pi r - \frac{1000}{r^2} = 0$$

$$4\pi r = \frac{1000}{r^2}$$

$$4\pi r^3 = 1000$$

$$r^3 = \frac{1000}{4\pi}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{1000}{4\pi}}$$

(3) Durch Einsetzen des Ergebnisses bzw. der Ergebnisse aus der gelösten Gleichung in die Handlungsfunktion prüfen, ob ein Minimum oder ein Maximum vorliegt.

$$f''(4,3) = \frac{200}{4,3^3} > 0 \quad \text{Minimum}$$

Der genaue Wert von $f''(4,3)$ wird nicht benötigt. Es reicht eine Abschätzung, ob das Ergebnis negativ oder positiv ist. Hier kann der Wert nicht negativ werden.

4. Schritt Falls gefordert, die Maßzahl der zu optimierenden Größen berechnen.

Für den Durchmesser $d = 8,6 \text{ cm}$

Die Einheit cm ergibt sich aus den Überlegungen zur Einheit im 2. Schritt.

die Höhe gilt: $h \approx$

Ergebnis aus Schritt unter (2) in die Formel einsetzen.

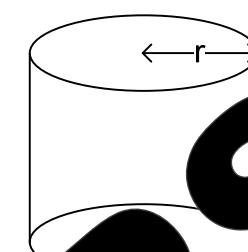
Das Ergebnis der Fertigung von Getränkedosen ist ein Optimierungsergebnis. Das Material zu verbrauchen folgt dem Prinzip der Wirtschaftlichkeit. In der Praxis werden praktische Entscheidungen getroffen. Sie mögliche handelsüblichen Form von Getränkedosen beschreiben Sie.

Übung 6.2

Sie haben in Übung 6.1 festgestellt, dass man für die untersuchte Getränkedose, um am wenigsten Verpackung benötigt, wenn der Durchmesser und die Höhe gleich sind. Es soll nun in der folgenden Aufgabe geprüft werden, ob dieses Verhältnis von Durchmesser und Höhe für alle Zylinderformen Dosen gilt. Vervollständigen Sie dazu unter Bezugnahme auf Übung 6.1 die Formeln und Überlegungen.

1. Schritt Analyse der Aufgabenstellung

(1) Zeichnen einer Skizze, welche die Aufgabenstellung veranschaulicht.



die wesentlichen Größen skizzieren. Die Dosen haben die Form eines Zylinders.

Formel für den Zylinder

Volumen: $V = \text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe}$

Oberfläche: $O = 2 \cdot \text{Grundfläche} + \text{Mantelfläche}$

(2) Formulieren, welche Größe extremal werden soll.

Oberfläche des Zylinders: $O =$

2. Schritt Ermitteln der Zielfunktion

(1) Ermitteln eines funktionalen Zusammenhangs für die zu optimierende Größe, d.h. die Größe, die den Extremwert annehmen soll.

Aufgabe erfordert.

$V = \text{const.}$

Die Information, dass das Volumen gleich bleibt, ist eine Nebenbedingung. Es wird nun kein Zahlenwert mehr benötigt.

$$V = \pi r^2 h$$

(3) Formulieren der Zielfunktion unter Einbindung der Nebenbedingung, wenn es die Aufgabe erfordert.

$$f(r) =$$

3. Schritt Berechnen des Extremwertes

(1) Bilden der ersten beiden Ableitungen der Zielfunktion

$$f(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r} = 2\pi r^2 + \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f'(r) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f'(r) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f''(r) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f''(r) = 4\pi + \frac{4V}{r^3}$$

(2) Erste Ableitung null setzen und eine Gleichung auflösen.

$$f'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0$$

$$\underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\underline{\hspace{2cm}} = 2V$$

$$\underline{\hspace{2cm}} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\underline{\hspace{2cm}}}$$

Setzt man für r den Ziehen der dritten Wurzel den Ausdruck $\pi r^2 h$ ein, folgt:

$$r^3 = \frac{\pi r^2 \cdot h}{2\pi}$$

$$| : r^2$$

Die Division durch die Lösungsvariable ist hier erlaubt, da die mögliche Lösung $r = 0$ nicht sinnvoll ist und damit wegfällt.

(3) Durch Einsetzen des Ergebnisses in die Zielfunktion aus der gelösten Gleichung anhand der zweiten Ableitung ein Minimum oder ein Maximum vorliegt.

$$f''(r) = \underline{\hspace{2cm}} \text{ Minimum}$$

Da $f''(r) > 0$ ist, wird hier $f''(r)$ ebenfalls positiv sein.

Schritt 4:

Bei der Herstellung von zylindrischen Dosen ist der Materialverbrauch abhängig vom vorgegebenen Volumen dann am geringsten, wenn der Durchmesser d die Höhe der Dosen h ist.

Aufgabe 6.3

Häufig beziehen sich Extremwertaufgaben auf Problemstellungen, bei denen sich funktionale Zusammenhänge ergeben, die sich in einem Koordinatensystem darstellen lassen. Eine oft auftretende Standardaufgabe ist hier, dass zwischen einer Kurve und der x-Achse ein Rechteck eingezeichnet werden soll, dass die Rechteckfläche maximal wird. Erarbeiten Sie sich die Lösung dieser Aufgabe, indem Sie fehlende Angaben ergänzen.

Aufgabenstellung

Abb. 6.1.3 zeigt ein reetgedecktes Dach mit einer Dachgaube. Das Fenster in der Dachgaube ist dem Eigentümer ungenutzbar und er möchte es bei anstehenden Renovierungsarbeiten durch ein rechteckiges Fenster ersetzen, das die möglichst große Fläche hat.



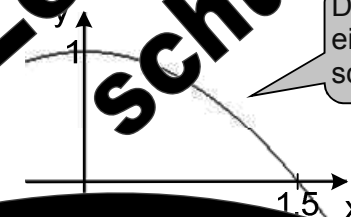
a) Ermitteln Sie anhand der angegebenen Maße die Gleichung einer Funktion, welche die Dachgaube beschreibt. Als stark vereinfachte Annahme bei dieser Modellierung soll hier angenommen werden, dass die Form der Dachgaube durch eine Parabel 2. Ordnung beschrieben werden kann, obwohl die Realität kompliziertere Funktionen zur Grundlage liegen.

b) Berechnen Sie die Fläche des rechteckigen Teils des Fensters, das einbauen sollte.

a) Konstruktion

Schritt 1: Allgemeine Funktionsform

Skizze



Die Parabel so in ein Koordinatensystem einfügen, dass man Symmetrieeigenschaften ausnutzen kann.

$$p(x) = ax^2 + 1$$

Der Scheitelpunkt S(b/c) der Parabel ist hier (0/1). Der Ansatz über die Scheitelpunktform $p(x) = a(x - b)^2 + c$ ist hier für die Ermittlung der Parameter a und b geeignet.

Schritt 2: Bestimmen Sie den Parameter a, indem Sie den Punkt (1.5/0) einsetzen.

$$\underline{\hspace{2cm}} = 0$$

$$a = \underline{\hspace{2cm}}$$

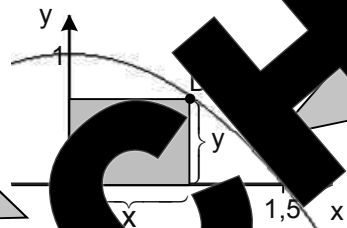
$$\therefore \text{Ergebnis } p(x) = -\frac{4}{9}x^2 + 1$$

b) Extremwertaufgabe

1. Schritt Analyse der Aufgabenstellung

- (1) Zeichnen einer Skizze, welche die prinzipielle Aufgabenstellung veranschaulicht.

Die Seiten des Rechtecks kann man anstatt mit a und b auch mit x und y bezeichnen.



Tipp: Nutzen von Symmetrieeigenschaften

Auch bei der Extremwertaufgabe nutzt man die Achsensymmetrie, um die Aufgabe zu vereinfachen und beachtet für die Rechnung nur den 1. Quadranten.

Fläche des Rechtecks: $A = x \cdot y$

- (2) Festlegen, welche Größe extremwertig werden soll.

$A = x \cdot y$

2. Schritt Ermitteln der Zielfunktion

Ermitteln eines funktionalen Zusammenhangs für die zu optimierende Größe, die die Größe, die den Extremwert annehmen soll.

$A(x, y) = x \cdot y$

Wenn man x ändert, verschiebt sich der Punkt P. Damit ändert sich auch y und die Fläche ist gleichzeitig von x und y abhängig.

- (2) Formulieren der Nebenbedingung, wenn es die Aufgabe erfordert.

Nebenbedingung:

- (3) Einsetzen der Nebenbedingung in $A(x, y)$

$$A(x) = x \cdot \left(-\frac{4}{3}x^2 + 1\right)$$

3. Schritt Berechnen des Extremwertes

- (1) Bilden der ersten beiden Ableitungen der Zielfunktion

$$A'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$A''(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

- (2) Erste Ableitung Null setzen, resultierende Gleichung auflösen

$$A'(x) = 0 \Rightarrow \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,87$$

Da sich der Ansatz für die Fläche auf den ersten Quadranten bezieht, fällt die negative Lösung hier weg.

- (3) Hinreichende Bedingung: $A''\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{8}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} < 0 \Rightarrow \text{Maximum}$

Der genaue Wert spielt keine Rolle. Das Ergebnis ist hier eindeutig negativ.

4. Schritt Ergebnis

$$\text{Höhe des Fensters: } h = y = p\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \underline{\hspace{2cm}} \approx 0,67$$

Das Fenster hat eine Breite von etwa 0,67 m und eine Höhe von etwa 0,67 m.

Ergebnis: $\underline{\hspace{2cm}}$

$\underline{\hspace{2cm}}$

$\underline{\hspace{2cm}}$

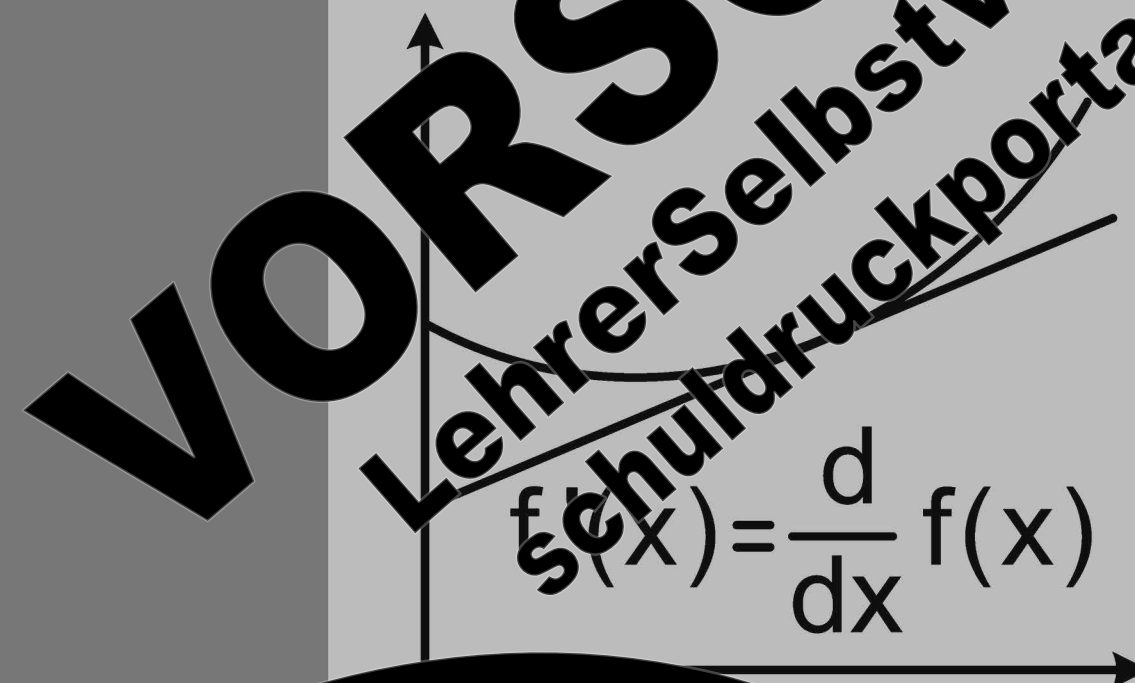
$\underline{\hspace{2cm}}$

Raum für Notizen



Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Differenzialrechnung und selbstorganisiertes Lernen



Kapitel 6

Produkt- Quotienten-
Kettenregel

Kapitel 7: Produkt-, Quotienten- und Kettenregel

Neue Ableitungsregeln werden erforderlich.

Bisher wurden im Rahmen der Differenzialrechnung nur ganzrationale Funktionen und einfache Wurzelfunktionen, sowie einfache trigonometrische Funktionen betrachtet.

Allerdings können beispielsweise bei der Beschreibung von Schwingungen mit Hilfe der Sinusfunktion auch Funktionen auftreten, die formelmäßig eine kompliziertere Struktur haben. Jeder hat schon beobachtet, dass die Amplitude (Ausschlag) eines Pendels mit der Zeit kleiner wird und das Pendel letztendlich zu Ruhe kommt. Die Abbildung rechts ist ein Verlauf einer gedämpften Schwingung ausschlagend dargestellt. Die abgebildete Schwingung kann mit

Hilfe der Funktion $f(t)$ mathematisch

beschrieben werden.

Eine Ableitung einer Funktion ist mit den bisher bekannten Ableitungsregeln nicht möglich. Daher ist es notwendig, solche Funktionen mit neuen Ableitungsregeln zu erfassen.

Hinweis: Die folgenden betrachteten Regeln werden später auch in der Integralrechnung Anwendung, da es für korrespondierende Integrationsregeln gibt.

Aufgabe 7.1

Die Produktregel der Differenzialrechnung

Anhand der Funktion $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \sin(x)$ (s. Abbildung oben) soll die **Produktregel** zunächst anschaulich verdeutlicht werden.

Die Funktion $f(x)$ setzt sich aus dem Produkt der Faktoren $\frac{1}{x}$ und $\sin(x)$ zusammen. Es ist üblich, einen Faktor mit $u(x)$ und einen Faktor mit $v(x)$ zu bezeichnen.

$$f(x) = \left(\frac{1}{x} \right) \cdot \sin(x)$$

$v(x)$

$$f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

Kapitel 1:
Grenzwertbetrachtungen 11

Kapitel 2:
Einführung in die Differenzialrechnung 43

Kapitel 3:
Grundlegende Anwendung der Differenzialrechnung 63

Kapitel 4:
Anwendung der Differenzialrechnung –
Verlauf von Funktionsgraphen 71

Kapitel 5:
Rekonstruktion von ganzrationalen Funktionen 101

Kapitel 6:
Extremwertaufgaben 121

Kapitel 7:
Produkt-, Quotienten- und Kettenregel 135

Kapitel 8:
Ableitung von Exponentialfunktionen 157

Kapitel 9:
Ableitung der Logarithmusfunktion 165

Gesamtwortung selbstorganisiert erlernt

(Bestandteil)

Seit

alle Rechte vorbehalten. All rights reserved.

Druck, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,

aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

SelbstVerlag

tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germany)

Lehrerselbstverlag.de

www.f-druck.de

a) Geben Sie die Ableitung der beiden Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ an.

$$u(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow u'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$v(x) = \sin(x) \Rightarrow v'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

b) Verwendet man ein **Computeralgebrasystem** (vgl. ...), so erkennt man, dass $f'(x)$ sich nicht direkt aus dem Produkt der abgeleiteten Funktionen $u'(x)$ und $v'(x)$ ergibt, sondern dass hier eine komplexere Regel zugrunde liegen muss. Erläutern Sie, warum sich aus dem angegebenen Ergebnis ... Tafelwerke ... angegebene Formel ableiten lässt, in dem Sie die Sprechblase ... und den ... Kontext ergänzen.

Ergebnis CAS

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \sin(x) \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2} \cos(x) + \frac{1}{x^2} \sin(x)$$

$\frac{1}{x^2}$ ist die Ableitung von $v(x) = \sin(x)$, also $v'(x)$.

$\frac{1}{x^2}$ ist der Funktions-term von $u(x)$.

Wenn sich eine Funktion aus den Faktoren $u(x)$ und $v(x)$ zusammensetzt, entsteht bei der Ableitung eine Summe.

Der erste Summand der Ableitungsfunktion ist das Produkt aus: $\underline{\hspace{1cm}}(x)$ und $\underline{\hspace{1cm}}(x)$

Der zweite Summand der Ableitungsfunktion ist das Produkt aus: $\underline{\hspace{1cm}}(x)$ und $\underline{\hspace{1cm}}(x)$

$$f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \quad \text{oder} \quad v'(x) \cdot u(x) + u'(x) \cdot v(x)$$

Hinweis: Die Produktregel mit Hilfe des Differenzierens kann in ... teilweise Wikipedia, nachgeschlagen ... es einen ... Beweis der Produktregel.

Beispiele zur Anwendung der Produktregel

Anhand der folgenden Beispiele, bei denen man nach geeigneter Umformung ... die bekannten Ableitungsregeln anwenden kann (ist einfacher), also strenggenommen ... die Produktregel benötigt, soll die Regel nun verifiziert werden. Ergänzen Sie fehlende ...

Anwenden der Produktregel

Beispiel 1:

$$f(x) = \underbrace{x^2}_{u(x)} \cdot \underbrace{x^3}_{v(x)}$$

$u(x)$ bzw. u und $v(x)$ bzw. v jeweils einen Faktor des Funktionsterms zuzuordnen

$$u = x^2 \quad v = x^3$$

$$u' = \underline{\hspace{1cm}} \quad v' = \underline{\hspace{1cm}}$$

$$f'(x) = u'v + v'u$$

$$f'(x) = 2x \cdot \underline{\hspace{1cm}} + 3x^2 \cdot \underline{\hspace{1cm}}$$

$$f'(x) = 5x^4$$

Überprüfung mit der bekannten Regel:

Anwenden bekannte Regel

Überprüfung mit der bekannten Regel:

$$f(x) = x^2 \cdot x^3$$

$$f'(x) = 2x \cdot x^3 + x^2 \cdot 3x^2$$

$$f'(x) = 5x^4$$

Anwenden der Produktregel

Beispiel 2:

$$f(x) = \underbrace{x^2}_{u(x)} \cdot \underbrace{(2x+1)}_{v(x)}$$

$u(x)$ und $v(x)$ die entsprechenden Funktionsterme zuzuordnen und getrennt voneinander ableiten.

$$u = x^2 \quad v = 2x+1$$

$$u' = \underline{\hspace{1cm}} \quad v' = \underline{\hspace{1cm}}$$

$$f'(x) = u'v + v'u$$

$$f'(x) = 2x \cdot (2x+1) + x^2 \cdot 2$$

Anwenden bekannte Regel

Überprüfung mit bekannter Regel:

$$f(x) = x^2 \cdot (2x+1)$$

$$f(x) = 2x^3 + x^2$$

$$f'(x) = 6x^2 + 2x$$

Übungen zur Produktregel

Übung 7.1

Leiten Sie die Ableitung der folgenden Funktionen ab. (Raum für Rechnung ... Folgeseite)

a)

$$f(x) = x^2 \sin x$$

$$g(x) = \ln(x)$$

b) $f(t) = \sin(t) \cdot \sin(t)$

e) $f(t) = \sqrt{1-x^2} \sqrt{t}$

h) $h(x) = \ln(x)$

c) $f(z) = \ln(z)$

f) $f(t) = \sqrt{1-x^2} \sqrt{t}$

i) $f(t) = \ln(t)$

Aufgabe 7.2

Empirische Herleitung der Kettenregel

Die Herleitung der Kettenregel kann wie auch die Produktregel allgemeiner mit Hilfe von Differentialquotienten erfolgen und somit in der gängigen Fachliteratur bzw. in der Media mathematisieren werden. Zur Verdeutlichung der Kettenregel soll im Rahmen dieser Unterlagen mit dem formalen Weg beschritten, sondern eine Sequenz von Beispielen herangezogen werden. Die Ableitungen von Funktionen kann man dazu beispielsweise von einem Computeralgebrasystem (Wolfram Alpha) ableiten lassen.

- | | | |
|--------------------------|---------|------------------------------|
| 1. $f(x) = ax + b$ | mit CAS | $f'(x) = a$ |
| 2. $f(x) = (ax + b)^2$ | mit CAS | $f'(x) = 2a(ax + b)$ |
| 3. $f(x) = (ax + b)^3$ | mit CAS | $f'(x) = 3a(ax + b)^2$ |
| 4. $f(x) = (ax + b)^4$ | mit CAS | $f'(x) = 4a(ax + b)^3$ |
| 5. $f(x) = (ax + b)^5$ | mit CAS | $f'(x) = 5a(ax + b)^4$ |
| 6. $f(x) = (ax^2 + b)^5$ | mit CAS | $f'(x) = 10ax(ax^2 + b)^4$ |
| 7. $f(x) = (ax^3 + b)^5$ | mit CAS | $f'(x) = 15ax^2(ax^3 + b)^4$ |
| 8. $f(x) = (ax^4 + b)^5$ | mit CAS | $f'(x) = 20ax^3(ax^4 + b)^4$ |
| 9. $f(x) = (ax^5 + b)^5$ | mit CAS | $f'(x) = 25ax^4(ax^5 + b)^4$ |

- a) Wählen Sie je eine Funktion und die zugehörige Ableitung und versuchen Sie herauszufinden, basierend auf welcher Systematik sich an den Beispielen für die Ableitung dieser Funktionen erkennen lässt, indem Sie den folgenden Satz ergänzen.

Leitungsfunktion: bleibt der Ausdruck in der Klammer

Die Potenz der Klammer wird um $\frac{1}{n}$ verringert und die ursprüngliche Potenz erscheint als Faktor

Klass

$$f(x) = (ax^4 + b)^3$$

$f'(x) =$

ursprung-
liche Potenz
der Klammer

Klammer mit um
1 verringerter
Potenz

Zusammengefasstes Ergebnis

c) Begriffe **Verkettung**, **innere**- und **äußere Funktion**

Innere Funktion

Den in der Klammer eingeschlossenen Ausdruck, hier also $ax^4 + b$, nennt man **innere Funktion**. Meist wird die innere Funktion mit $u(x)$ bezeichnet. Abkürzend kann man auch nur u verwenden.

Innere Funktion

$u(x) = ax^4 + b$ oder $u = \dots + b$

Äußere Funktion

Die **äußere Funktion** schließt die innere Funktion ein und besteht hier aus dem „am Ende“ also $(\dots)^3$, wobei es egal ist, was in der Klammer steht. Da man den Term in der Klammer mit $u(x)$ substituiert (ersetzt), kann man auch schreiben $(u)^3$ oder kurz $(u)^3$. Wie man an dem Namen erkennt, ist die äußere Funktion nicht mehr direkt von x abhängig, sondern von u . Man bezeichnet die **äußere Funktion** daher meist mit $v(u)$ oder einfach mit $v(u)$.

Äußere Funktion

$v(u) = (u(x))^3$ oder $v(u) = (\dots)^3$

Man kann den Begriff **Verkettung** eine einfache und anschauliche Vorstellung entwickeln. Man stellt sich die innere Funktion $u(x)$ als Geschenk vor und die äußere Funktion als das Packpapier. Wenn das Päckchen fertig gepackt ist, schließt das Packpapier das Päckchen, unabhängig von dessen Inhalt, vollständig ein.



d) Formulierung der **Kettenregel**

Betrachten wir nun den Aufgabenteil b) unter Verwendung der neuen Begriffe innere Funktion und äußere Funktion. Welche folgenden Zuordnungen treffen.

$f(x) = (ax^4 + b)^2$

innere Ableitung äußere Ableitung

Ergänzen Sie den folgenden Satz:

Bei verketteten Funktionen wird die Ableitung von $f(x)$ berechnet, indem die Ableitung der inneren Funktion mit der Ableitung der äußeren Funktion multipliziert.

Verbalisierung	Kurze Darstellung	Sprachliche Formulierung
$f(u(x))$	$f(x) = v(u)$	$f'(x) =$ innere Ableitung $\cdot$ äußere Ableitung
$f'(x) \cdot v'(u)$	$f'(x) =$	

Übung 7.2

Verdeutlichen Sie sich anhand der Beispiele die Anwendung der Kettenregel und ergänzen Sie dabei fehlende Angaben.

Beispiel 1: $f(x) = (5x^2 + x)^4$

1. Schritt: Zuordnen der inneren und äußeren Funktion

$$f(x) = (5x^2 + x)^4$$

$v(u(x))$

Äußere Funktion:

$$v(u) = (\dots)^4$$

Innere Funktion:

$$u(x) = \dots$$

2. Schritt: Voneinander getrenntes Ableiten der inneren und äußeren Funktion

Ableiten innere Funktion $u(x)$ nach x

$$u(x) = 5x^2 + x$$

$$u' = \dots$$

Ableiten äußere Funktion $v(u)$ nach u

$$v(u) = (u)^4$$

$$v' = 4(u)^3$$

$$v' = 4(5x^2 + x)^3$$

Rücksubstitution des Ausdrucks für u

Nur die äußere Funktion, also die Klammer, wird abgeleitet, egal was in der Klammer steht.

Eselsbrücke:
 $v = (\text{egal})^4$
 $v' = 4(\text{egal})^3$

3. Schritt: Zusammenfassen der einzelnen Ableitungen zum Ergebnis, entsprechend zu 7.2 b)

$$f'(x) = \dots = \dots$$

Zusammenfassen des Ergebnisses.

Beispiel 2: $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x}$. Kontrollergebnis: $f'(x) = \frac{(x+2)}{\sqrt{x^2 + 4x}}$

1. Schritt:

Äußere Funktion:

$$v = \sqrt{\dots}$$

Innere Funktion:

$$u = \dots$$

2. Schritt:

Innere Ableitung

$$u = x^2 + 4x$$

$$u' = \underline{\hspace{2cm}}$$

äußere Ableitung

$$v = \sqrt{u}$$

$$v' = \underline{\hspace{2cm}}$$

Rücksubstitution

3. Schritt: $f'(x) =$

Beispiel 3: Ableitung von $f(x) = \cos(2 - 3x)$

$$f(x) = \cos(2 - 3x)$$

$$f'(x) = u' \cdot v'$$

$$\cos(u)$$

Rücksubstitution

$$f'(x) = -\sin(2 - 3x) \cdot (-3) = 3 \sin(2 - 3x)$$

Übung 3

Berechnen Sie die folgenden Ableitungen mit der Kettenregel und stellen Sie die Ergebnisse so einfach wie möglich dar.

a) $f(x) = (5x - x^2)^3$ b) $f(x) = \sin(2x + 3)$

d) $f(x) = \cos(x^2)$ e) $f(x) = \sin(x^2)$ f) $f(x) = \cos^2(t)$

i) $f(x) = 3 \sin(1 - 0,5t^2)$

k) $f(x) = \frac{1}{1 + x^3}$ l) $f(x) = \frac{1}{\sin x}$

m) $s(t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ n) $v(t) = A \frac{2\pi}{T} \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ o) $f(x) = \sqrt{\sin(x)}$

Lösungen in uns

$$f'(x) = -2x \sin(x) \cos(x)$$

$$f'(x) = 2 \sin(x)$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{x-x^2}}$$

$$f'(t) = A \frac{2\pi}{T} \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

$$f'(x) = 0$$

$$f'(x) = \sin(1-t)$$

$$f'(x) = \frac{3x^2}{(1+x^3)^2}$$

$$f'(x) = -\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$$

$$f'(x) = \frac{\pi^2}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

$$f'(x) = 2 \cos(2x + \dots) = 3(5 - 2x)(5x - \dots)$$

VORSCHAU
Lehrerselbstverlag
schuldruckportal.de

Aufgabe 7.3

Quotientenregel

Die Quotientenregel kommt zum Einsatz, wenn der Funktionsterm als Quotient aus zwei Funktionen dargestellt werden kann, also die Form $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ hat.

Diesen Funktionsterm kann man auch ohne Nenner in der Form $f(x) = u(x) \cdot (v(x))^{-1}$ schreiben. Dann wäre es möglich, die Ableitung ohne die Anwendung dieser neuen Ableitungsregeln mit einer Kombination aus Produkt- und Kettenregel zu ermitteln. Der Einsatz der Quotientenregel spart jedoch oft den Rechenaufwand und ist daher meist vorzuziehen. (vgl. Aufgabe 7.4 Beispiel 3)

Die Herleitung und das Beweisen der Gültigkeit der Quotientenregel können in allen gängigen Fachbüchern und bei Wikipedia nachgelesen werden. Es wird hier daher nur die Regel selbst angegeben. Die Anwendung wird an einem Beispiel gezeigt und geübt.

Quotientenregel:

Funktion

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

Ableitung Funktion

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$$

$$\text{oder kurz: } f'(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

Beispiel 1:

Erläuterungen

$$u = x \quad v = x - 3$$

$$u' = 1 \quad v' = 1$$

$$(3) \quad f'(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2} \quad (3)$$

$$(4) \quad f'(x) = \frac{1 \cdot (x - 3) - 1 \cdot x}{(x - 3)^2} \quad (3) \rightarrow (4)$$

$$(5) \quad f'(x) = \frac{x - 3 - x}{(x - 3)^2} \quad (4) \rightarrow (5)$$

$$(6) \quad f'(x) = \frac{-3}{(x - 3)^2} \quad (5) \rightarrow (6)$$

Beispiel 2:

Erläutern Sie die Bedeutung der angegebenen Zeilen und der Rechenschritte in den Antworten

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 2} = \frac{u}{v}$$

Erläuterungen

(1) $u = x$ $v = x^2 + 2$
 (2) $u' = 1$ $v' = 2x$

(3) $f'(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

(4) $f'(x) = \frac{1(x^2 + 2) - 2x \cdot x}{(x^2 + 2)^2}$

(5) $f'(x) = \frac{2 - x^2}{(x^2 + 2)^2}$

(1)

(2)

(3)

(3) → (4)

(4) → (5)

Übung 7

Ein Computerprogramm ermittelt für die Funktion $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ die Ableitungsfunktion

$f'(x) = \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{2(x+1)^2}$. Prüfen Sie, ob dieses Ergebnis richtig ist.

Übung 7.5

a) Ermitteln Sie die erste Ableitung der Funktion $f(t) = \frac{1}{\sin(t)}$ mit Hilfe der Quotientenregel und vergleichen Sie dazu auch Übung 7.3.

b) Ermitteln Sie die erste Ableitung der Funktion $f(t) = \frac{t}{\sin(t)}$.

Zur Kontrolle (eines der beiden Ergebnisse trifft zu): $\frac{\sin(t) \cdot \cos(t)}{\sin^2(t)}$ oder $\frac{t \cos(t)}{\sin^2(t)}$

c) Ermitteln Sie die erste Ableitung der Funktion $f(x) = \tan(x)$ und überprüfen Sie Ihr Ergebnis beispielsweise anhand eines geeigneten Taschenrechners, in die Ableitungen von Standardfunktionen entnommen werden können.

hinweis:

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Aufgabe 7.4

Kombination mehrerer Ableitungsregeln

Es ist häufig notwendig, bei einer Ableitung mehrere Ableitungsregeln in einer Aufgabe anzuwenden. Man muss dann zuerst entscheiden, welche Regeln übergeordnet und welche Regel untergeordnet angewendet werden. Verdeutlichen Sie sich die folgenden Beispiele und wenden Sie danach die Vorgehensweise auf die nachfolgenden Übungen an.

Beispiel 1: $f(x) = x \sin(2\pi x)$

Übergeordnete Regel

Die Funktion $f(x)$ lässt sich in ein Produkt aus $u(x) = x$ und $v(x) = \sin(2\pi x)$ zerlegen. Damit ist die **Produktregel** die übergeordnete Regel.

Untergeordnete Regel

Die Funktion $v(x)$ ist verkettet. Daher benötigt man hier die **Kettenregel**. Zwecks Übersichtlichkeit, ist es günstig für die Bezeichnung dieser Verkettung nicht noch einmal u und v verwenden. Mit $a(x)$ als innere und $b(a)$ als äußere Funktion gewählt.

$$f(x) = \underbrace{x}_{u(x)} \cdot \underbrace{\sin(2\pi x)}_{v(x)}$$

Ableitung $u'(x)$

$$u' = 1 \quad v' = \sin(b'(a(x)))$$

$$a = 2\pi x \quad b = \sin(a)$$

$$a' = 2\pi \quad b' = \cos(a) = \cos(2\pi x)$$

$$v' = a' \cdot b'$$

$$v' = 2\pi \cos(2\pi x)$$

$$f'(x) = u'v + v'u$$

$$f'(x) = \sin(2\pi x) + 2\pi x \cos(2\pi x)$$

Beispiel 2: $f(x) = x + x \cos x$

Übergeordnete Regel

Die Funktion $f(x)$ lässt sich in $u(x) = x$ und $v(x) = x \cos(x)$ zerlegen. Damit ist die **Produktregel** die übergeordnete Regel.

Untergeordnete Regel

Die Funktion $v(x)$ lässt sich in $a(x) = x$ und $b(x) = \cos(x)$ zerlegen. Damit ist die **Produktregel** die übergeordnete Regel.

$$f(x) = \underbrace{x}_{u(x)} + \underbrace{x \cos(x)}_{v(x)}$$

Ableitung $u'(x)$

$$u' = 1 \quad v' = a'b' + b'a'$$

$$a = x \quad b = \cos(x)$$

$$a' = 1 \quad b' = -\sin(x)$$

$$v' = a'b' + b'a'$$

$$v' = \cos(x) - x \sin(x)$$

$$f'(x) = 1 + \cos(x) - x \sin(x)$$

Beispiel 3: $f(x) = \frac{x}{x^2 + 2}$

Die Funktion $f(x) = \frac{x}{x^2 + 2}$ ist bereits in Aufgabe 7.3 mit Hilfe der Quotientenregel abgeleitet worden.

Wie dort in der Sprechblase erwähnt, kann man hier auch die Produkt- und Kettenregel zu Anwendung bringen, wenn man die Funktion wie folgt umformt: $f(x) = x \cdot (x^2 + 2)^{-1}$. Ermitteln Sie die Rechenschritte unten und vergleichen Sie anschließend den Rechenaufwand der beiden Lösungswege.

Übergeordnete Regel

Die Funktion lässt sich als erstes in das Produkt $u(x)$ und $v(x)$ zerlegen. Damit ist die **Produktregel** die übergeordnete Regel.

Untergeordnete Regel

Die Funktion $v(x)$ ist eine verkettete Funktion. Damit ist die **Kettenregel** die untergeordnete Regel.

$$(1) \quad f(x) = \underbrace{x}_{u(x)} \cdot \underbrace{(x^2 + 2)^{-1}}_{v(x)}$$

$$(2) \quad u' = 1 \quad v' = (a'(x))^{-1}$$

$$(3) \quad a = x^2 + 2 \quad b = (a)^{-1}$$

$$(4) \quad a' = 2x \quad b' = -\frac{1}{a^2} = -\frac{1}{(x^2 + 2)^2}$$

$$(5) \quad v' = a' \cdot b' = -\frac{2x}{(x^2 + 2)^2}$$

$$(6) \quad f'(x) = u'v + v'u$$

$$(7) \quad f'(x) = 1 \cdot (x^2 + 2)^{-1} + \left(-\frac{2x}{(x^2 + 2)^2}\right) \cdot x$$

$$(8) \quad f'(x) = \frac{1}{x^2 + 2} - \frac{2x^2}{(x^2 + 2)^2}$$

Ergänzender Tip:

Sie, weder bei der Anwendung der Quotientenregel noch bei dem hier gezeigten Weg, müssen Sie nicht den Nenner auf, sondern die Ableitung des Nenners bilden. Das bringt bei der Kettenregel beim Vereinfachen des Quotienten zu Übung 7.5

Erläuterungen zum

(1)

(2)

(3)

(5)

(6)

(6)→(7)

(7)→(8)

(8)→(9)

(9)→(10)

Vergleich des Rechenaufwands:

PS

Aufgabe

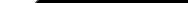
In der gegebenen Rechnung wird die zweite Ableitung der Funktion $f'(x) = \frac{x}{x^2 + 2}$ gebildet (vgl. Beispiel 7.3 und Beispiel 7.4, Aufgabe 7.4). Ergänzen Sie die fehlenden Angaben in der Rechnung, und begründen Sie, warum es für die Berechnung der zweiten Ableitung günstig ist, die Klammern des Binoms im Nenner von $f'(x) = \frac{x}{x^2 + 2}$ nicht aufzulösen.

Übergeordnete Regel:
Quotientenregel, da die
Funktions

$$f(x) = \frac{2 - x^2}{(x^2 + 2)^2} = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$(2) \quad u = 2 - x^2 \quad v = (x^2 + 2)^2$$

(3) b = _____

(4)  $b' = 2(a) = \underline{\hspace{2cm}}$

(5) $v' =$ _____

$$(6) \quad f''(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$(7) \quad f''(x) = \frac{-2x(x^2+2)^2 - 4x(x^2+2)(2-x^2)}{(x^2+2)^4}$$

Hinweis zum Kürzen

Man darf bei einem Bruch auch in Summen kürzen, wenn man hier, $\frac{1}{x^2+2}$, den Summand im Zähler mit dem Nenner den Faktor $(x^2 + 2)$ einmal

(8) $f''(x) =$ _____

$$(9) \quad f''(x) = \frac{2x^3 - 10x}{(x^2 + 2)^3}$$

Begründung:

PRC
Selbst
Report

Übu 7.6

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen die erste und zweite Ableitung. Beachten Sie dabei, dass Sie die Ausdrücke gegebenenfalls algebraisch umformen müssen, um das angegebene Vergleichsergebnis zu erhalten.

$$a) f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \Rightarrow f''(x) = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2 + 1)^3}$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{3-x}{1-3x} \Rightarrow f''(x) = \frac{48}{(1-3x)^3}$$

c) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

$$d) f(x) = \frac{x^2}{1-x^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{6x^2 + 2}{(1-x^2)^3}$$

Übung 7.7

Bei den folgenden Aufgaben müssen mehrere Ableitungsregeln in einer Aufgabe angewendet werden. Legen Sie, wie im Beispiel, zunächst immer fest, welche Regel die übergeordnete Ableitungsregel ist und welche Regel untergeordnet angewendet werden muss. Wenden Sie Produkt-, Quotienten- und Kettenregel an, um die Funktionen abzuleiten

a) $f(x) = x \cdot \sin(2x)$

d) $f(x) = 3x\sqrt{1+3x}$

g) $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

b) $f(x) = (2x-1)(3x+4)^2$

e) $f(x) = x + 2\sin^3 x$

h) $g(z) = \frac{\cos^2 z}{z}$

c) $f(x) = \sin 2x \cos 2x$

f) $f(t) = t^2 + 2t + \cos^3 x$

i) $f(t) = \frac{2\pi}{t} \sin\left(\frac{\pi}{t}\right)$

Übung 7.8

Bestimmen Sie $f'(x)$, wenn g und h differenzierbare Funktionen sind:

a) $f(x) = g(x) \cdot h(x)$

b) $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$

c) $f(x) = \sqrt{g(x)}$

d) $f(x) = \sqrt{h(x)}$

e) $f(x) = (g(x) \cdot h(x))^2$

f) $f(x) = \sqrt{g(x) \cdot h(x)}$

Ergänzende und vertiefende Übungen zu den Ableitungsregeln

Übung 7.9

Bei den folgenden Funktionen liegen Dreifachverkettung $f(x) = w(v(u(x)))$ vor. Zerlegen Sie sich die Vorgehensweise im folgenden Beispiel und verfahren Sie in den folgenden Übungen analog dazu.

Der Ausdruck wird von innen heraus schrittweise in innere und äußere Funktionen zerlegt. Die jeweiligen Funktionen werden durch $u(x)$, $v(u)$ und $w(v)$ substituiert.

$u(x) = x^3$ ist die innere Funktion von x^3 und die äußere Funktion ist $\sin(u)$.

$w = \sqrt{v}$ ist die äußere Funktion von $\sqrt{v}$ und die innere Funktion ist $v(u)$.

Beispiel:

$$f(x) = \sqrt{\sin(x^3)}$$

$$v = \sin(u)$$

$$u = x^3$$

$$w = \sqrt{v}$$

$$w' = \frac{1}{2\sqrt{v}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\sin(u)}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\sin(x^3)}}$$

$$f'(x) = 3x^2 \cdot \cos(x^3) \cdot \frac{1}{2\sqrt{\sin(x^3)}}$$

Nach der Berechnung der Ableitungen wird schrittweise zurücks substituiert.

Anmerkung:

Da die Schreibweise "... Strich von ..." für die Ableitung nach x vereinbart wurde (vgl. Kapitel 2 Information 2.1), jedoch die äußeren Funktionen v hier nach u und w hier nach v abgeleitet werden, ist die in diesem Beispiel verwendete Schreibweise v' und w' streng genommen nicht einwandfrei, ermöglicht jedoch eine übersichtliche Darstellung. In einer alternativen Sicht ist die folgende Darstellung

$$f(x) = \sqrt{\sin(x^3)}$$

$$u(x) = x^3$$

$$\frac{du(x)}{dx} = 3x^2$$

$$w = \sqrt{v}$$

$$\frac{dw(v)}{dv} = \frac{1}{2\sqrt{v}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\sin(u)}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\sin(x^3)}}$$

$$f'(x) = 3x^2 \cdot \cos(x^3) \cdot \frac{1}{2\sqrt{\sin(x^3)}} = \frac{3x^2 \cos(x^3)}{2\sqrt{\sin(x^3)}}$$

Verfahren Sie analog zum Beispielen

a) $f(x) = (1+\sqrt{x})^2$

b) $f(x) = \sin(1+x)^2$

c) $f(x) = (\sin(x^2))^{-1}$

d) $f(x) = (\sin(2x))^2$

e) $f(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$

f) $f(x) = \sin(\sqrt{1-x})$

Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Differenzialrechnung selbstorganisiertes Lernen

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)$$

Kapitel

Ableitung von
Exponentialfunktionen

Kapitel 8: Ableitung von Exponentialfunktionen

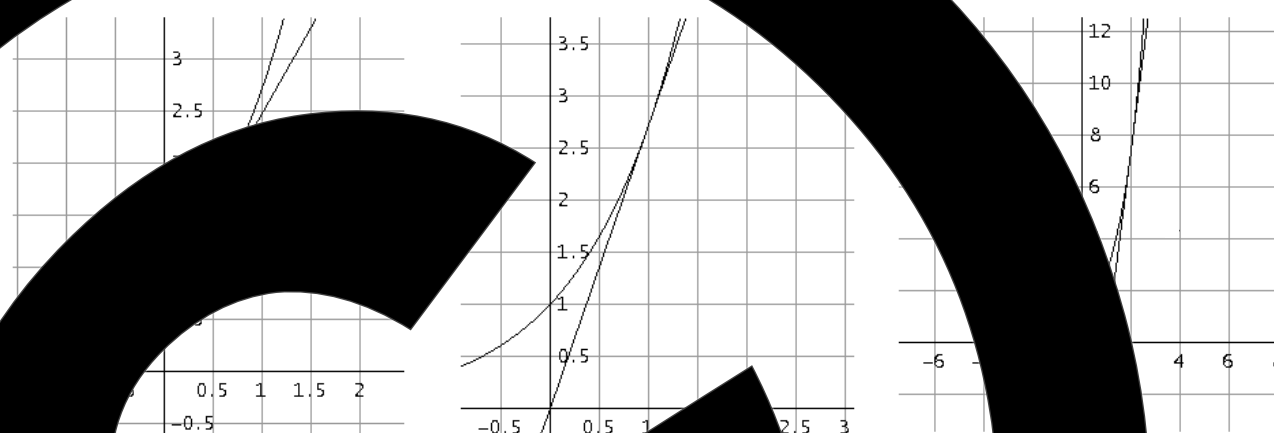
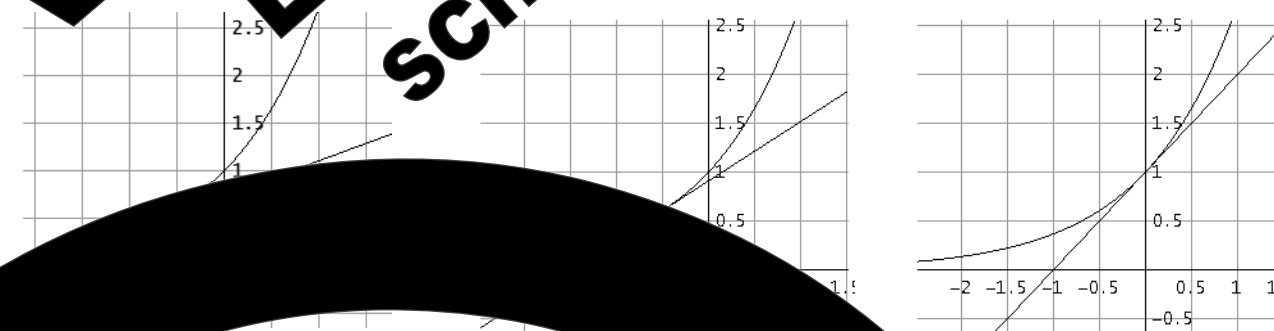
Die Ableitung von Exponentialfunktionen kann, wie alle weiteren Funktionen (sin, cos(x), ln(x) usw.), mit Hilfe des Differenzialquotienten und den dazu notwendigen Grenzwertbetrachtungen berechnet werden. Diese Beweise findet man in den Fachbüchern und Internet in geeigneten Quellen. Zudem gehören die Beweise dieser Ableitungsregeln zum Inhalt einiger der Mathematikvorlesungen an Hochschulen und Universitäten. Im Rahmen der vorliegenden Aufgaben sollen derartige Beweise nicht herangezogen und die Ableitung lediglich empirisch bestimmt werden.

Aufgabe 8.1

Ermittlung der Ableitung von $f(x) = e^x$ mit Hilfe der Steigung von Tangenten

In den Abbildungen unten ist jeweils die Funktion $f(x) = e^x$ in verschiedenen Ausschnitten in einem Koordinatensystem einschließlich einer Tangente dargestellt.

- Ergänzen Sie in jeder Abbildung die Beschriftung mit x und y .
- Berechnen Sie für jede Abbildung an dem gegebenen x -Wertes den Funktionswert im Berührungspunkt von Tangente und Funktion auf eine Dezimalstelle gerundet und tragen Sie den Wert in der Tabelle auf der nächsten Seite ein.
- Ermitteln Sie die Steigung der Tangenten, indem Sie in jeder Abbildung ein geeignetes Steigungsdreieck zeichnen und daraus die Werte für Δy und Δx ablesen. Tragen Sie die berechneten Werte in der Tabelle auf der folgenden Seite ein; beachten Sie jeweils die Skalierung. Verwenden Sie anschließend die abgelesenen Werte von Δy und Δx , um damit die Steigung in den Berührungspunkten zu berechnen. Geben Sie diese Werte auf eine Dezimalstelle gerundet an. Arbeiten Sie dabei so sorgfältig und genau wie möglich.



Kapitel 1:	
Grenzwertbetrachtungen	11
Kapitel 2:	
Einführung in die Differenzialrechnung	43
Kapitel 3:	
Grundlegende Anwendung der Differenzialrechnung	63
Kapitel 4:	
Anwendung der Differenzialrechnung – Verlauf von Funktionsgraphen	71
Kapitel 5:	
Rekonstruktion von ganzrationalen Funktionen	101
Kapitel 6:	
Extremwertaufgaben	121
Kapitel 7:	
Produkt- Quotienten- und Kettenregel	135
Kapitel 8:	
Ableitung von Exponentialfunktionen	157
Kapitel 9:	
Ableitung der Logarithmusfunktion	165

Gesamtwortwahlung selbstorganisiert erleb

(Best

S

erhalten. All rights reserved.

ark, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,

aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet

SelbstVerlag

tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ

lehrerselbstverlag.de

www.f-druck.de

x-Koordinate Berührungspunkt x_0	Funktionswert im Berührungspunkt $y = f(x_0) = e^{x_0}$	Steigung im Berührungspunkt $m = f'(x_0) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$
$x_0 = -1$	$f(x_0) = \underline{\hspace{2cm}}$	$f'(x_0) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underline{\hspace{2cm}}$
$x_0 = -0,5$	$f(x_0) = \underline{\hspace{2cm}}$	$f'(x_0) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underline{\hspace{2cm}}$
$x_0 = 0$	$f(x_0) = \underline{\hspace{2cm}}$	$f'(x_0) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underline{\hspace{2cm}}$
$x_0 = 0,5$	$f(x_0) = \underline{\hspace{2cm}}$	$f'(x_0) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underline{\hspace{2cm}}$
$x_0 = 1$	$f(x_0) = \underline{\hspace{2cm}}$	$f'(x_0) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underline{\hspace{2cm}}$
$x_0 = \underline{\hspace{2cm}}$	$f(x_0) = \underline{\hspace{2cm}}$	$f'(x_0) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underline{\hspace{2cm}}$

d) Vervollständigen Sie die Werte von $f(x_0)$ mit den Werten von $f'(x_0)$.

e) Formulieren Sie ein Ergebnis, indem Sie den Merksatz im Kasten vervollständigen.

Merke: Für den Zusammenhang zwischen der Funktion $f(x) = e^x$ und ihrer Ableitung gilt:

$$f'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

Der Zusammenhang ist nur im Exponenten die Variable, die abgeleitet wird, also hier x . In anderen Fällen ist die Kettenregel zu beachten.

Ergänzen Sie

Geben Sie die Stammfunktion von $f(x)$ an, falls Sie schon mit den Grundlagen der Integration rechnen können.

Die Stammfunktion zu $f(x) = e^x$: $F(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

Aufgabe 8.2

Anwendung der Ableitungsregeln bei e-Funktionen.

Die e-Funktion ist eine Variable, die den Exponenten der e-Funktion hier, aus einer e-Funktion besteht.

a) Kettenregel bei linear verketteten Funktionen der Form $f(x) = e^{ax+b}$

Da v nur u abgeleitet wird, gilt die Kettenregel für oben formulierte Regel.

Aus $v(u) = e^u \Rightarrow v'(u) = e^u$

Die Funktion $f(x) = e^{ax+b}$ ist eine Verkettung aus einer inneren Funktion $u = ax+b$ und einer äußeren Funktion $v(u) = e^u$.

Die Ableitung von $f(x)$ ist:

$$f'(x) = u' \cdot v'(u) = a \cdot e^{ax+b}$$

Zusatzinformation

Tafelwerken für $f(x) = e^{ax+b}$ kann für diese Ableitung auch die folgende Angabe verwendet werden:

$$f(x) = e^{u(x)} \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot e^{u(x)}$$

Verdeutlichen Sie die Ableitung der e-Funktion am Beispiel (1) und ergänzen Sie die Ableitung der e-Funktion am Beispiel (2).

$$u = -x + 3 \quad v = e^u$$

$$u' = -1 \quad v' = e^u = e^{-x+3}$$

$$f'(x) = u' \cdot v'$$

$$f'(x) = -e^{-x+3}$$

(2) $f(x) = e^{x^2}$

$$u = \underline{\hspace{2cm}} \quad v = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$u' = \underline{\hspace{2cm}} \quad v' = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f'(x) = u' \cdot v'$$

$$f'(x) = \underline{\hspace{2cm}} e^{\underline{\hspace{2cm}}}$$

b) Konstantenregel am Beispiel $f(x) = ce^{ax+b}$

$$\begin{aligned} f(x) &= ce^{ax+b} \\ f(x) &= c \cdot u(x) \\ f'(x) &= \boxed{\text{Konstante}} \cdot \boxed{\text{Ableitung } u(x)} \\ f'(x) &= c \cdot u'(x) \\ f'(x) &= a \cdot ce^{ax+b} = ace^{ax+b} \end{aligned}$$

Bemerkung:
Wie bei der Ableitung der allgemeinen Exponentialfunktion wird die Konstante bei der Differenzierung nicht berücksichtigt. Die Konstante wird lediglich dem Ergebnis der inneren Ableitung multipliziert.

Verdeutlichen Sie sich die Regel am Beispiel (1) und ergänzen Sie die Beispiele (2) und (3).

(1) $f(x) = 4e^{-x+3}$

$$\begin{aligned} u(x) &= -x+3 & v &= 4e^{} \\ u'(x) &= -1 & v' &= 4e^{} \\ f'(x) &= u' \cdot v' \\ f'(x) &= \underline{\hspace{2cm}} \cdot \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} \cdot \underline{\hspace{2cm}} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \underline{\hspace{2cm}} \cdot e^{\underline{\hspace{2cm}}} = \underline{\hspace{2cm}} \cdot e^{\underline{\hspace{2cm}}}$$

$$u = \underline{\hspace{2cm}} \quad v = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$u' = \underline{\hspace{2cm}} \quad v' = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \underline{\hspace{2cm}} \cdot \underline{\hspace{2cm}} \\ f'(x) &= \underline{\hspace{2cm}} \cdot e^{\underline{\hspace{2cm}}} \end{aligned}$$

c) Summenregel am Beispiel $f(x) = x^n + ce^{ax+b}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \underbrace{x^n}_{u(x)} + \underbrace{ce^{ax+b}}_{v(x)} \\ f'(x) &= \boxed{\text{Ableitung 1. Summand}} + \boxed{\text{Ableitung 2. Summand}} \\ f'(x) &= u'(x) + v'(x) \\ f'(x) &= nx^{n-1} + ace^{ax+b} \end{aligned}$$

Bemerkung:

Die Summenregel wird verwendet, wenn zwei oder mehrere Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ mit $+$ -Zeichen addiert werden. Man muss ggf. bei dem Summanden noch die Kettenregel anwenden. Hier wurde für $v'(x)$ das Ergebnis des Aufgabenteils b) von oben übernommen.

Verdeutlichen Sie sich die Regel am Beispiel (1) und ergänzen Sie die Beispiele (2) und (3). Versuchen Sie hier die Ableitung der Funktionen ohne schriftliche Zwischenschritte zu ermitteln.

(1)

$$\begin{aligned} f(x) &= \underbrace{2x}_{u(x)} + \underbrace{4e^{\frac{1}{2}x+3}}_{v(x)} \\ u'(x) &= 2 & v'(x) &= 2e^{\frac{1}{2}x+3} \\ f'(x) &= u'(x) + v'(x) \\ f'(x) &= 2 + 2e^{\frac{1}{2}x+3} \end{aligned}$$

Zwischenschritte für die Ableitung von $v(x)$ ggf. in Kopie berechnen.

$$\begin{aligned} v(x) &= 4e^{\frac{1}{2}x+3} \\ a &= -\frac{1}{2}x+3 & b &= 4e^{(a)} \\ a' &= -\frac{1}{2} & b' &= 4e^{(a)} \\ v'(x) &= a' \cdot b' \\ &= -\frac{1}{2} \cdot 4e^{\frac{1}{2}x+3} = -2e^{\frac{1}{2}x+3} \end{aligned}$$

(2)

$$f(x) = \underbrace{x^2}_{u(x)} - \underbrace{3e^{2x+5}}_{v(x)}$$

$$f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

$$f'(x) = 2x - 6e^{2x+5}$$

(3)

$$f(x) = 1$$

$$\begin{aligned} u(x) &= \underline{\hspace{2cm}} & v(x) &= \underline{\hspace{2cm}} & w(x) &= \underline{\hspace{2cm}} \\ u'(x) &= \underline{\hspace{2cm}} & v'(x) &= \underline{\hspace{2cm}} & w'(x) &= \underline{\hspace{2cm}} \end{aligned}$$

$$f'(x) = u'(x) + v'(x) - w'(x)$$

$$f'(x) = \underline{\hspace{2cm}} = e^{-x}(e^{2x} + \underline{\hspace{2cm}})$$

Zwischenschritte für $v'(x)$

$$\begin{aligned} v(x) &= 3e^{2x+5} \\ &\quad \quad \quad b(a(x)) \\ a &= \underline{\hspace{2cm}} & b &= \underline{\hspace{2cm}} \\ a' &= \underline{\hspace{2cm}} & b' &= \underline{\hspace{2cm}} \end{aligned}$$

d) Produkt- und Kettenregel am Beispiel $f(x) = x^2 e^{-x}$ (vgl. das Vorgehen mit Kapitel 7, Aufgabe 7.4)

Übergeordnete Regel:
Produktregel mit
 $u(x) = x^2$ und $v(x) = e^{-x}$

Untergeordnete Regel:
Kettenregel bei
 $v(x) = e^{-x}$

$$f(x) = x^2 e^{-x} = \underbrace{x^2}_{u(x)} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{v(x)}$$

$$u = x^2 \quad v = e^{-x}$$

$$u' = 2x \quad v' = -e^{-x}$$

$$f'(x) = u'v + v'u$$

$$f'(x) = 2x \cdot e^{-x} + (-e^{-x}) \cdot x^2$$

$$= 2xe^{-x} - x^2 e^{-x}$$

$$= (2x - x^2) e^{-x}$$

Wenn die zweite Ableitung verlangt wird, ist es sinnvoll, so auszuklammern, dass ein rationaler Faktor und ein exponentieller Faktor entstehen. Diese Umformung erleichtert in der Regel auch das Lösen einer Gleichung, die an den Ansatz $f'(x) = 0$ entsteht.

Ergänzen Sie in den folgenden Zeilen die fehlenden Angaben.

(1) $f(x) = 3x e^{-x+1} = \underbrace{3x}_{u(x)} \cdot \underbrace{e^{-x+1}}_{v(x)}$

$$u = 3x \quad v = e^{-x+1}$$

$$u' = 3 \quad v' = -e^{-x+1}$$

$$f'(x) = u'v + v'u$$

$$f'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f'(x) = 3e^{-x+1}(1-x)$$

Zwischenschritte für $v'(x)$

$$v(x) = e^{-x+1} = \underbrace{e^{-x+1}}_{b(a(x))}$$

$$a = \underline{\hspace{1cm}} \quad b = \underline{\hspace{1cm}}$$

$$a' = \underline{\hspace{1cm}} \quad b' = \underline{\hspace{1cm}}$$

(2)

$$u = \underline{\hspace{1cm}} \quad v = \underline{\hspace{1cm}}$$

$$u' = \underline{\hspace{1cm}} \quad v' = \underline{\hspace{1cm}}$$

$$f'(x) = u'v + v'u$$

$$f'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$= 4e^{-2x}(x-1)$$

Ergänzende und vertiefende Betrachtungen

Aufgabe 8.3

Ableiten einer e-Funktion mit nichtlinearer Verkettung

Die in Aufgabe 8.2 erarbeiteten Ableitungsregeln können direkt auf e-Funktionen mit nichtlinearen Exponenten übertragen werden. Zeigen Sie, dass die

Funktion $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$ (s. Abbildung Abb. 8.3.1) an den Stellen $x = 1$ und $x = -1$ Wendepunkte besitzt.

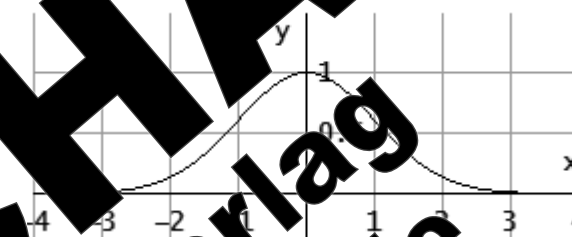


Abb.8.3.1

(Kontrollergebnis 2. Ableitung: $f''(x) = (x^2 - 1)e^{-\frac{1}{2}x^2}$)

Aufgabe 8.4

Ableiten einer beliebigen Exponentialfunktion zur Basis a

Verdeutlichen Sie sich die Vorgehensweise bei der Ableitung der allgemeinen Exponentialfunktion zur Basis a. Vollziehen Sie anschließend die Umformungen anhand der Funktion $f(x) = a^x$ nach und zeigen Sie, dass diese Funktion die zweite Ableitung $f''(x) = (\ln a)^2 \cdot a^x$ besitzt.

$$f(x) = a^x$$

Umformen der gegebenen Funktion zu einer Exponentialfunktion mit Basis e:

$$e^{z(x)} = a^x$$

$$\ln(e^{z(x)}) = \ln(a^x)$$

$$z(x) \ln e = x \ln a$$

$$z(x) = x \ln a$$

$$f(x) = e^{x \ln a}$$

Ermitteln der Ableitung:

$$f'(x) = u' \cdot e^u$$

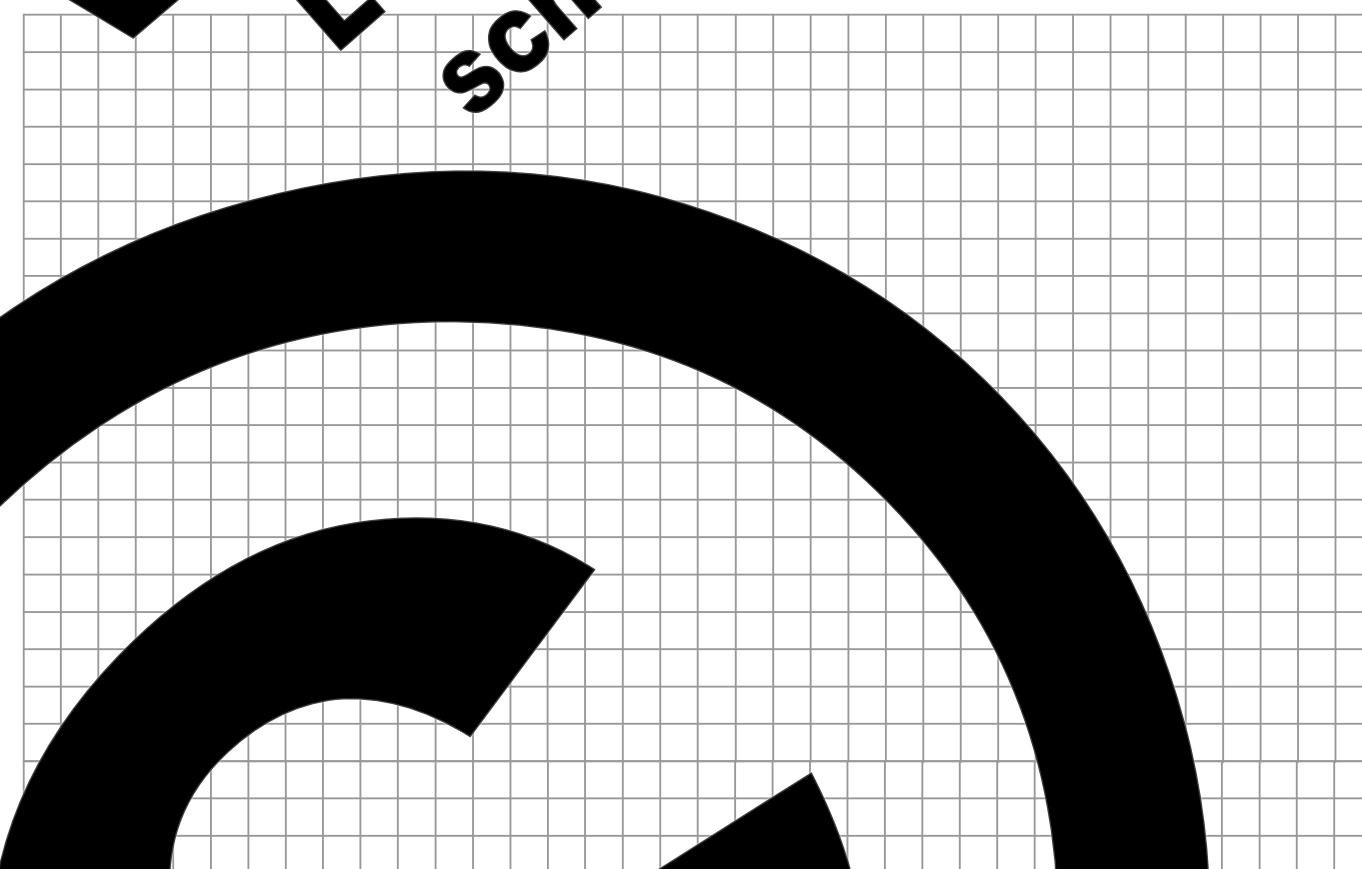
$$u = x \ln a$$

$$u' = \ln a$$

$$e^u = e^{x \ln a}$$

$$f'(x) = \ln a \cdot e^{x \ln a}$$

Vgl. Band „Grundlegendes zu Algebra und Funktionen“



Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Differenzialrechnung selbstorganisiert erlernen

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)$$

Kapitel 8

Ableitung der
Logarithmusfunktion

Kapitel 1: Grenzwertbetrachtungen	11
Kapitel 2: Einführung in die Differenzialrechnung	43
Kapitel 3: Grundlegende Anwendung der Differenzialrechnung	63
Kapitel 4: Anwendung der Differenzialrechnung – Verlauf von Funktionsgraphen	71
Kapitel 5: Rekonstruktion von ganzrationalen Funktionen	101
Kapitel 6: Extremwertaufgaben	121
Kapitel 7: Produkt- Quotienten- und Kettenregel	135
Kapitel 8: Ableitung der Exponentialfunktion	157
Kapitel 9: Ableitung der Logarithmusfunktion	165

Kapitel 9: Ableitung der Logarithmusfunktion

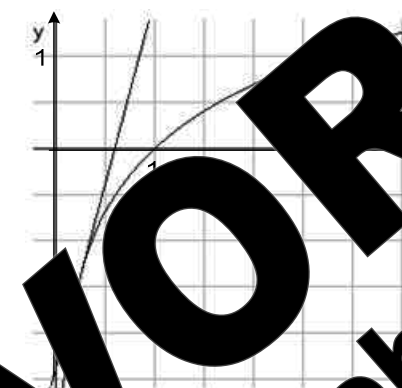
Aufgabe 9.1

Ermittlung der Ableitung von $f(x) = \ln(x)$ mit Hilfe der Steigung von Tangenten

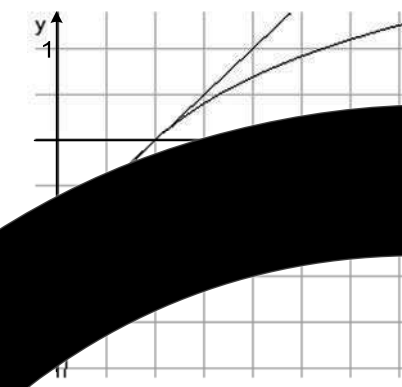
Entsprechend zur Vorgehensweise bei der Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ wird die Ableitung der Funktion $f(x) = \ln(x)$ anhand graphischer Überlegungen empirisch hergeleitet. Werden die Zeichnungenauigkeiten weitgehend zu vermeiden, werden in den folgenden Abbildungen jeweils die Funktion $f(x) = \ln(x)$ und eine Tangente dargestellt.

- a) Ermitteln Sie die Steigung der Tangenten an der Funktion $f(x)$ an den vorgegebenen Stellen mit Hilfe eines geeigneten Steigungsdreiecks und tragen Sie die Werte in die Tabelle auf der folgenden Seite ein. Arbeiten Sie so sorgfältig wie möglich.

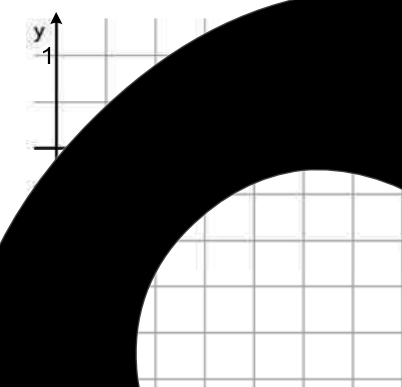
Tangente an der Stelle $x = \frac{1}{4}$



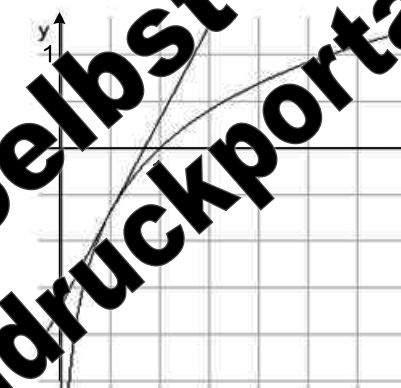
Tangente an der Stelle $x = 1$



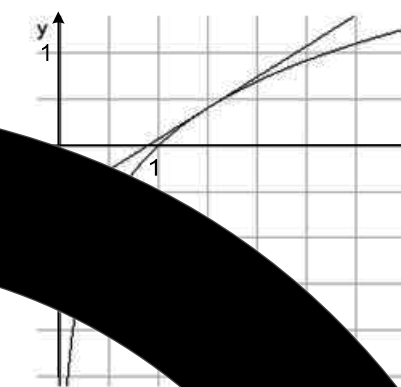
Tangente an der Stelle $x = 2$



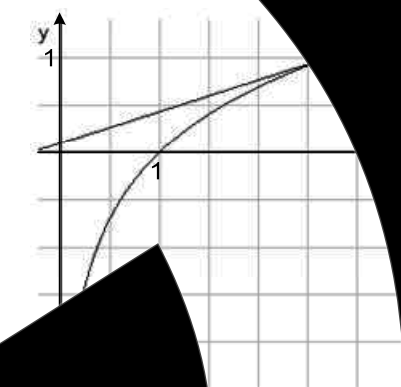
Tangente an der Stelle $x = \frac{1}{2}$



Tangente an der Stelle $x = \frac{3}{2}$



Tangente an der Stelle $x = \frac{1}{2}$



- b) Berechnen Sie die Steigung, indem Sie die abgelesenen Werte von Δy und Δx einsetzen und geben Sie das Ergebnis sinnvoll gerundet als Dezimalzahl an.

x-Koordinate im Berührungspunkt x_0	Δy	Δx	Steigung $f'(x_0) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$
$x_0 = \frac{1}{4}$			$f'(x_0) = \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \dots$
$x_0 = \frac{1}{2}$			$f'(x_0) = \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \dots$
$x_0 = 1$			$f'(x_0) = \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \dots$
$x_0 = \frac{3}{2}$			$f'(x_0) = \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \dots$
$x_0 = 2$			$f'(x_0) = \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \dots$
$x_0 = 3$			$f'(x_0) = \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \dots$

- c) Formulieren Sie ein Ergebnis, indem Sie den Merksatz im Kasten vervollständigen.

Merke: Für den Zusammenhang zwischen der Funktion $f(x) = \ln(x)$ und ihrer Ableitung gilt:

$$f'(x) = \dots$$

Ergänzung Integralrechnung:

Geben Sie die Stammfunktion an, falls Sie schon mit den Coeffizienten der Integralrechnung bekannt ist.

Stammfunktion zu $f(x) = \frac{1}{x}$: $F(x) = \dots$

Aufgabe 9.2

Anwendung der Ableitungsregeln bei ln-Funktionen.

- a) Erläutern Sie die Umformungsschritte bei der Ermittlung der Ableitung $f'(x) = \dots$ für die beiden dargestellten Rechenwege.

Rechenweg 1:

(1) $f(x) = \ln(ax)$ (1)→(2) $\dots$

(2) $f(x) = \ln(a) + \ln(x)$ (2)→(3) $\dots$

(3) $f(x) = u(x) + v(x)$ (3)→(4) $\dots$

(4) $f'(x) = u'(x) + v'(x)$ (4)→(5) $\dots$

(5) $f'(x) = \frac{1}{x}$

Rechenweg 2:

(1) $f(x) = \ln(ax)$ (1)→(2) $\dots$

(3) $u = ax$ $v = \ln u$ (3)→(4) $\dots$

(4) $f'(x) = u' \cdot v'$ (4)→(5) $\dots$

$$v' = \frac{1}{u}$$

$$= \frac{1}{ax} = \frac{1}{x}$$

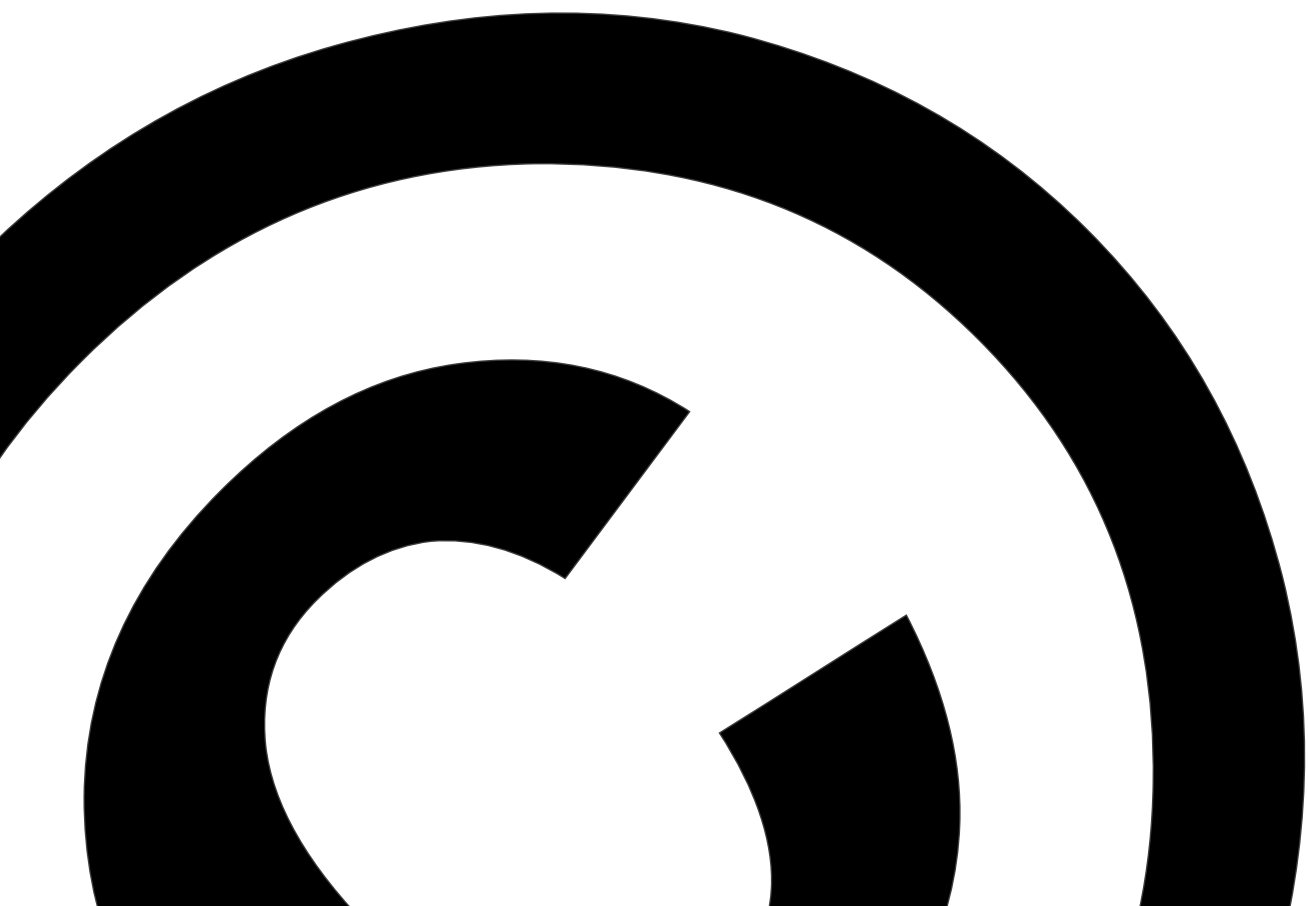
- b) Zeigen Sie mit beiden unter Aufgabenteil a) verwendeten Rechenwegen, dass für die Ableitung von $f(x) = \ln(ax^n)$ gilt: $f'(x) = \frac{n}{x}$ und $f''(x) = -\frac{n}{x^2}$. Berücksichtigen Sie dabei das Potenzgesetz $\ln(a^b) = b \ln(a)$ (vgl. Band „Grundlegendes zu Algebra und Funktionen“).



- c) Zeigen Sie mit beiden unter Aufgabenteil a) verwendeten Rechenwegen, dass für die Ableitung von $f(x) = \ln\left(\frac{a}{bx^n}\right)$ gilt: $f'(x) = -\frac{n}{x}$ und $f''(x) = \frac{n}{x^2}$.



VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de



**Umschlag
Rückseite
(Innen)**

(unbedruckt)

Hier können Sie noch Vorlagen einfügen



