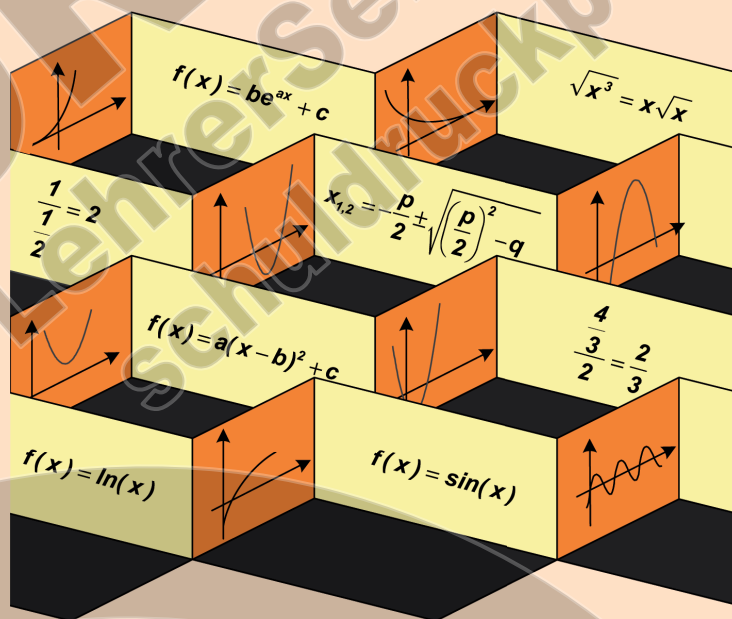


Grundlegendes zu Algebra und Funktionen

selbstorganisiert erlernen



Ursula PirkI



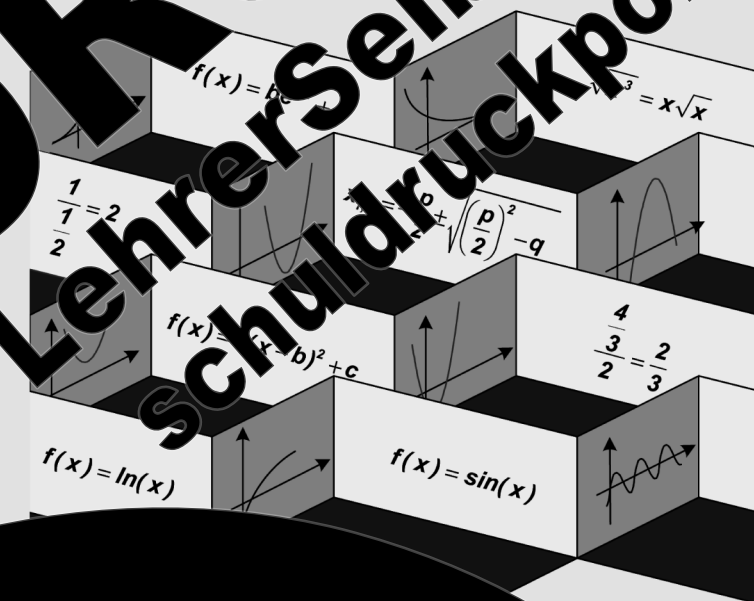
LEHRER
SELBST
VERLAG

Umschlag Vorderseite (Innen) (unbedruckt)

Hier können Sie noch Vorlagen einfügen

Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Grundlegende zu Algebra und Funktionen selbstorganisiert erlernen



Kapitel

Brüche, Potenzen, Wur-
und Binome

Kapitel 1	
Brüche, Potenzen, Wurzeln und Binome	9
Kapitel 2	
Grundlegendes zu Gleichungen	59
Kapitel 3	
Lineare Funktionen	63
Kapitel 4	
Quadratische und biquadratische Gleichungen und Ungleichungen	77
Kapitel 5	
Ganzrationale Funktion 2. Grades	87
Kapitel 6	
Gleichungen 3. und höherer Grades	104
Kapitel 7	
Ganzrationale Funktionen 2. und höherer Grades	115
Kapitel 8	
Die Hyperbelfunktion	127
Kapitel 9	
Trigonometrische Funktionen	135
Kapitel 10	
Exponential- und Logarithmusfunktionen	145
Kapitel 11	
Vertiefende Betrachtung von Betragsungleichungen	169

Gesamtwortmarkenrecht zu Algebra und Funktionen organisiert erlernen
(Bestandteil des Lehrplans Mathematik)
Sonderdruck
Alle Rechte vorbehalten. All rights reserved.
Nachdruck, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet
LehrerSelbstVerlag
LehrerSelbstVerlag GmbH, Koblenz (Germany)
www.lehrerSelbstVerlag.de
www.f-druck.de

Oberstudienrätin Ursula F. H.

Grundlegendes

zu Algebra

und Funktionen

selbst organisiert erlernen

Mathematik

Bestellnummer 02-033-279



www.f-druck.de

Kapitel 4:
Quadratische und biquadratische Gleichungen und Ungleichungen

Aufgabe 4.1
Lösungsverfahren für quadratische und biquadratische Gleichungen 77

Aufgabe 4.1.1
Quadratische Gleichungen der Form $ax^2 + c = 0$ 77

Aufgabe 4.1.2
Quadratische Gleichungen der Form $ax^2 + bx = 0$ 79

Aufgabe 4.1.3
Anwenden der pq-Formel bei quadratischen
Gleichungen der Form $ax^2 + bx + c = 0$ 80

Aufgabe 4.1.4
Lösen einer biquadratischen Gleichung der Form $ax^4 + c = 0$ 81

Aufgabe 4.1.5
Lösen einer quadratischen Gleichung in faktorisierter Form 82

Aufgabe 4.2
Erweiternde Betrachtung von Ungleichungen 84

Aufgabe 4.3
Erweiternde Betrachtungen: Quadratische Ungleichungen
und lineare Gleichungen 85

Kapitel 5:
Ganzrationale Funktionen 2. Grades

Aufgabe 5.1
Die Normalparabel $f(x) = x^2$ zeichnen 87

Aufgabe 5.2
Verschieben von Normalparabeln im Koordinatensystem 88

Aufgabe 5.2.1
a) Verschieben von Parabeln nach unten 88
b) Nullstellen 89
c) Darstellung in Scheitelpunktform und faktorisierter Form 89

Aufgabe 5.2.2
Verschieben von Parabeln nach links und rechts 90
Scheitelpunktbetrachtung bei den verschobenen Parabeln 91
Darstellung der Funktionsterme in Scheitelpunktform, polynomialer Form 92

Aufgabe 5.2.3
Verschieben von Parabeln in x- und y-Richtung 92

Aufgabe 5.2.4
Parabeln strecken und stauchen 95

Aufgabe 5.3
Lagebestimmung 100

Kapitel 6:
Gleichungen 3. und höheren Grades

Aufgabe 6.1
Lösen einer Gleichung höheren Grades, die in faktorisierter Form vorliegt 104

Aufgabe 6.2
Lösen einer Gleichung, bei der man x^n ausklammern kann 105

Aufgabe 6.3
Lösen einer Gleichung mit der Polynomdivision 106

Kapitel 7:
Ganzrationale Funktionen 3. und höheren Grades

Aufgabe 7.1
Verlauf von Ganzrationale Funktionen 3. Grades 115

Aufgabe 7.2
Symmetriebetrachtung bei ganzrationalen Funktionen 122

Aufgabe 7.3
Rechnerischer Nachweis der Symmetrie bei Funktionen 123

Kapitel 8:
Umkehrfunktionen

Aufgabe 8.1
Bestimmung der Umkehrfunktion 127

Aufgabe 8.2
Zusammenhang zwischen einer Funktion und ihrer Umkehrfunktion 127

Aufgabe 8.3
Zusammenhang zwischen den Graphen von Funktion und Umkehrfunktion 129

Aufgabe 8.4
Umkehrbarkeit von Funktionen 131

Aufgabe 8.5
Rechnerischer Nachweis der Umkehrfunktion 131

Kapitel 9:
Trigonometrische Funktionen

Aufgabe 9.1
Winkel und Seitenlängen im rechtwinkligen Dreieck 135

Aufgabe 9.2
Bogenlänge, Grad- und Bogenmaß 137

Aufgabe 9.3
Die Sinusfunktion 138

Aufgabe 9.4
Anwendung der Sinusfunktion 139

Aufgabe 9.5
Periodizität der Sinusfunktion 142

Aufgabe 9.6
Lösen von trigonometrischen Gleichungen 142

Kapitel 10:
Exponential- und Logarithmusfunktionen

Aufgabe 10.1
Exponentielles Wachstum 145

Aufgabe 10.2
Exponentielle Abnahme – Zerfallsprozesse 146

Aufgabe 10.3
Vergleich von linearem, quadratischem und exponentiellem 147

Aufgabe 10.4
Exponentialfunktionen und ihre Umkehrfunktion 149

Aufgabe 10.6
Umrechnen einer Exponentialfunktion in eine Exponentialfunktion zur Basis b 151

Aufgabe 10.7
Lösen von Exponentialgleichungen zur Basis e 154

Aufgabe 10.8
Lösen von Logarithmen 157

Aufgabe 10.9
Verschieben, Strecken, Stauchen und Spiegeln einer Funktion 161

Aufgabe 11.1
Verhalten bei Strecken, Stauchen und Spiegeln der Funktion $f(x) = \ln(x)$ 165

Kapitel 11:
Die Betrachtung von Betragsungleichungen

Aufgabe 11.1
Lineare Betragsgleichungen, in denen ein Betrag auftritt 169

Aufgabe 11.2
Betragsungleichungen mit mehreren Beträgen 172

Stichwortverzeichnis 175

Vorwort

Grundlegende Kenntnisse zur Algebra und zu Funktionen sind Voraussetzung für das Verständnis der Mathematik an weiterführenden Schulformen und an Hochschulen und damit der Schlüssel zum Erfolg auf einem eingeschlagenen Bildungsweg. Erfahrungen an Schule und Hochschule zeigen allerdings, dass gerade hinsichtlich dieser Thematik häufig Kenntnisse fehlen oder verschüttet sind und Lernende das Verständnis neuer mathematischer Zusammenhänge nicht gelingen kann, da sie an elementaren Umformungen, die beispielsweise Brüche, Potenzen und Binome enthalten, scheitern.

Das Ziel des vorliegenden Arbeitsbuchs ist das vorhandene Grundkenntnisse aufzufrischen und zu organisieren. Dabei werden die zentralen Zusammenhänge schrittweise und unter Verzicht auf nicht unbedingt notwendige Formalismen erklärt und an Beispielen verdeutlicht. Die Beispiele und Übungsaufgaben sind so gestaltet, dass möglichst schnell ein Verständnis für das Verständnis der Mathematik als Vorbereitung der Schulform erreicht werden kann, auch Hochschulen, die Beschränkungen in der Sekundarstufe I. So werden Umformungen, die bei der Berechnung des Differenzquotienten beim Ableiten häufig auftreten und bei der Integration auftreten, losgelöst von diesen Themen rein algebraischer Sicht behandelt.

Ziele und Hinweise zur Handhabung des Arbeitsbuchs

Die einzelnen Themen des Arbeitsbuchs bauen aufeinander auf, so dass eine systematische Bearbeitung der einzelnen Kapitel in der vorgegebenen Reihenfolge sinnvoll ist. Die Lernenden werden in der Handhabung des Arbeitsbuchs durch die folgenden Hinweise unterstützt:

- Anwenden und Wiederholen von Bruchrechnung und binomischen Formeln.
- Thematisieren von parametrisierten Gleichungen.
- Ergänzende Betrachtungen von Bruchgleichungen.
- Lösen von linearen Gleichungen und Ungleichungen wird im Zusammenhang mit dem Lösen von quadratischen Ungleichungen betrachtet.

Kapitel 1

Die Themen in diesem Kapitel beziehen sich auf die Themen Bruchrechnung, Potenzen und binomische Formeln und sind damit Grundlage für die folgenden Kapitel.

Kapitel 2

Da das Lösen linearer Gleichungen den Lernenden in der Regel keine größeren Probleme bereitet, ist dieses Kapitel knapp gehalten. Die Gleichungen sind unter folgenden Gesichtspunkten ausgewählt worden:

- Anwenden und Wiederholen von Bruchrechnung und binomischen Formeln.
- Thematisieren von parametrisierten Gleichungen.
- Ergänzende Betrachtungen von Bruchgleichungen.
- Lösen von linearen Gleichungen und Ungleichungen wird im Zusammenhang mit dem Lösen von quadratischen Ungleichungen betrachtet.

Kapitel 3

Da viele Lernende in der Lage sind, ohne Taschenrechner und ohne Formeln also alleine aus den Informationen zum y-Achsenabschnitt und zur Steigung Geraden zu zeichnen, wird dieses Thema ausführlich behandelt. Zudem werden die Grundlagen für alle Funktionsklassen gültige Ansätze, zum Beispiel von Achsenabschnitten und Schnittpunkten.

Kapitel 4

Quadratische Gleichungen werden in der Lösung mithilfe der Mitternachtsformel in der Regel gelöst. Allerdings ist die Anwendung alternativer Lösungsverfahren meist Neuland, das rein rechnerisch oder durch die Anwendung der Mitternachtsformel bereitete oft ein Problem. Eine kleine

schrittige Erläuterung der Lösungsmöglichkeiten in Abhängigkeit von der Form der Gleichung und umfangreiche Übungen dazu stehen hier im Mittelpunkt. Das Lösen von Wurzelgleichungen und quadratischen Ungleichungen wird erweiternd betrachtet.

Kapitel 5

Für die Kenntnisse rund um Parabeln gilt Ähnliches wie für die quadratischen Gleichungen. Grundlagen sind meist vorhanden, jedoch treten häufig schon beim Zeichnen einer verschobenen Normalparabel ohne Erstellung einer Wertetabelle Schwierigkeiten auf. Die hier notwendigen Techniken und die Gesetzmäßigkeiten hinsichtlich des Verschiebens, Streckens, Stauchens und Spiegels von Parabeln werden an Beispielen vermittelt. Ergänzend dazu wird die Darstellung des Funktionsterms in Scheitelpunktform, polynomialer und faktorisierten Form, deren Bedeutung und das Umrechnen von einer Darstellungsform in eine andere thematisiert. Die Bedeutung der Diskriminanten bei der Berechnung von Nullstellen und bei Schnittpunktproblemen sowie die pq-Formel werden ebenfalls behandelt.

Kapitel 6 und 7

In diesen beiden Kapiteln findet der Übergang zu den Themenkomplexen „Wurzeln“ und „Potenzen“ statt. Während in Kapitel 6 die Grundlagen für Gleichungen 3. und 4. Grades vorgestellt und geübt werden, findet in Kapitel 7 der Einstieg in die Untersuchung von ganzrationalen

onalen Funktionen 3. und 4. Grades statt, wobei auch hier der Zusammenhang mit der Bedeutung von Funktionsgleichungen in polynomialer und faktorisierter Form thematisiert wird.

Kapitel 8 bis 11

Vertiefend werden die Zusammenhänge zwischen Funktionen und ihren zugehörigen Umkehrfunktionen sowie die erweiterten Regeln hinsichtlich des Verschiebens, Streckens, Stauchens und Spiegels, bilden einen Schwerpunkt dieses Kapitels. Die Betrachtungen beziehen sich auf ganzrationalen und trigonometrische Funktionen, sowie Exponential- und Logarithmusfunktionen und die Lösung von Gleichungen, die bei diesen Funktionsklassen auftreten können. Diese hier erworbenen Kenntnisse sind eine Voraussetzung für die Untersuchung komplexer Funktionen im Rahmen der Differenzial- und Integralrechnung in der Qualifizierungsphase der gymnasialen Oberstufe und, kann in dieser Phase auf das Nachschubuch zurückgegriffen werden. Der Aufbau und die Struktur ermöglichen hierbei einen Einsatz im Grund- und im Leistungskurs.

Dank

Für Anregungen zur inhaltlichen und formalen Gestaltung danke ich meinem Mann, Dipl.-Ing. Gerold Pirkl und Professor Dr. Thorsten-Karl Stempel von der Hochschule Darmstadt.

Kapitel 1: Brüche, Potenzen, Wurzeln und Binome

Sie haben in der Sekundarstufe I bereits die Gesetze zum Umgang mit Brüchen, Potenzen, Wurzeln und binomischen Formeln kennen gelernt. Allerdings zeigt es sich häufig, dass gerade die Anwendung dieser elementaren algebraischen Zusammenhänge immer wieder Schwierigkeiten bereitet. Daher soll in diesem Kapitel die Möglichkeit gegeben werden, die wesentlichen Punkte noch einmal zu wiederholen.

Aufgabe 1.1

Arbeiten mit Brüchen

Im Rahmen dieser Aufgabe sollen grundlegende Umformungen bei Brüchen, die in späteren Aufgaben und Kapiteln zurückgegriffen werden, wiederholt werden. Es wird hier besonderer Wert darauf gelegt, die einzelnen Rechnungen in Teilschritten zu zeigen, die bei einem Umgang mit Brüchen automatisiert im Kopf ablaufen. Die einzelnen Rechenschritte werden hier aufgelistet und überwiegend in den Sprechblasen verdeutlicht. Arbeiten Sie die gegebenen Informationen durch und wenden Sie die Verfahren jeweils auf die Übungen an.

a) Definition

echter Bruch:

Der Zähler ist kleiner als der Nenner.

Bsp.: $\frac{8}{9}$

Die Zahl oberhalb des Bruchstrichs wird als **Zähler** bezeichnet.

Die Zahl unterhalb des Bruchstrichs wird als **Nenner** bezeichnet.

unechter Bruch:

Der Zähler ist größer oder gleich dem Nenner.

Bsp.: $\frac{16}{9}$

Man kann eine ganze Zahl in einen unechten Bruch überführen, indem man die ganze Zahl mit dem Nenner 1 versieht.

Bsp.: $4 = \frac{4}{1}$

Man kann einen unechten Bruch in eine ganze Zahl und einen gebrochenen Teil zerlegen. Ein unechter Bruch.

Bsp.: $2\frac{4}{9}$

Achtung!

Bei gemischten Zahlen steht zuerst die ganze Zahl, hier 2, und dem Bruch ein unsichtbares Pluszeichen (+) und kein Multiplikationszeichen (·). $2\frac{4}{9} = 2 + \frac{4}{9}$ und nicht $2 \cdot \frac{4}{9}$

Man erhält den Kehrwert eines Bruches, indem man den Zähler und den Nenner des Bruchs „umdreht“.

Bsp.: Der Kehrwert des Bruchs $\frac{5}{4}$ ist der Bruch $\frac{4}{5}$.

b) Unechte Brüche und gemischte Zahlen umwandeln

Umwandeln einer gemischten Zahl in einen unechten Bruch

Schritte:

- Den Nenner des Bruchs mit der ganzen Zahl vor dem Bruch multiplizieren.
- Das Produkt zum vorhandenen Zähler des Bruchs addieren.
- Der Nenner bleibt gleich.

Beispiel:

$$\begin{array}{l} \text{Im Kz: } 5 \cdot 4 = 20 \\ \frac{19}{5} = \frac{20 + 4}{5} = \frac{24}{5} \end{array}$$

Umwandeln eines unechten Bruchs in eine gemischte Zahl

Schritte:

- Zähler durch den Nenner teilen.
- Den ganzzahligen Teil ablesen.
- Den Rest als Bruch darstellen. Dabei kommt der Rest als Zähler; der Nenner bleibt gleich.
- Wenn kein Rest entsteht, ist es eine ganze Zahl.

Beispiel:

$$\frac{29}{6} = 4 \frac{5}{6}$$

Im Kz: $29 : 6 = 4 \text{ Rest } 5$

Übung zu 1.1.a: Wandeln Sie den unechten Bruch in eine gemischte Zahl, bzw. die gemischte Zahl in einen unechten

(1) $3\frac{1}{2} = \frac{\quad}{\quad}$

(2) $\frac{9}{4} = 2\frac{\quad}{\quad}$

(3) $4\frac{2}{3} = \frac{\quad}{\quad}$

(4) $5\frac{3}{4} = \frac{\quad}{\quad}$

(5) $\frac{17}{12} = 1\frac{\quad}{\quad}$

c) Erweitern eines Bruchs auf einen vorgegebenen Nenner

Schritte:

- Wie oft passt der gegebene Nenner in den neuen vorgegebenen Nenner?
- Zähler und Nenner mit der gefundenen Zahl multiplizieren.

Beispiel:

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{15}{20}$$

Im Kz: Die 4 passt 5-mal in 20, also $\frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{15}{20}$

Übung zu 1.1.c: Erweitern Sie auf den angegebenen Nenner:

- (1) $\frac{5}{6}$ und $\frac{3}{4}$ auf den Nenner 12
- (2) $\frac{5}{12}$ und $\frac{3}{8}$ auf den Nenner 48
- (3) $5\frac{1}{8}$ auf den Nenner 16:

Beispiel: $\frac{5}{1} = \frac{5 \cdot 5}{1 \cdot 5} = \frac{25}{5}$ (d.h., dass man 5 auch als $\frac{5}{1}$ darstellen kann.)

d) Kürzen von Brüchen

i) Methode des gemeinsamen Teilers kürzen

Ziel:

$$\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

12:2=6
18:2=9

6:3=2
9:3=3

$\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

Beispiel:

$$\frac{24}{36} = \frac{2}{3}$$

24:4=6
36:4=9

$\frac{24}{36} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

ii) Methode 2: Zähler und Nenner in Primfaktoren zerlegen

Schritte Methode 2:

1. Die Zahlen im Zähler und Nenner in Primfaktoren zerlegen.

Bsp.: $24:2=12$
 $12:2=6$
 $6:2=3$

Beispiel:

Primfaktoren sind die Zahlen, die nur durch sich selbst und 1 teilbar sind, also 2, 3, 5, 7, 11, ...

2. Die einzelnen Faktoren paarweise im Zähler und Nenner streichen (kürzen).

$$\frac{24}{36} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{2}{3}$$

iii) Methode 3: Den größten gemeinsamen Teiler (ggT) verwenden

Schritte Methode 3:

1. Den größten gemeinsamen Teiler (ggT) von Zähler und Nenner bestimmen (s. Aufgabenteil e).
2. Zähler und Nenner durch diesen ggT kürzen (größter gemeinsamer Teiler).

Im Kopf:
 12 ist der ggT von 24 und 36 .
 $24:12$
 $36:12$

$$\frac{24}{36} = \frac{2}{3}$$

Man darf auch schreiben: $\frac{24}{36} = \frac{2}{3}$

iv) Kürzen

1. Den Bruch mit Methode 1, 2 oder 3 kürzen.

2. Gleiche Variable im Zähler und Nenner paarweise kürzen. Wenn Potenzen auftreten, ggf. Potenzgesetze (s. Anhang).

Übung: Kürze die gegebenen Brüche so weit wie möglich.

(2) $\frac{22}{11}$

(3) $\frac{20ab}{48ac} =$

(4) $\frac{45xy}{75xyz} =$

(5) $\frac{405xy}{1080x} =$

(6) $\frac{144}{720y} =$

(7) $\frac{112uv}{210vw} =$

(8) $\frac{120}{360} =$

e) Hauptnenner ermitteln

Der Hauptnenner (kurz HN) ist das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) – bezeichnet. Es gibt wie beim Kürzen beim Ermitteln des Hauptnenners bzw. kgV verschiedene Methoden. An dieser Stelle werden zwei Möglichkeiten vorgestellt. Die Ermittlung über die Zerlegung in Primfaktoren ist dabei als erste und einfachere Möglichkeit gedacht, die meist nur angewandt wird, wenn es sich um große Zahlen handelt, bei denen die Methode über die Kopfrechnung aufwendig wird.

Methode 1: Hauptnenner durch Kopfrechnung ermitteln

Bei kleinen Zahlen kann man das kgV bzw. den Hauptnenner ohne viel Aufwand im Kopf ermitteln.

- Beispiel:
- Den Nenner mit der größten Zahl auswählen.
 - Die Reihe dieser Zahl (hier 8er-Reihe) im Kopf hochzählen, bis eine Zahl erreicht ist, die durch alle anderen Nenner teilbar ist.

Hauptnenner von $\frac{7}{8}$ und $\frac{5}{6}$

Im Kopf:
8-ter Reihe: 8, 16, 24, ...
6 passt nicht in 8
6 passt nicht in 16
6 passt 4-mal in 24
8 passt 3-mal in 24
Hauptnenner der Brüche ist 24.

- Merke: Der Hauptnenner ist das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) der Nenner.

Im Kopf:
 $\frac{7}{8} = \frac{7 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{21}{24}$

Im Kopf:
 $\frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 4}{6 \cdot 4} = \frac{20}{24}$

Methode 2: Ermitteln des Hauptnenners über die Zerlegung in Primfaktoren

Schritte:

1. Alle Brüche, sofern es geht, so weit wie möglich kürzen.
2. Alle Nenner in Primfaktoren zerlegen. Dabei mit dem kleinstmöglichen Primfaktor beginnen. Wenn vorhanden, gleiche Primfaktoren in Spalten untereinander schreiben.
3. Aus jeder Spalte den Primfaktor einmal übernehmen und das Produkt dieser Zahlen bilden.
4. Jeden Bruch so erweitern, dass der kgV bzw. dem Hauptnenner entspricht.

Beispiel:

Hauptnenner von $\frac{1}{6}$ und $\frac{1}{12}$

Schritt 2 und 3

Primfaktoren von 6: $6 = 2 \cdot 3$
Primfaktoren von 12: $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$

Hauptnenner: $HN = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$

Schritt 4

$\frac{1}{6} = \frac{2}{12}$
 $\frac{1}{12} = \frac{1}{12}$

Hinweise:

Wenn im Nenner eine Variable, so muss man diese Variable im kgV berücksichtigen.

Bsp.: $\frac{1}{4a} + \frac{1}{6}$ auf den H.N. bringen. Das kgV ist $12a$ und damit ergibt sich: $\frac{3}{12a} + \frac{2a}{12a}$

Übung zu 1.1.e

Bringen Sie die folgenden Brüche auf den H.N. 12a.

(1) $\frac{1}{6} + \frac{2}{4} + \frac{3}{9}$

(3) $\frac{4}{5} + 1\frac{2}{3} + \frac{9}{10}$

(4) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$

(5) $\frac{25}{42} + \frac{1}{6}$

f) Brüche addieren oder subtrahieren

Auch wenn die Addition und Subtraktion von Brüchen beim Einsatz eines Taschenrechners kaum Probleme bereitet, ist es unbedingt notwendig, die entsprechenden Rechenregeln zu kennen und anwenden zu können, da der Taschenrechner spätestens beim Addieren von Brüchen im Nenner keine allzu große Hilfe mehr darstellt. Im Rahmen dieser Aufgabe werden mögliche Vorgehensweisen beim Addieren und Subtrahieren von Bruchtermen exemplarisch dargestellt.

Beispiel 1: Addition bei Bruchtermen

Man kann alle ganzen Zahlen und alle Brüche getrennt voneinander addieren, da bei gemischten Zahlen die ganze Zahl und der Bruch ein unabhängiges Pluszeichen (+) steht.

Schritte:

1. Alle ganzen Zahlen addieren bzw. subtrahieren.
2. Den Hauptnenner HN suchen und die Brüche zum HN erweitern.
3. Die Zähler der Brüche addieren. Der Nenner bleibt gleich.
4. Ergebnis vereinfachen.

Beispiel 2: Subtraktion bei Bruchtermen

Hier ist es günstig, unechte Brüche zu verwenden, vor allem, wenn der Bruch mit negativem Vorzeichen größer ist als der positive Bruch.

1. Hauptnenner HN suchen und die Brüche zum HN erweitern.
2. Die Summe bzw. Differenz der Zähler bilden. Der Nenner bleibt gleich.
3. Ergebnis, wenn möglich, noch kürzen bzw., wenn es die Aufgabenstellung erfordert, in eine gemischte Zahl umwandeln.

Schritte:

1. Falls möglich, Brüche in unechte Brüche umwandeln.
2. Den Hauptnenner HN suchen und die Brüche zum HN erweitern.
3. Die Summe im Zähler bilden. Der Nenner bleibt gleich.
4. Ergebnis, wenn möglich, kürzen bzw., wenn es die Aufgabenstellung erfordert, in eine gemischte Zahl umwandeln.

Achtung! Hier darf man **10** nicht wie das **x** auf den Zähler eine Summe und kein Nenner nehmen.

Übung zu 1.1.f

Berechnen Sie die angegebenen Summen zunächst ohne Verwendung des Taschenrechners und stellen Sie das Ergebnis, so weit wie möglich, gekürzt dar. Überprüfen Sie Ihre Rechnung, wenn möglich, mit dem Taschenrechner.

(1) $\frac{3}{4} + \frac{5}{6} - \frac{1}{3} =$ _____

(2) $1\frac{1}{2} + 2\frac{2}{7} - 1\frac{1}{14} =$ _____

(3) $\frac{4}{5a} + \frac{7}{15} + \frac{7}{10} =$ _____

(4) $\frac{2}{3b} - \frac{1}{2b} - \frac{1}{4b} =$ _____

(5) $\frac{3}{8x} - \frac{5}{6y} + \frac{1}{12z} =$ _____

g) Brüche multiplizieren

Beispiel 1: Bruchterme, die Variable enthalten, multiplizieren

Gemischte Zahlen in unechte Brüche umwandeln.

Ganze Zahlen als Bruch mit Nenner 1 darstellen.

Schritte:

- Alle gemischten und ganzen Zahlen als unechte Brüche darstellen.
- Alle Zähler und alle Nenner auf einen gemeinsamen Nenner bringen.
- Vor dem Multiplizieren so weit wie möglich kürzen.
- Alle Zahlen im Zähler multiplizieren.
- Alle Zahlen im Nenner multiplizieren
- Ergebnis, wenn möglich, bzw., wenn gefordert, in eine gemischte Zahl umwandeln

$$1\frac{1}{3} \cdot 2\frac{5}{8} \cdot 3 = \frac{4}{3} \cdot \frac{21}{8} \cdot \frac{3}{1} = \frac{4 \cdot 21 \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot 8 \cdot 1} = \frac{21}{2} = 10\frac{1}{2}$$

plizieren
erst kürzen

Übung:

$\frac{3}{9} =$ _____

$\frac{3}{7} \cdot \frac{7}{9} =$ _____

Beispiel 2: Bruchterme, die Variablen enthalten, multiplizieren

6a kann man als $\frac{6a}{1}$ schreiben. Dann lässt man dann unter dem gemeinsamen Nenner den Bruchstrich weg.

Schritte:

- Alle gemischten und ganzen Zahlen als unechte Brüche darstellen.
- Alle Zähler und alle Nenner auf einen gemeinsamen Nenner bringen.
- Vor dem Multiplizieren so weit wie möglich kürzen
- Alle verbleibenden Zahlen und Variablen im Zähler multiplizieren. Alle Zahlen und Variablen im Nenner multiplizieren.
- Ergebnis, wenn möglich, bzw., wenn gefordert, in eine gemischte Zahl umwandeln

Vor dem Multiplizieren immer erst kürzen!

Übung:

Berechnen Sie die folgenden Produkte und kürzen Sie so weit wie möglich.

$\frac{3}{5x} \cdot \frac{2}{3} =$ _____

$\frac{3z}{4y} \cdot \frac{2}{3} =$ _____

(3) $\frac{2x}{3} \cdot \frac{15}{14x} \cdot 7 =$ _____

h) Brüche dividieren

dividieren

- Alle gemischten und ganzen Zahlen als unechte Brüche darstellen.
- Dividieren bedeutet, mit dem Kehrwert des Bruches, der hinter dem Divisionszeichen steht, zu multiplizieren.
- Weiter vereinfachen.

$$\frac{4}{1} : \frac{14}{3} = \frac{4}{1} \cdot \frac{3}{14} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}$$

Kehrwert:
Aus (:) wird (·)
Aus $\frac{14}{3}$ wird $\frac{3}{14}$

Merke: Man dividiert eine ganze Zahl oder einen Bruch durch einen Bruch, indem man mit dem Kehrwert des Bruches, der hinter dem Divisionszeichen steht, multipliziert.

a) Addition von Ausdrücken mit Potenzen

Anhand der Berechnung von Einheiten (Dimensionen) lassen sich die Potenzgesetze hinsichtlich der Addition anschaulich darstellen. Größen kann man nur addieren oder subtrahieren, wenn sie die gleiche Einheit haben, bzw. wenn die Einheit die gleiche Potenz besitzt. Beispielsweise können Flächen und Längen oder Flächen und Volumina weder addiert noch subtrahiert werden.

Beispiel 1:

Die Maßzahlen werden addiert, die Einheiten verändern sich bei der Addition nicht. Die Einheit bleibt cm³.

Beispiel 2:

cm² und cm³ geht nicht! kann man nicht addieren

Beispiel 3:

$$8 \text{ m}^2 + 8 \text{ cm}^2 = 80.000 \text{ cm}^2 + 8 \text{ cm}^2 = 80.008 \text{ cm}^2$$

Ergänzen Sie:
Man kann Potenzen nur addieren, wenn die Basis und der Exponent _____ sind. Im Einheitensystem* muss man dazu ggf. die _____ vorher _____..
wird der Exponent _____.

Allgemein kann man die Addition bzw. Subtraktion von Potenzen wie folgt darstellen:

Subtraktion von Potenzen

$$u \cdot a^n \pm v \cdot a^n = (u \pm v) \cdot a^n$$

*SI-System: Internationales Einheitensystem (frz. **S**ystème international d'unités). Basiseinheiten sind: Meter, Kilogramm, Sekunde, Kelvin, Ampere, Candela.

Übungen zur Addition von Ausdrücken mit Potenzen

Verdeutlichen Sie sich jeweils die Beispiele und verfahren Sie entsprechend bei den Übungen.

Beispiel 1: $2^3 + 2^3 = 8 + 8 = 2 \cdot 8 = 2 \cdot 2^3 = 16$
 $a^3 + a^3 = 2a^3$

- Achtung: $3 + 3^2 \neq 3^4 = 81$
- $3^2 + 3^2 = \underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad} \cdot \underline{\quad} = \underline{\quad} \cdot \underline{\quad} = \underline{\quad}$
 - $5^3 + 5^3 = \underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad} \cdot \underline{\quad} = \underline{\quad} \cdot \underline{\quad} = \underline{\quad}$
 - $4^2 + 4^2 + 4^2 = \underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad} \cdot \underline{\quad} = \underline{\quad} \cdot \underline{\quad} = \underline{\quad}$
 - $x^2 + x^2 = \underline{\quad}$
 - $b^2 + b^2 + b^2 = \underline{\quad}$
- Achtung: $x^2 + x^2 \neq x^4$

Beispiel 2: $4x^2 + 2x^2 + x = x^3 - 2x$

- $3x^3 - x^3 - 10x^2 + 7x = \underline{\quad}$
- $2x^2 + 5x^2 - 3x - 4x^2 - x^2 = \underline{\quad}$

Produkte bei Potenzen gleicher Basis

Wie bei der Addition kann man auch die Multiplikation von Potenzen anhand der Berechnung von Flächen und Volumen anschaulich darstellen.

Beispiel 1:

Rechnung: _____

Ergänzen Sie:
Die Zahlenwerte der _____ werden _____, wenn die Exponenten der _____ sind.
Einheiten werden _____, wenn die Einheiten _____ sind.

Beispiel 2:

$3\text{m} \cdot 50\text{cm} = 3\text{m} \cdot 0,5\text{m} = 3\text{m}^1 \cdot 0,5\text{m}^1 = 1,5\text{m}^2$

Einheiten müssen ggf. umgerechnet werden.

In verallgemeinerter Form lässt sich die Regel zur Multiplikation von Potenzen wie folgt veranschaulichen.

$a^3 \cdot a^4 = \underbrace{a \cdot a \cdot a}_{a^3} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a}_{a^4} = a^7$

Ergänzen Sie den folgenden Merksatz:

Bei der Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis werden die Basen beibehalten und die Exponenten addiert.
 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Angewandte Produkte bei Potenzen gleicher Basis

Verfassen Sie die Terme so weit wie möglich, indem Sie Potenzen mit gleicher Basis zusammenfassen.

(1) $x^3 \cdot x^5 =$ _____ (2) $2z^2 \cdot 6z^3 \cdot 3z^5 \cdot 4z =$ _____

(3) $3a^2 \cdot 4b^3 \cdot 2b^5 =$ _____ (4) $7v^{5a} \cdot v^{4a} =$ _____

(5) $v^{3a+1} \cdot v^{4a+2} =$ _____

(6) $5\text{cm}^2 \cdot 2\text{mm} =$ _____ (10) $30\text{cm}^2 \cdot 5\text{m} =$ _____

In Aufgabenstellungen ist oft auch der umgekehrte Rechenweg wichtig. Formulieren Sie die Terme so, dass keine Summen in den Exponenten auftreten.

(11) $x^{a+b} =$ _____ (12) $z^{a+3b} =$ _____

(13) $z^{2a+b} =$ _____ (14) $x^{5a+b+c} =$ _____

(15) $2x^{a+b} \cdot 3x^{a+2b} =$ _____ (16) $2x^{2a+b} \cdot 3x^{a+2b} =$ _____

c) Potenzen, Brüche und negative Exponenten

In Aufgabe 1.1 haben Sie gelernt, wie man Variablen in Brüchen kürzen kann. Diese Kenntnisse sollen im folgenden Beispiel verwendet werden, um zu begründen, warum negative Exponenten sinnvoll sind. Verdeutlichen Sie sich die Überlegungen.

Anwenden der Definition von Potenzen auf y^5 und y^3 und paarweises Kürzen von y liefert y^2

Das Ergebnis lässt sich als y^{5-3} darstellen.

$\frac{y^5}{y^3} = \frac{\overbrace{y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y}^1}{\underbrace{y \cdot y \cdot y}_1} = y^2$

$y^2 = y^{5-3}$
 $y^2 = y^5 \cdot y^{-3}$

Den Exponenten kann man zur Summe y^2 formen und dann die Regel für die Multiplikation von Potenzen anwenden.

Man erhält nun die Ausgangsausdrucksstellung mit dem

Ergebnis, so ergibt sich: $\frac{y^5}{y^3} = y^5 \cdot y^{-3}$
oder entsprechend: $\frac{1}{y^3} = y^{-3}$

Man erkennt aus diesem Beispiel, dass negative Exponenten eine neue Schreibweise für Brüche beinhalten, und man kann die folgende Regel formulieren.

Ergänzung: Dieser Zusammenhang wird auch beim Exponenten 1 angewandt. Es gilt: $\frac{1}{a} = a^{-1}$

Ergänzung zu negativen Exponenten

Mit Hilfe der Potenzgesetze kann man Brüche so darstellen, dass der Nennerstrich mehr nicht mehr benötigt wird.

$\frac{a^m}{a^n} = a^m \cdot a^{-n} = a^{m-n}$

Übungen zu Potenzen, Brüchen und negativen Exponenten

Beispiel 1: $\frac{x^4}{x^3} = x^4 \cdot x^{-3} = x^{4-3} = x$ bzw. $\frac{3x^4}{x^6} = 3x^4 \cdot x^{-6} = 3x^{4-6} = 3x^{-2} = \frac{3}{x^2}$

Zusatzinfo:

Man kann die Potenzgesetze auch verkehrt anwenden:

$$\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{-\frac{1}{2}}$$

Kürzen Sie die angegebenen Brüche. Sie dürfen in Beispiel 1 die Potenzgesetze anwenden und schreiben Sie das Ergebnis ggf. ohne negativen Exponenten.

(1) $\frac{z^5}{z^3} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$ (2) $\frac{u^2}{u^3} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$
 (3) $\frac{2c^5}{c^4} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$ (4) $\frac{a^2}{a^3} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

Beispiel 2: $x^{-2v} = \frac{x^u}{x^{u+2v}}$ bzw. $3x^{u-2v} \cdot 2x^{v-u} = 3 \cdot 2 \cdot x^{u-2v+v-u} = 6x^{-v} = \frac{6}{x^v}$

Formulieren Sie Bruchterme (wie in (6) oben) und der Beispiele so um, dass keine negativen Exponenten und keine Summen in den Exponenten auftreten.

(1) $x^{-2} \cdot y^5 = \underline{\hspace{2cm}}$ (2) $b^{3a-1} = \underline{\hspace{2cm}}$
 (3) $\frac{1}{x^{a-b}} = \underline{\hspace{2cm}}$ (4) $\frac{1}{x^{3-v} \cdot y^{a+2}} = \underline{\hspace{2cm}}$
 (5) $\frac{x^{a+b}}{x^{c+d}} = \underline{\hspace{2cm}}$

Prüfen Sie, unter Angabe des Fehlers, warum die Umformung falsch ist.

(1) $\frac{1}{x^{v-w}} = x^{-v-w}$ Die Umformung ist falsch, weil $\underline{\hspace{2cm}}$
 (2) $\frac{1}{x^{v-w}} = x^{v-w}$ Die Umformung ist falsch, weil $\underline{\hspace{2cm}}$

Die richtige Umformung lautet: $\frac{1}{x^{v-w}} = x^{\underline{\hspace{2cm}}}$

d) Der Exponent 0

Warum irgendetwas hoch Null immer die Zahl 1 ergibt, ist eine häufig gestellte Frage. Verdeutlichen Sie sich den Zusammenhang anhand der folgenden Darstellung.

Aus der Bruchrechnung ist bekannt, dass gilt:

$$\frac{a}{a} = \frac{a^1}{a^1} = \frac{1}{1} = 1$$

also: $\frac{a}{a} = 1$

Aus der Potenzrechnung ist bekannt, dass gilt:

$$\frac{a}{a} = \frac{a^1}{a^{1-1}} = a^0$$

also: $\frac{a}{a} = a^0$

Ergänzung:

Damit dieser Zusammenhang für alle reellen Zahlen gültig ist, wird festgelegt, dass auch gilt:

$$a^0 = 1$$

e) Punkte bei Potenzen mit ungleicher Basis und gleichem Exponenten

Formulieren Sie für den folgenden Zusammenhang einen Merksatz, indem Sie den Text ergänzen.

Ausklammern von Exponenten

$$a^n \cdot b^n$$

... unterschiedliche Basis, jedoch den gleichen Exponenten, ...
 ... unterschiedliche Basis, jedoch den gleichen Exponenten, ...
 ... unterschiedliche Basis, jedoch den gleichen Exponenten, ...

Beispiele: $2^6 \cdot 5^6 = (2 \cdot 5)^6 = 10^6 = 1.000.000$

Bei der Anwendung dieser Regel lassen sich oft Rechenvorteile nutzen.

Information:

... muss man Klammern setzen denn es gilt: $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$

Diese Regel ist vor allem auch dann wichtig, wenn es um Potenzen mit negativen Vorzeichen geht. Verdeutlichen Sie sich dazu die beiden folgenden Beispiele.

Zur Erinnerung:

Ein negatives Vorzeichen kann man immer als Multiplikation mit dem Vorfaktor (-1) interpretieren. Das Quadrat wirkt dann nur auf das a und nicht auf (-1) .

(1) $-a^2 = (-1) \cdot a^2 = -a^2$

(2) $(-a)^2 = (-1 \cdot a)^2 = (-1)^2 \cdot a^2 = (+1) \cdot a^2 = a^2$

Nur wenn das Vorzeichen in einer Klammer steht, wird der Ausdruck quadriert, da das Quadrat hinter der Klammer an die a's in der Klammer wirkt.

(3) Begründen Sie anhand einer ausführlichen Formel, entsprechend zu (1) bzw. (2), dass mit $(-a)^3 = -a^3$

$(-a)^3 = (-1 \cdot a)^3 = (-1)^3 \cdot a^3 = -1 \cdot a^3 = -a^3$

Ergänzen Sie die folgende verallgemeinerte Merkregel

Vorzeichen beim Potenzieren

Wenn n eine _____ Zahl ist gilt: $(-a)^n = a^n$

Wenn n eine _____ Zahl ist gilt: $(-a)^n = -a^n$

Beispiel: $(-2)^4 = 2^4 = 16$ und $(-2)^5 = -2^5 = -32$

Übungen zum Produkt bei Potenzen mit ungleicher Basis und unterschiedlichen Exponenten

Vereinfachen Sie die Terme, ohne Verwendung des Taschenrechners, wenn möglich. Stellen Sie dabei alle auftretenden Exponenten dar.

(1) $\frac{48^2}{144^2}$

(2) _____

(4) $\frac{(-3)^4}{-3^4} =$

(5) $\frac{(-5)^3}{-5^3} =$

(6) $(-2)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} =$

f) Potenzieren von Potenzen

Verdeutlichen Sie sich anhand der folgenden Beispiele, welche Regeln zu beachten sind, wenn eine Potenz potenziert wird. Ergänzen Sie die folgende Merkregel.

$(2^2)^2 = (4)^2 = 16$ und $2^2 \cdot 2^2 = 2^4 = 2^2$

$(2^3)^2 = (8)^2 = 64$ und $2^3 \cdot 2^3 = 2^6 = 2^{3 \cdot 2}$

$(2^2)^3 = (4)^3 = 64$ und $2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 = 2^6 = 2^{2 \cdot 3}$

$(2^5)^2 = 32^2 = 1024$ und $2^5 \cdot 2^5 = 2^{10} = 2^{5 \cdot 2}$

$(2^2)^5 = 4^5 = 32$ und $2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 = 2^{10} = 2^{2 \cdot 5}$

$(2^2)^5 = (4)^5 = 1024$ und $2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 = 2^{10} = 2^{2 \cdot 5}$

Merkmale beim Potenzieren einer Potenz

Eine Potenz wird potenziert, indem man die Exponenten _____.

Die Reihenfolge, in der potenziert wird, spielt dabei _____ Rolle. Es gilt:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} = a^{n \cdot m} = (a^n)^m$$

Achtung: Das Potenzieren einer Potenz ist nicht mit dem Potenzieren des Exponenten gleichzusetzen. Der Zusammenhang wird durch das folgende Beispiel

$(a^2)^3 \neq a^{2^3}$, denn $a^{2^3} = a^8$ und $(a^2)^3 = a^6$ (denn $a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a^6$)

$(a^3)^2 \neq a^{3^2}$, denn $a^{3^2} = a^9$ und $(a^3)^2 = a^6$ (denn $a^3 \cdot a^3 = a^6$)

Übungen zum Potenzieren von Potenzen

a) Berechnen Sie:

Beispiel 1: Sonderfall $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a$

Zur Erinnerung:
 $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$

(1)

$$\sqrt{a^2} = (a^2)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{2}} = a^1 = a$$

$$(\sqrt{a})^2 = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a^{\frac{1}{2} \cdot 2} = a^1 = a$$

$$(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = a^1 = a$$

$$(\sqrt{a})^2 = (\sqrt{a})^2 = a$$

(2)

$$\sqrt[3]{a^3} = (a^3)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{3}{3}} = a^1 = a$$

$$(\sqrt[3]{a})^3 = \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 = a^{\frac{1}{3} \cdot 3} = a^1 = a$$

$$(\sqrt[3]{a})^3 = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = a^1 = a$$

$$\sqrt[3]{a^3} = (\sqrt[3]{a})^3 = a$$

Beispiel 2: Partielles Wurzelziehen

$$\sqrt{a^3} = (a^3)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{2}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^1 \cdot a^{\frac{1}{2}} = a \cdot \sqrt{a}$$

$$\sqrt{a^3} = \sqrt{a^{2+1}} = \sqrt{a^2 \cdot a} = (a^2 \cdot a)^{\frac{1}{2}} = (a^2)^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a^2} \sqrt{a} = a \sqrt{a}$$

zum Merken.

Merke: „Zerschneiden“ von Wurzeltermen bzw. partielles Wurzelziehen

Wenn in einem Wurzelterm mehrere Faktoren auftreten, darf man sie voneinander mit einem eigenen Wurzelzeichen versehen und die Wurzeln voneinander ziehen. Das kann auch als **partielles Wurzelziehen** bezeichnet werden. Es gilt:

$$\sqrt{a^m \cdot a^n} = \sqrt{a^m} \sqrt{a^n}$$

Die kurze Version des partiellen Wurzelziehens in folgenden Beispielen, indem Sie die Lücken vervollständigen.

$$\sqrt{a^4 \cdot a} = \sqrt{a^4} \sqrt{a} = a^2 \sqrt{a}$$

(2) $\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = \sqrt{36} \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

(3) $\sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

(4) $\sqrt{8x} = \sqrt{4 \cdot 2x} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2x} = 2\sqrt{2x}$

(5) $\sqrt{288x} = \sqrt{144 \cdot 2x} = \sqrt{144} \sqrt{2x} = 12\sqrt{2x}$

(6) $\sqrt{125x^3} = \sqrt{25x^2 \cdot 5x} = 5x \sqrt{5x}$

(7) $\sqrt{98z^3} = 7z \sqrt{2z}$

(8) $\sqrt{128x^5} = 8x^2 \sqrt{2x}$

Treten unter der Wurzel Zahlen auf, so kann eine partielle Wurzel gezogen werden, wenn die Zahl in Faktoren zerlegt werden kann, bei denen als Faktoren Quadratzahlen auftreten. Es ist günstig, die quadratischen Faktoren die größtmögliche Quadratzahl zu wählen. Können Sie die Aufgabe (2) auch so lösen:
 $\sqrt{72} = \sqrt{4 \cdot 9 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$
 Das ist jedoch aufwendiger.

Achtung!

Aus einer **Summe** oder **Differenz** kann man keine partielle Wurzel ziehen.

$$\sqrt{x^2 + y^2} \neq x + y$$

Verdeutlichen Sie sich das am folgenden Zahlenbeispiel:

richtig: $\sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$
 falsch: $\sqrt{9 + 16} \neq \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$

Beispiel

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{a^2} = a$$

Verfahren Sie wie im Beispiel:

(1) $\sqrt[4]{a} = \sqrt[4]{a} = \sqrt[4]{a}$, denn

(2) $\sqrt{a^4} = \sqrt{a^4} = a^2$, denn

$$\sqrt{a^4} = a^2$$

$$\sqrt{32a^5} = \sqrt{16a^4 \cdot 2a} = 4a \sqrt{2a}$$

Mehrfache Wurzeln entsprechen dem Potenzieren mit der entsprechenden Potenz.

Beispiel 4: Rationalmachen des Nenners

Treten in Brüchen Wurzeln auf, so wird ein Bruch in der Regel so angegeben, dass im Nenner keine Wurzel erscheint. Dies ist auch bei den gängigen Modellen der Taschenrechner der Fall.

Wenn man im Taschenrechner beispielsweise den Term $\frac{3}{\sqrt{2}}$ eingibt und die $\sqrt{}$ -Taste betätigt, erhält man $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Verdeutlichen Sie sich diesen Zusammenhang und den folgenden Termumformung und machen Sie anschließend die Nenner der gegebenen Brüche in (1) bis (4) rational. (vgl. ergänzende und vertiefende Übungen zu Kapitel 1)

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{b} \cdot \sqrt{b}} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{b}$$

(1) $\frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{\phantom{5\sqrt{3}}}{}$

(2) $\frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{\phantom{6\sqrt{2}}}{}$

(3) $\frac{3a}{\sqrt{2a}} = \frac{\phantom{3a\sqrt{2a}}}{}$

(4) $\frac{a}{\sqrt{2a}} = \frac{\phantom{a\sqrt{2a}}}{}$

Ergebnisse Bemerkungen hinsichtlich der Darstellung von Ergebnissen bei Rechnungen

Kommen bei Rechnungen beispielsweise bei der Lösung von Gleichungen, Wurzeln vor, lassen sich die Ergebnisse nicht exakt mit dem Taschenrechner darstellen, sondern man erhält immer ein auf die Anzahl der Stellen des Taschenrechners gerundetes Ergebnis.

Beispiel: $2\sqrt{2} \approx 2,8284... \approx 2,83$
Entsprechendes gilt für die folgenden Dezimalbrüche, wie $\frac{1}{6} \approx 0,1\overline{6}$ und der Eulerschen Zahl

Das Ergebnis für nachfolgende Rechnungen ist es ungünstig, mit dem gerundeten Zahlenwert weiterzurechnen. Hier kann der Aufwandsfaktor am Taschenrechner geringfügig werden und es können sich Eingabefehler einschleichen. Dies kann aufgrund von gerundeten Zwischenergebnissen ungenaue Endergebnisse auftreten. Die Problematik spielt der gerundete Zahlenwert zudem häufig keine Rolle.

Aus diesen Gründen sollte das Ergebnis in einer „möglichst vereinfachten und normalisierten“ Form, ohne Wurzeln, explizit auszurechnen, wobei das Ergebnis am Ende gut lesbar ist bzw. die Normalisierung des Ergebnisses besteht, dass es in einer möglichst einfachen Form dargestellt wird, beginnend mit Zahlen und Variablen oder Konstanten (Klammern) und sortiert.
Treten komplexer Zahlen soll im Nenner die Einheit auftreten.

Überblick Gesetze und Definitionen bei der Potenzrechnung

Grundlegende Zusammenhänge			
Der Exponent Null		Der Exponent 1	Der Exponent $\frac{1}{n}$
$a^0 = 1$	$0^0 = 1$	$a^1 = a$	$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$
Potenzen mit gleichem Exponenten			
Addition und Subtraktion		Multiplikation und Division	
$u \cdot a^n \pm v \cdot a^n = (u \pm v) \cdot a^n$		$a \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	
Potenzen mit negativen Exponenten			
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$a^{-n} = a^n$	$a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$	
Multiplikation und Division von Potenzen mit gleicher Basis			
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$		$\frac{a^m}{a^n} = a^m \cdot a^{-n} = a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}}$	
Potenzieren von Potenzen			
ganzzahlige Exponenten		rationale Exponenten	
$(a^m)^n = (a^n)^m = a^{m \cdot n}$		$a^{\frac{m}{n}} = a^{m \cdot \frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{1}{n} \cdot m} = (\sqrt[n]{a})^m$	
Potenzen mit ganzzahligen Exponenten		Potenzen mit rationalen Exponenten	
$a^{m \cdot n} = (a^m)^n = (a^n)^m$		$a^{m \cdot n} = a^{(m \cdot n)}$	

Vermischte Übungen

Um die Potenzgesetze bei der Vereinfachung von Ausdrücken anzuwenden, Fassen Sie zusammen oder vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke. Geben Sie die Ergebnisse an. Geben Sie, warum nicht weiter vereinfachen Sie, an.

(1) $8m^2 + 7m^2 = $

(2) $5cm^2 + 3cm^2 = $

(3) $2m^2 + 3m^2 = $

(4) $2m^2 + 3m^2 = $

(5) $(2m)^2 = $

b) Notieren Sie jeweils die verwendeten Potenzgesetze, bzw. erläutern Sie die erfassten Termumformungen in Stichworten.

(1)

$$\frac{\sqrt{18x^3}}{\sqrt{2x}} = \sqrt{\frac{18x^3}{2x}} = \sqrt{9x^2} = 3x$$

Potenzgesetz: _____

Umformungen: _____

(2)

$$t^4 \cdot t^3 = t^7$$

Potenzgesetz: _____

(3)

$$z^{1+3a} = z \cdot z^{3a}$$

Potenzgesetz: _____

(4)

$$u^{2v-1} = u^{2v} \cdot u^{-1} = \frac{u^{2v}}{u}$$

Potenzgesetz: _____

(5)

$$\sqrt[3]{4x^2} = \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{x^2}$$

Potenzgesetz: _____

Umformung: _____

(6)

$$c^{2n} \cdot c^{1-n} = c^{2n+1-n} = c^{n+1}$$

Potenzgesetz: _____

Umformung: _____

c) Die Potenzrechnung bildet unter anderem eine Grundlage für Umformungen, die beispielsweise bei der Differenzial- und Integralrechnung notwendig werden. Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben im Hinblick auf später folgende Problemstellungen, indem Sie auch hier wieder Umformungsschritte erläutern bzw. die verwendeten Potenzgesetze angeben.

(1)

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$$

Potenzgesetz: _____

Potenzgesetz: _____

(2)

$$\frac{3}{2}(3x+1)^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{3x+1}$$

Umformung: _____

Potenzgesetz: _____

Potenzgesetz: _____

(3)

$$\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{1}{3x^{2 \cdot \frac{1}{3}}}$$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Umformung: _____

Potenzgesetz: _____

Umformung: _____

Potenzgesetz: _____

Ergänzen Sie die fehlenden Exponenten bei der Variable x:

(4)

$$2x^{\frac{1}{2}+1} = 2x^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{x^3} = 2\sqrt{x \cdot x \cdot x} = 2x\sqrt{x}$$

Formen Sie entsprechend zu _____.

(5)

$$4x^{\frac{1}{2}-1} = 4x^{-\frac{1}{2}} = \frac{4}{\sqrt{x}}$$

(6)

$$\frac{1}{x^{\frac{1}{2}-1}} = \frac{1}{x^{-\frac{1}{2}}} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

d) Vereinfachen Sie soweit wie möglich, indem Sie partielle Wurzeln ziehen, Nenner rational machen und die Exponenten der Terme ohne Summen darstellen.

(1)

$$\sqrt{288x^3} = \sqrt{144 \cdot 2 \cdot x^2 \cdot x} = 12x\sqrt{2x}$$

(2)

$$\sqrt[3]{64x^3} = 4x$$

(4)

$$\frac{5x}{\sqrt{x}} = 5\sqrt{x}$$

(5)

$$x^2 = \sqrt{x^4}$$

Alle Übungen: _____

Aufgabe 1.3

Multiplizieren und Faktorisieren von Summen

Information 1.3.1

Multiplizieren von Summen – Distributivgesetz

Distributivgesetz

$$a(b + c) = ab + ac$$

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Multiplikation einer Summe mit einem Faktor

Jeden Summanden der Klammer mit dem Faktor multiplizieren.

Multiplikation einer Summe mit einer Summe

Jeden Summanden in der ersten mit jedem Summanden der zweiten Klammer multiplizieren.

Bestimmen Sie bei den folgenden Beispielen die Umformungen.

Beispiel 1:

(1) $2\sqrt{3}\left(\frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{y}{\sqrt{12}} + \frac{z}{\sqrt{27}}\right)$

(2) $= \frac{2\sqrt{3}x}{\sqrt{3}} - \frac{2\sqrt{3}y}{\sqrt{12}} + \frac{2\sqrt{3}z}{\sqrt{27}}$

(3) $= 2x - \frac{1}{2}y + \frac{2}{3}z$

Beispiel 2:

(1) $(\sqrt{2}x + \sqrt{3}y)(\sqrt{2}x - \sqrt{3}y)$

(2) $= \sqrt{2}\sqrt{2}x^2 - \sqrt{3}\sqrt{3}y^2$

(3) $= 2x^2 - 3y^2$

Beispiel 3:

(1) → (2)

(2) → (3)

(1) $(2x + 1)(3x + 2)(x - 2)$

(2) $= (6x^2 + 4x + 3x + 2)(x - 2)$

(3) $= (6x^2 + 7x + 2)(x - 2)$

(4) $= 6x^3 - 12x^2 + 7x^2 - 14x + 2x - 4$

(5) $= 6x^3 - 5x^2 - 12x - 4$

Merkmale beim Multiplizieren von drei Klammern

1. Schritt: Man multipliziert zuerst zwei Klammern miteinander, schreibt das Ergebnis in Klammern und die noch verwendete dritte Klammer dazu.

2. Schritt: Man fasst, wenn möglich, das Ergebnis der Multiplikation aus dem ersten Schritt zusammen.

3. Schritt: Man multipliziert jeden Summanden der ersten Klammer mit jedem Summanden der zweiten Klammer. Für das Beispiel oben gilt:

$$(a + b + c)(d + e) = ad + ae + bd + be + cd + ce$$

4. Schritt: Man fasst die Summanden zusammen.

Zusatzinformation:

Dieses Verfahren lässt sich auch auf Summanden in einer Klammer erweitern.

Beispiel 4:

Ergänzen

(2) $(6x^5 - 12x^4 + x^3 - 10x^2 + 2x + 1)(x - 2)$

$$= 6x^5 - 12x^4 + x^3 - 10x^2 + 2x + 1$$

Übungen zu 1.3.1

Lösen Sie die Klammern auf und fassen Sie, soweit wie möglich, zusammen.

- a) $3z(5x + 3y + 7z + 1) =$
- b) $(2u + 3v)(a + 2b) =$
- c) $2\sqrt{2}\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{8}} + \frac{z}{\sqrt{18}}\right) =$
- d) $(\sqrt{5x} + \sqrt{10y})(\sqrt{2x} + \sqrt{5y}) =$
- e) $(3x - 5z)(2x^2 - 3xy - 2y^2) =$
- f) $(x^2 + 2x + 1)(x^2 - 2x + 1) =$

- $a^{2x} - a^{2x}) =$
- h) $b^{-2x}(b^x + 1 - b^{2x}) =$
- i) $\frac{2}{e^x}(e^{2x} - e^x) =$

Information 1.3.2

Faktorisieren von Summen

Summen, bei denen in jedem Summanden gleiche Faktoren vorkommen, kann man durch **Ausklammern** dieser Faktoren zu einem Produkt aus den ausgeklammerten Faktoren und einer Summe umformen. Dieses Verfahren, das auch als **Faktorisieren** bezeichnet wird, kann man auch als Umkehrung der Multiplikation einer Summe mit einem Faktor interpretieren.

Ausklammern bedeutet, dass man in Gedanken jeden Summanden durch die ausgeklammerten Faktoren, hier nur a, dividiert.

$$a\left(\frac{a}{a} + \frac{ab}{a} + \frac{ac}{a}\right)$$

Ausklammern von Faktoren

$$ac = a(1 + 3 + c)$$

Wenn ein Faktor, der ausgeklammert werden soll, nicht steht, muss man in Gedanken eine unsichtbare 1 vor dem Summanden sehen.
$$1 \cdot a + ab + ac$$

Diese 1 bleibt beim Ausklammern erhalten.

Beispiel 1: $x + 3xz + xy = x(1 + 3z + y)$

Auf die 1 achten.

Beispiel

Schritt 1:
Die einzelnen Summanden in Gedanken in gleiche Faktoren zerlegen.
$$2 \cdot 2x^3x + 2 \cdot 4x^2x - 2xx + 2 \cdot 6x$$

Schritt 2:
Gleiche Faktoren in Gedanken markieren.
$$2 \cdot 2x^3x + 2 \cdot 4x^2x - 2x \cdot x + 2 \cdot 6x$$

... und vor die Klammern schreiben.

Schritt 3:
Nicht markierte Faktoren verbleiben in der Klammer. Auf eine 1 achten.

$$2x^2 + \sqrt{24x^2} + \sqrt{27x^3} = 2\sqrt{3}x + 2\sqrt{2}\sqrt{3}x \cdot x + 3\sqrt{3}x \cdot x^2 = \sqrt{3}x(2 + 2\sqrt{2}x + 3x^2)$$

Partielle Wurzeln ziehen.

Im Summand tritt $\sqrt{3}x$ auf.

Übungen zu 1.3.2

Faktorisieren Sie die Summen so weit wie möglich. Achten Sie beim Ausklammern darauf, dass im Endergebnis in der Klammer keine Brüche bzw. negative Exponenten oder Potenzen vorkommen sind.

a) $9a + 18ab + 3a^2$ = _____

b) $yz + 3yz^3 - y^3z$ =

c) $25x^3 - 15x^2 + 5x$ =

d) $\sqrt{8t^2} + \sqrt{72}t^2 - \sqrt{32}t^3 =$

e) $\frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{4}r + \frac{1}{8}$

Klammern Sie so aus, dass in der Klammer kein Bruch bzw. kein negativer Exponent vorhanden ist.

f) $c^x + 1 + \frac{1}{c^x} =$ _____

g) $e^{-2x} + e^{2x} = 2$

Ergänzungungen: _____

Aufgabe 1.4

Binomische Formeln

Eine besondere Bedeutung beim Multiplizieren und Faktorisieren von binomischen Formeln zu. Die Anwendung dieser Formeln zieht sich durch alle Gebiete der Mathematik. Daher sind eingehende Kenntnisse im Umgang mit diesen Formeln unerlässlich. Falls Sie nicht wissen, ob Ihnen diese Formeln geläufig sind, sollten Sie zumindest die Übungsaufgaben zu diesem Thema bearbeiten. Fehlende Kenntnisse können Sie dann ggf. anhand der gegebenen Informationen aufarbeiten.

Information 1.4

1. binomische Formel $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	2. binomische Formel $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	3. binomische Formel $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
---	---	--

Diese Darstellung ist Ihnen mit Sicherheit bekannt. Nun soll die Entstehung dieser Formeln wiederholt und gleichzeitig begründet werden, inwiefern ihre Anwendung sinnvoll ist.

Aufgabe

a) Im Folgenden wird die Entstehung der binomischen Formeln dargestellt. Erläutern Sie die Entwicklungsschritte in (1), (2) und (3). Versuchen Sie dabei, so weit wie möglich, Ausdrücke der natürlichen Sprache zu verwenden.

~~Berechnungen~~

Erläuterungen

$$(1) (a + b)^2 = (a + b) (a + b)$$

(1)

(3) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

(3) _____

b) Führen Sie die folgenden Berechnungen bzw. Rechnungen mit Hilfe der binomischen Formel durch:

$$=$$

$$= \underline{\hspace{10cm}}$$

c) Führen Sie nun die entsprechenden Berechnungen bzw. Rechenschritte für die binomische Formel durch.

(1) $(a + b)(a - b) =$ _____

(2) _____

Aufgabe 1.4.2

Ausmultiplizieren von Summen mit Hilfe der binomischen Formeln

Binomische Formeln treten bei Aufgaben auf, die nicht nur der Form $(a + b)^2$, $(a - b)^2$ und $(a + b)(a - b)$ auf, sondern es erscheinen andere Variablen und zusätzliche Zahlenwerte. Sie sollen nun lernen, wie man die binomischen Formeln anwenden kann, um die Klammern nicht jedes Mal erneut zeitaufwändig schrittweise ausmultiplizieren zu müssen. D.h., die binomischen Formeln werden verwendet, um effektiv und sicher zu arbeiten.

a) Anwenden der binomischen Formel

Verdeutlichen Sie sich die schrittweise Berechnung von: $(2x + 3y)^2$ am folgenden Beispiel. Wenn man mit dem Umgang der binomischen Formeln vertraut ist, kann die in den Sprechblasen aufgelisteten Schritte im Kopf abgelesen werden.

1. Schritt

Man wählt die richtigen binomischen Formeln und damit festlegen von Vorzeichen. Hier: 1. binomische Formel

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

2. Schritt

Man ordnet im Kopf den Werten aus der Aufgabe, **ohne auf Vorzeichen zu achten**, die Variablen a und b zu.

$$a := 2x^*$$

$$b := 3y$$

3. Schritt

Im Kopf den ersten Summanden einschließlich Vorfaktor quadrieren und Ergebnis notieren.

$$\text{Hier: } a^2 := (2x)^2 = 4x^2$$

4. Schritt

Im Kopf $2ab$ berechnen und Ergebnis notieren.

$$2ab := 2 \cdot 2x \cdot 3y = 12xy$$

5. Schritt

Im Kopf den zweiten Summanden einschließlich Vorfaktor quadrieren und Ergebnis notieren.

$$b^2 := (3y)^2 = 9y^2$$

*Hinweis zur Schreibweise: „a:=“ bedeutet, dass man der Variablen a den Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen steht.

b) Anwenden der 2. binomischen Formel

Berechnen Sie den Term $(5u - 7v)^2$ wie in Aufgabenteil a). Achten Sie darauf, dass bei der zweiten binomischen Formel der mittlere Summand $2ab$ ein negatives Vorzeichen hat. Achten Sie die Schritte, die im Kopf durchgeführt werden zunächst noch ausführlich in den vorgeschriebenen Stellen.

$$(5u - 7v)^2 =$$

Schritte im Kopf

1. Schritt: Man wählt die richtigen binomische Formel

2. Schritt: a := _____ b := _____

3. Schritt: a^2 := _____

4. Schritt: 2ab := _____

5. Schritt: b^2 := _____

c) Anwenden der 3. binomischen Formel

Verdeutlichen Sie sich anhand des Terms $(4r + s)(4r - s)$ die Anwendung der 3. binomischen Formel.

1. Schritt

Man wählt im Kopf die richtige Formel. Hier: 3. binomische Formel

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

2. Schritt

Man ordnet im Kopf den Werten aus der Aufgabe die Variablen a und b zu

$$a := 4r$$

$$b := s$$

$$(4r + s)(4r - s) = 16r^2 - s^2$$

3. Schritt

Im Kopf den ersten Summanden einschließlich Vorfaktor quadrieren und Ergebnis notieren. Hier: $a^2 := (4r)^2 = 16r^2$

4. Schritt

Im Kopf den zweiten Summanden einschließlich Vorfaktor quadrieren und Ergebnis notieren. Hier: $b^2 := s^2$

Berechnen Sie den Term $(0,5x + 2y)^2$ wie im Beispiel:

$$(0,5x + 2y)^2 =$$

Schritte im Kopf

1. Schritt: _____ Formel

2. Schritt: a := _____ b := _____

3. Schritt: a^2 := _____

4. Schritt: b^2 := _____

Übung zu 1.4.2

Lösen Sie die Klammern auf. Notieren Sie bei den Binomen direkt das Endergebnis. Wenn Sie Zwischenschritte im Kopf berechnen.

- a) $(a - 3b)^2$ = _____
- b) $(a + 1)^2$ = _____
- c) $(3x + 2y)(3x - 2y)$ = _____
- d) $(u + 1)(1 - u)$ = _____
- e) $(\frac{1}{3}w + v)^2$ = _____
- f) $(\frac{3}{5}x - 5y)^2$ = _____
- g) $(3s + \frac{1}{6}s - \frac{1}{6}s)^2$ = _____
- h) $(a + 3b)(a - 3b)$ = _____
- i) $(\frac{1}{2}r + \frac{1}{2}s)^2$ = _____
- j) $(\frac{4}{9}r + \frac{3}{4}s)^2$ = _____
- k) $(\frac{1}{5}a - \frac{3}{5}b)(\frac{1}{5}a + \frac{3}{5}b)$ = _____
- l) $(\sqrt{2}a + \sqrt{2}b)^2$ = _____
- m) $(\sqrt{10}a + \sqrt{5}b)^2$ = _____
- n) $(\sqrt{3}x - \sqrt{3}y)^2$ = _____
- o) $(\sqrt{7}x - \sqrt{3}y)^2$ = _____
- p) $(\sqrt{7}x - \sqrt{3}y)^2$ = _____
- q) $(\sqrt{3}t + \sqrt{2}s)(\sqrt{3}t + \sqrt{2}s)$ = _____
- r) $(a - b)^2$ = _____

Aufgabe 1.4.3

Faktorisieren von Summen mit Hilfe der binomischen Formeln

Genau wie beim Ausmultiplizieren von binomischen Formeln kann man auch bei der Umkehrung dieser Rechnung, nämlich aus einer Summe auf eine binomische Formel zurückzuschließen, schrittweise vorgehen. Man sollte dazu die binomischen Formeln auswendig im Kopf haben. Vorgehen soll hier ebenfalls anhand von Beispielen gezeigt werden.

a) Faktorisieren mit der 1. binomischen Formel

Zu Faktorisieren ist die Summe $25u^2 + 20uw + 4w^2$

1. Schritt
Man ordnet im Kopf anhand der Anzahl der Summanden und deren Vorzeichen eine mögliche binomische Formel zu.
Hier: $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

2. Schritt
Man zieht im Kopf die Wurzel aus dem ersten Summanden und ordnet das Ergebnis der Variable a zu.
Hier: $a := \sqrt{25u^2} = 5u$

3. Schritt
Man zieht im Kopf die Wurzel aus dem dritten Summanden und ordnet das Ergebnis der Variablen b zu.
Hier: $b := \sqrt{4w^2} = 2w$

4. Schritt
Man prüft im Kopf, ob das Produkt $2ab$ dem Summanden in der Mitte entspricht.
Hier: $2ab := 2 \cdot 5u \cdot 2w = 20uw$

Falls das nicht geht, kann die Summe nicht zum Binom umgeformt werden und Schritt 5.

5. Schritt
Man notiert, wenn möglich, das Ergebnis.
Hier: $(5u + 2w)^2$

$4x^2 - 4x + 1 =$ _____

- Schritt 1:** Welche binomische Formel ist möglich
1. Schritt: _____
2. Schritt: $a := \sqrt{\quad}$
3. Schritt: $b := \sqrt{\quad}$
4. Schritt: $2ab := \quad$
5. Binom notieren

c) Faktorisieren mit der 3. binomischen Formel

$$x^2 - 2 = x^2 - (\sqrt{2})^2 = (\quad)(\quad)$$

Wenn man 2 als $(\sqrt{2})^2$ auffasst, ist das ein drittes Binom.

Schritte im Kopf

1. Schritt: $\quad$ binomische Formel
2. Schritt: $a := \quad = x$
3. Schritt: $b := \sqrt{\quad} = \sqrt{2}$
4. Schritt: Ergebnis notieren.

d) Faktorisieren mit der 3. binomischen Formel und vorherigem Ausklammern

$$12x^2 - 3z^2 = 3(4x^2 - z^2) = 3(\quad)(\quad)$$

Das sieht zunächst nach der binomischen Formel aus, da es keine quadratischen Summanden gibt. Man kann hier aber die 3 ausklammern und erhält:

$$12x^2 - 3z^2 = 3(4x^2 - z^2)$$

Schritte im Kopf

1. Schritt: $\quad$ binomische Formel
2. Schritt: $a := \sqrt{\quad} = 2x$
3. Schritt: $b := \sqrt{\quad} = z$
4. Schritt: Ergebnis notieren.

e) Faktorisieren mit der zweiten binomischen Formel und vorherigem Ausklammern

Faktorisieren Sie die Summe $18a^2 - 12a + 2$, indem Sie schrittweise die fehlenden Angaben ausfüllen:

$$18a^2 - 12a + 2 = (\quad)^2 - (\quad)^2 = (\quad)(\quad)$$

1. Schritt: $\quad$ Formel ist möglich
2. Schritt: $a := \quad$
3. Schritt: $b := \quad$
4. Schritt: $2ab := \quad$
5. Schritt: Ergebnis notieren.

Übung zu 1.4.3

Faktorisieren Sie die folgenden Summen so weit wie möglich, indem Sie Ausklammern und/oder die binomischen Formeln anwenden. Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.
Hinweis: Bei einer Aufgabe gibt es kein Ergebnis, da keine binomische Formel vollständig und nicht ausgeklammert werden kann.

a) $2ax + 2ay - 4az = \quad$

b) $6a^2b + 12ab^2 - 18ab = \quad$

c) $4a^2 + 40ab + 25b^2 = \quad$

d) $49x^2 - 42xy^2 + 9y^4 = \quad$

e) $k^4 - 2k^2 + 1 = \quad$

f) $1 - \quad = \quad$

g) $6x^2 - \quad + 5 = \quad$

h) $\quad^6 - 8v^2 = \quad$

i) $12g^3 - 36g^2h + 27gh^2 = \quad$

j) $\frac{3}{4}ax + \frac{3}{4}bx - \frac{3}{4}x = \quad$

k) $\quad + \sqrt{10ab} + \sqrt{12a} = \quad$

l) $\frac{1}{25}x^2 + \frac{2}{15}xy + \frac{1}{9}y^2 = \quad$

m) $\frac{4}{9}u^2 - 1 = \quad$

n) $\frac{1}{\quad} = \quad$

o) $\frac{1}{\quad} = \quad$

Aufgabe 1.5

Quadratische Ergänzung

Aufgabenstellungen, wie beispielsweise die Ermittlung der Scheitelpunkte von Parabeln oder Lösungsverfahren bei quadratischen Ungleichungen, erfordern oft einen quadratischen Term zu einem Binom umzuformen. Man bezeichnet dieses Verfahren als **quadratische Ergänzung**. Die schrittweise Vorgehensweise bei der quadratischen Ergänzung wird wieder an einem Beispiel dargestellt. Die einzelnen Schritte können auch hier bei ein wenig Übung im Kopf ablaufen. Tragen Sie Schritt für Schritt jeweils die Zwischenergebnisse aus den Sprechblasen an die passenden Stellen ein.

In diesem Beispiel soll aus dem Term $16x^2 + 48xy + \dots$ ein Binom entstehen.

1. Schritt
Zuordnen einer passenden binomischen Formel. Anhand der $+ 48xy$ erkennt man die 1. binomische Formel.

$16x^2 + 48xy + \dots = (\dots)^2$

2. Schritt
Dem gegebenen quadratischen ersten Summanden a^2 durch Wurzelziehen den Wert von a entnehmen. Den Wert in der Klammer rechts vom Gleichheitszeichen eintragen.

Hier: $a = \sqrt{16x^2} = 4x$

Zwischenergebnis: $16x^2 + 48xy + \dots = (4x + \dots)^2$

3. Schritt
Mit Hilfe des zweiten Summanden, der aus $2ab$ besteht, auf den Wert von b schließen. Man dividiert dazu den mittleren Summanden durch $2a$.

$16x^2 + 48xy + \dots = (\dots + \dots)^2$

4. Schritt
Aus dem Ergebnis von Schritt 3 durch Quadrieren b^2 ermitteln und das Ergebnis notieren.

Hier: $b^2 := 36y^2$

Übung 1.5.1

Ergänzen Sie zum Binom: $x^2 - x + \dots$. Notieren Sie als Hilfestellung zunächst die einzelnen Rechenschritte, die im Kopf ablaufen, in der Sprechblase. (Kontrolllösungen: $(x - \frac{1}{2})^2$)

Schritt 1: Kopf

$x^2 - x + \dots = (\dots)^2$

Schritt 2: Binomische Formel

2. Schritt: $a := \sqrt{\dots} = \dots$

3. Schritt: $b = \frac{2ab}{2a} = \dots$

4. Schritt: $b^2 = \dots$

Übung 1.5.2

Ergänzen Sie zum Binom $\dots$. Suchen Sie dabei die Schritte 1 bis 4 im Kopf durchzuführen.

- a) $f^2 + \dots = \dots$
- b) $p^2 + q + \dots = \dots$
- c) $\dots - 4 \dots = \dots$
- d) $\dots - 8x + \dots = \dots$
- e) $9p^2 + 6p + \dots = \dots$
- f) $x^2 - 6x + \dots = \dots$
- g) $z^2 + z + \dots = \dots$
- h) $\dots + \dots = \dots$
- i) $\dots + az + \dots = \dots$
- k) $4x^2 - 4xy + \dots = \dots$
- l) $16a^2 - 32av + \dots = \dots$
- m) $16x^2 + \dots = \dots$
- n) $\dots + \dots = \dots$
- o) $\dots - 40vw + \dots = \dots$

Ergänzende und vertiefende Übungen

Um die Regeln zur Potenzrechnung und den Umgang mit Binomen zu festigen und zu vertiefen können Sie die folgenden ergänzenden Übungen bearbeiten. Dies ist besonders für diejenigen sinnvoll, die im Leistungskurs in Mathematik belegen wollen oder ein Studienfach wählen, in dem Vorlesungen in Mathematik obligatorisch sind.

Übung 1.6

Formen Sie die Brüche so um, dass im Nenner keine Wurzeln vorkommen. Vereinfachen Sie die Terme dabei so weit wie möglich. (Vergl. Aufgabe 1.5, Beispiel 1)

- a) $\frac{10b}{\sqrt{b}}$ = _____
- b) $\frac{3x}{\sqrt{27x}}$ = _____
- c) $\frac{z}{\sqrt{z+1}}$ = _____
- d) $\frac{x}{1-\sqrt{x}}$ = _____
- e) $\frac{\sqrt{y}-1}{\sqrt{y}+1}$ = _____

Übung 1.7
Vereinfachen Sie soweit wie möglich.

- a) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\frac{a}{b}}}$ = _____
- b) $\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{\frac{a}{b}}}$ = _____
- c) $\frac{\sqrt{\frac{a}{b}}}{\sqrt{\frac{b}{a}}}$ = _____
- d) $\frac{\sqrt{\frac{a}{b}}}{\sqrt{\frac{b}{a}}}$ = _____
- e) $\frac{\sqrt{\frac{a}{b}}}{\sqrt{\frac{b}{a}}}$ = _____

Übung 1.8

Kürzen Sie den Bruch so weit wie möglich.

- a) $\frac{(x^n + x^{n+1})^2}{x^{2n}}$ = _____
- b) $\frac{x^{2n+1} - x^{2n+3}}{x^{n+1} + x^{n+2}}$ = _____

Übung 1.9

Faktorisieren Sie unter Anwenden des Binomischen Formelgesetzes und mit Hilfe der binomischen Formeln.

- a) $\sqrt{x^{2n} - 2x^{n+m} + x^{2m}}$ = _____
- b) $\sqrt{4x^{4n} + 4x^{2n+2} + 4y^2}$ = _____

Übung 1.10

Formen Sie jeden Term durch Ausklammern in ein geeignetes Faktors so um, dass in der Klammer keine negativen Potenzen bzw. keine Brüche auftreten.

- a) $a^x + 2$ = _____
- b) $b^{2x} + 4 - b^{-2x}$ = _____

Übung 1.11

Die Aufgabenstellung ist so formuliert, dass es zu Missverständnissen entstehen können. Die Aufgabenstellung dort ist so formuliert, dass es zu Missverständnissen entstehen können. Sie können sicherlich, dass das jedoch zu Missverständnissen führen kann. Man muss diese Terme daher so umformen, dass der Nenner vollständig ausgekürzt werden kann oder im Nenner ein Ausdruck steht, der nie gleich Null wird. Erläutern Sie anhand der Beispiele die Rechenschritte, und wenden Sie dies dann auf die anderen Aufgaben an.

Beispiel 1

Rechnen Sie die folgenden Umformungen:

- $\frac{2xh + h^2 - x^2}{h} =$ (1) $\rightarrow$ (2) _____
- $\frac{2xh + h^2 - x^2}{h} =$ (2) $\rightarrow$ (3) _____

(3) $\frac{2xh+h^2}{h} =$ (3) $\rightarrow$ (4) _____

(4) $\frac{h(2x+h)}{h} =$ (4) $\rightarrow$ (5) _____

(5) $2x + h$ Für $h = 0$ ergibt sich der Term $2x$

Beispiel 2

Rechenschritte

Erläutern der Informationen:

$$(1) \frac{(x+h)^2 - (x+h) - (x^2 - x)}{h} =$$

$$(2) \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x - h - x^2 + x}{h}$$

(3) $\frac{2xh + h^2 - h}{h} =$ (4) _____

$$(4) \frac{h(2x+h)}{h} = \quad (4) \rightarrow (5)$$

(5) $2x - 1$ – Fñhng ergibt sich der Term $2x - 1$.

Beispiel

Rechenschritte

Erläutern der Einformungen:

(1) $\frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} =$ (1) $\rightarrow$ (2) _____

$$(2) \quad \frac{x}{x(x+b)} = \frac{x+b}{x(x+b)}$$

(3) $\rightarrow$ (4) _____

(4) $\rightarrow$ (5) _____

$$(5) \quad \frac{-h}{hx(x+h)} =$$

(6) $\frac{-1}{x(x+h)}$ sich der Term $-\frac{1}{x^2}$.

Beispiel

Rech

Erläutern der Umformungen:

(1) $\rightarrow$ (2) _____

$$(2) \frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = (2) \rightarrow (3) \underline{\hspace{10em}}$$

$$(3) \frac{(\sqrt{x+h})^2 - (\sqrt{x})^2}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} =$$

$$(4) \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} =$$

$$(5) \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} =$$

(6) $\frac{1}{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$ Für $h=0$ ergibt sich der Term $\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Formen Sie mit Hilfe der Formeln die folgenden Terme um.

a) $\frac{2(x+1)}{x^2-1}$ b) $\frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$

c) $\frac{1}{x+h+1} - \frac{1}{x+1}$

$$f) \frac{\frac{1}{\sqrt{x+h}} - \frac{1}{\sqrt{x}}}{h}$$

Lösungen nach Einsetzen von $n=0$ in unsortierter Reihenfolge:

$$3x^2; -\frac{1}{(x+1)^2}; \frac{1}{2\sqrt{x+3}}; 4x; -\frac{2}{x^3}; -\frac{\sqrt{x}}{2x^2}$$



Aufgabe 1.6

Ergänzende Betrachtungen zu Binomen höherer Ordnung

- a) Multiplizieren Sie den Term $(2x + 3)^4$, ohne Verwendung von Hilfstexten, auf Fuß aus. Wenn Sie alles richtig umgeformt haben, erhalten Sie als Ergebnis $16x^4 + 96x^3 + 216x^2 + 216x + 81$.



- b) Berechnen Sie die Produkte durch Ausmultiplizieren der Klammern.

$(a + b)^0 = \underline{\hspace{2cm}}$

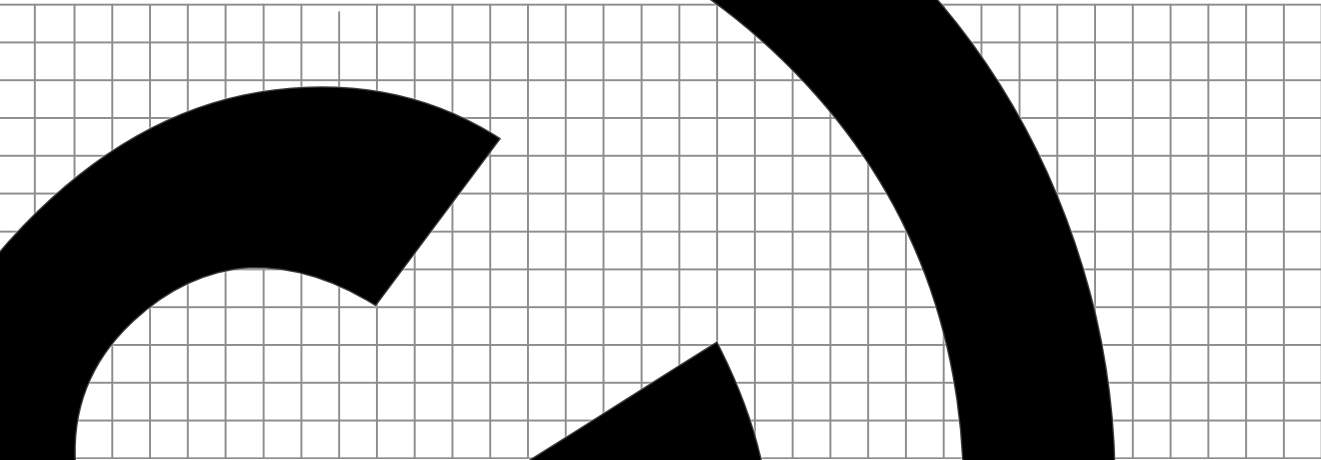
$(a + b)^1 = \underline{\hspace{2cm}}$

$(a + b)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$

$(a + b)^3 = \underline{\hspace{2cm}}$

$(a + b)^4 = \underline{\hspace{2cm}}$

Rechnungen.



- c) Ergänzen Sie die Tabelle, indem Sie das für $(a + b)^0$, $(a + b)^1$ und $(a + b)^2$ benötigte Schema anhand Ihrer Ergebnisse aus b) fortsetzen.

$(a + b)^0 =$ 1
 $(a + b)^1 =$ a + b
 $(a + b)^2 =$ a² + 2ab + b²
 $(a + b)^3 =$ a³ + 3a²b + 3ab² + b³
 $(a + b)^4 =$ a⁴ + 4a³b + 6a²b² + 4ab³ + b⁴
 $(a + b)^5 =$ a⁵ + 5a⁴b + 10a³b² + 10a²b³ + 5ab⁴ + b⁵

Geben Sie an, wie sich die Potenzen, gelesen von links nach rechts, verhalten.

(1) Potenzen von a: _____

(2) Potenzen von b: _____

Die Koeffizienten a_n für $n \geq 5$ ergeben folgendes Dreieck. Vervollständigen Sie das Dreieck, indem Sie die fehlenden Angaben auf die Zahlenwerte ab $n = 6$ schließen.

n = 0									
n = 1	1								
n = 2		1	1						
n = 3			2	2	1				
n = 4				3	3	1			
n = 5					4	6	4	1	
n = 6									
n = 7									

Man nennt dieses Dreieck das "**Pascalsche Dreieck**" und die Zahlen **Binomialkoeffizienten** bezeichnet. Die Zahlenwerte des Dreiecks können zu einer Summenbildung ermittelt werden, indem man mit dem Taschenrechner $\binom{n}{r}$ berechnet.

Beispiel Eingabe: $\binom{9}{5} = 9 \text{ nCr } 5 = 126$

Tastenbezeichnung nCr stammt von der Bedeutung des Binomialkoeffizienten in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, vgl. [https://de.wikipedia.org/wiki/Binomialkoeffizient](#).

- d) Bestimmen Sie mit Hilfe der Kenntnis über die Koeffizienten und Potenzen bei den Binomien folgendes Produkt.

$(a + b)^{10} =$ _____

Information 1.5

Berechnet man den Ausdruck $(a + b)^n$, erhält man die sog. **Binomialreihe**.

Algemeine Formulierung Binomial

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Die meisten kennen Sie wahrscheinlich aus dem

Tabellenkalkulationsprogramm Excel. Dieses Zeichen wird dort zum **Verfassen** von Zelleninhalten verwendet. Entsprechend zur Bedeutung in Excel wird das Summenzeichen in der Mathematik als **Σ** (kürzende Schreibweise für Summen) verwendet.

- c) In folgenden Beispielen werden die Kenntnisse über die Binomialreihe auf die Anfangsaufgabe $(2 + 3x)^4$ angewendet. Sie sehen, dass dieser Weg wesentlich kürzer ist als der Weg von Teilaufgabe a). Nutzen Sie diesen klaren Hinweis und berechnen Sie anschließend mit dieser Methode ebenfalls den Term $(2x + \frac{1}{2})^5$.

$$(2+3x)^4 = \binom{4}{0}2^4 + \binom{4}{1}2^3 \cdot 3x + \binom{4}{2}2^2 \cdot (3x)^2 + \binom{4}{3}2 \cdot (3x)^3 + \binom{4}{4}(3x)^4$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 =$$

Raum für Notizen



Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Grundlegendes zu Algebra und Funktionen selbstorganisiert erlernen



Kapitel 1 Grundlegendes zu Gleichungen



Kapitel 2: Grundlegendes zu Gleichungen**Aufgabe 2.1****Lösen linearer Gleichungen und Gleichungen, die auf lineare Gleichungen führen**

Das Lösen linearer Gleichungen und Gleichungen, die auf lineare Gleichungen führen, haben Sie bereits in der Sekundarstufe I gelernt. Hier wenden Sie nun die Ihnen bereits bekannten Verfahren an. Die Aufgabe ist gleichzeitig eine Übung zur Wiederholung der Binomischen Formeln und der binomischen Formeln. Versuchen Sie bei der Lösung vollständig auf den Einsatz der Binomischen Formeln zu verzichten. Zur Kontrolle ist die Lösungsmenge jeweils angegeben.

- a) $2x = x$ $\{0\}$
 b) $(x+1)^2 = (x-1)^2$ $\{0\}$
 c) $(x-1)^2 = x^2 - 1$ $\{1\}$
 d) $\frac{x}{3} + 9 = 1$ $\{-24\}$
 e) $\frac{3}{4}y - 2 = 1$ $\{-9\}$
 f) $x + (x+1) + (x+2)^2 = 6$ $\{-9\}$
 g) $2x + (9-x)^2 - 1 - (12-x)^2 + 2x = 0$ $\{6\}$
 h) $\frac{x}{2} + 6 - \frac{x}{3} = \frac{x}{2} + 5 + \frac{x}{3}$ $\{-3\}$
 i) $2(4\frac{1}{2}x + 2\frac{3}{4}) = 10x + 5$ $\{\frac{7}{2}\}$
 j) $10x + 5 - 2x = 2(1\frac{1}{2}x - \frac{3}{4})$ $\{\frac{1}{5}\}$
 k) $(1,5x - 2)^2 - 38,08 = 0$ $\{-2\}$
 l) $(x - \frac{1}{3})^2 - (x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2}) = \frac{2}{3}x$ $\{ \}$

Aufgabe 2.2**Parameterisierte Gleichungen**

Bei den folgenden Gleichungen sind, neben der Lösungsvariablen x weitere Variablen, sog. Parameter, enthalten. D.h., in den meisten Fällen besteht die Lösung nicht nur aus einer Zahl, sondern enthält auch noch den Parameter. Lösen Sie die Gleichungen wie gewohnt jeweils nach x auf. Decken Sie dabei das Beispiel unten ab, und versuchen Sie die Gleichungen zunächst ohne diese Hilfe zu bearbeiten. Die Lösungen sind jeweils als Kontrollergebnis gegeben.

- a) $3x + 7 = 6a$ $x = a+b$
 b) $6x - 2a = 2x + 2a + 4b$ $x = 5$
 c) $3m + 5b = 5a + xb$ $x = -\frac{t}{3}$
 d) $3sx - 7rt = 3sx - 7rt$ $x = -\frac{t}{3}$

Beispiel zur Lösung von c) bis f):

Alle Summanden mit x auf die linke Seite bringen.

Kommt x in mehreren Summanden vor, so muss man sie zusammenfassen.

$$3s + sx = rx + 3r$$

$$sx - rx = 3r - 3s$$

$$x(s - r) = 3(r - s)$$

$$x = \frac{3(r - s)}{(s - r)}$$

$$x = \frac{-3(s - r)}{(s - r)}$$

$$x = -3 \quad \text{mit } r \neq s$$

Wenn man die Klammern auflöst, müssen alle Summanden gleich sein. Das bedeutet, dass man im Nenner -1 erhält.

Man muss die Klammern wandeln.

Man kann beim Kürzen den Zähler und Nenner durch die Klammer $(s - r)$ dividieren, darf die Klammer nicht Null sein, also dürfen r und s nicht den gleichen Wert annehmen.

Kapitel 1	
Brüche, Potenzen, Wurzeln und Binome	9
Kapitel 2	
Grundlegendes zu Gleichungen	59
Kapitel 3	
Lineare Funktionen	63
Kapitel 4	
Quadratische und biquadratische Gleichungen und Ungleichungen	77
Kapitel 5	
Ganzrationale Funktion 2. Grades	87
Kapitel 6	
Gleichungen 3. und höherer Grades	104
Kapitel 7	
Ganzrationale Funktionen 2. und höherer Grades	115
Kapitel 8	
Die Hyperbelfunktion	127
Kapitel 9	
Trigonometrische Funktionen	135
Kapitel 10	
Exponential- und Logarithmusfunktionen	145
Kapitel 11	
Vertiefende Betrachtungen zu Betragsungleichungen	169

Gesamtwortmarken zu Algebra und Funktionen

(Bestandteile der Markierung sind Eigentum des Verlags und dürfen nicht ohne schriftliche Genehmigung des Verlags nachgedruckt werden.)

Alle Rechte vorbehalten. All rights reserved.

Druck, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte, die aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

Lehrerselbstverlag

Lehrerselbstverlag GmbH, Koblenz (Germany)

Lehrerselbstverlag.de

www.f-druck.de

Aufgabe 2.3

Ergänzendes Vertiefungsthema Bruchgleichungen

In dieser Aufgabe werden Bruchgleichungen, die auf lineare Gleichungen zurückgeführt werden können, bearbeitet. Sie sich anhand des Beispiels die prinzipielle Vorgehensweise bei diesem Gleichungstyp und erläutern Sie anschließend den Lösungsweg im Beispiel auf der folgenden Seite.

Information 2.1: Beispielaufgabe zu Bruchgleichungen

Rechnung	Bemerkungen zur Rechnung
(1) $\frac{5-2x}{5-x} - 1 = \frac{10}{2x-10}$	(1) → (2) Nenner soweit wie möglich faktorisieren
(2) $\frac{5-2x}{5-x} - 1 = \frac{10}{2(x-5)}$	(3) Wenn möglich, Brüche kürzen.
(3) $\frac{5-2x}{5-x} - 1 = \frac{10}{x-5}$	(3) → (4) Alle Brüche auf den Hauptnenner bringen.
(4) $\frac{5-2x}{5-x} \cdot \frac{5-x}{5-x} = \frac{10}{x-5} \cdot \frac{5-x}{5-x}$	(4) → (5) Gleichung mit dem HN multiplizieren. Achtung: Bei Minus im Bruch → Klammer setzen
(5) $\frac{5-2x}{5-x} \cdot \frac{5-x}{5-x} = \frac{10}{x-5} \cdot \frac{5-x}{5-x}$	(5) → (6) Klammern auflösen.
(6) $\frac{5-2x}{5-x} \cdot \frac{5-x}{5-x} = \frac{10}{x-5} \cdot \frac{5-x}{5-x}$	(6) → (8) Gleichung nach x auflösen.
(8) $x = 5$	Achtung: $x = 5$ darf als Lösung nicht in die Ausgangsgleichung eingesetzt werden, da sich Null im Nenner ergibt. Daher muss ein Definitionsbereich angegeben werden.

Definitionsbereich: $x \neq 0$ (Vermeidung durch Nullsetzen des Nenners).

... Lösung überschneiden sich.

$$\Rightarrow L = \{ \}$$

Es existiert keine Lösung!

Zusammenfassen der Schritte bei der Lösung von Bruchgleichungen

1. Die Summen in den Zähler und Nenner so weit wie möglich faktorisieren. Gegebenenfalls kürzen.
2. Den Hauptnenner der Summanden auf den Hauptnenner bringen.
3. Die Gleichung mit dem Hauptnenner multiplizieren.
4. Die resultierende Gleichung nach x auflösen.
5. Den Definitionsbereich bestimmen.
6. Den Definitionsbereich mit dem Ergebnis vergleichen und die Lösungsmenge angeben.

Erläutern Sie jeweils die einzelnen Lösungsschritte:

$$(1) \quad \frac{8+x}{15+5x} - \frac{5}{9+3x} = \frac{4}{15}$$

$$(2) \quad \frac{8+x}{5(3+x)} - \frac{5}{3(3+x)} = \frac{4}{3 \cdot 5}$$

$$(3) \quad \frac{3(8+x)}{15(x+3)} - \frac{5 \cdot 5}{15(x+3)} = \frac{4(x+3)}{15(x+3)}$$

$$(4) \quad 3(8+x) - 25 = 4(\underline{3+x})$$

(5) $24 + 3x - 25 =$

(6)  -12

$$D = M \setminus \{-3\}$$

$$\mathbb{L} = \{-1, 0, 1\}$$

2.1

Erweitern Sie den Definitionsbereich der Bruchgleichungen und bestätigen Sie jeweils die angegebene Lösungsmenge durch Rechnung.

a) $\frac{2}{x-3} = \frac{4}{x-2}$

$$L = \{4\}$$

b) $\frac{4}{\sqrt{2}}$

$$\{ \}$$

$$\frac{x}{4-2x} - \frac{x-1}{3x-6} = \frac{x}{4x-8}$$

~~$L =$~~

$$e) \frac{x+2}{x+1} = \frac{2x^2}{x^2-1} - \frac{x-3}{x+1}$$

$$L = \{-5\}$$

f) $\frac{2x+2}{x^2+2}$

$$L = \{ \}$$

g)

$$L = \{7\}$$

$$\frac{-4x+6}{18x+6} + \frac{3x-6}{9x^2-1}$$

$$L = \left\{ -\frac{2}{3} \right\}$$

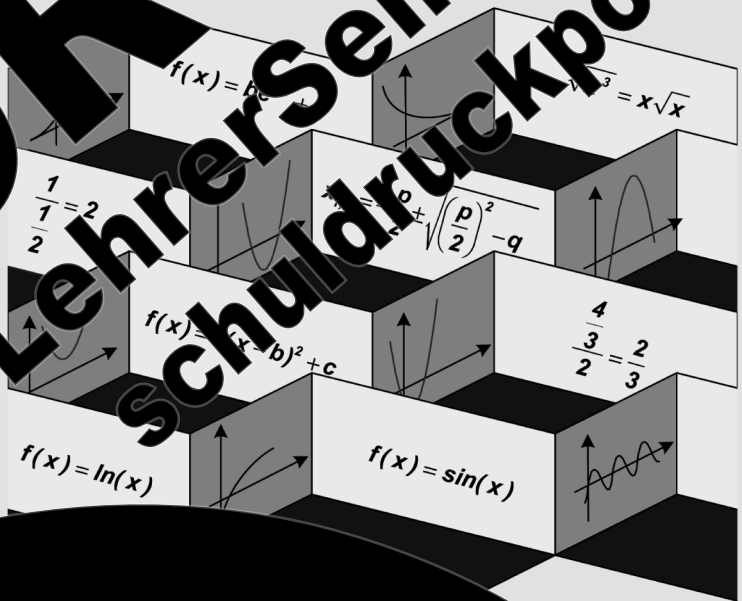
Raum für Notizen



Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Grundlegendes zu Algebra und Funktionen

selbstorganisiert erlernen



Kapitel 1 Lineare Funktionen



Kapitel 3: Lineare Funktionen

Aufgabe 3.1

Verdeutlichen Sie sich die folgenden grundlegenden Informationen zu Funktionen im Koordinatensystem.



Bezeichnungen:

Ein Koordinatensystem, bei dem die Achsen senkrecht zueinander verlaufen wird als **kartesisches Koordinatensystem** bezeichnet.

Die **horizontale Achse**, hier die x-Achse, wird auch als **Abzisse** bezeichnet.

Die **vertikale Achse**, hier die y-Achse, wird auch als **Ordinate** bezeichnet. Diese Achse kann auch mit dem Namen der abgebildeten Funktion, hier $f(x)$, bezeichnet werden.

Funktionen, werden in der Regel mit $f(x)$ bezeichnet. Um Funktionen unterscheiden zu können, verwendet man oft $f_1(x)$, $f_2(x)$ usw. Man drückt durch diese Schreibweise aus, dass die Funktion durch Einsetzen eines Wertes für x in die Funktionsgleichung berechnet wird. (Vgl. Sprechblasen oben)

Abstände:

Der Abstand Δx der x-Koordinaten der Punkte P und Q: $\Delta x = x_Q - x_P$

Der Abstand Δy der y-Koordinaten der Punkte P und Q: $\Delta y = y_Q - y_P$

Der Abstand d der Punkte P und Q (Pythagoras): $d^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$

abschnitt c:

Die Stelle c , an der die Gerade die y-Achse schneidet, sind die y-Koordinaten dieses Schnittpunktes sind c oder $A(0/c)$

Kapitel 1	
Brüche, Potenzen, Wurzeln und Binome	9
Kapitel 2	
Grundlegendes zu Gleichungen	59
Kapitel 3	
Lineare Funktionen	63
Kapitel 4	
Quadratische und biquadratische Gleichungen und Ungleichungen	77
Kapitel 5	
Ganzrationale Funktion 2. Grades	87
Kapitel 6	
Gleichungen 3. und höherer Grades	104
Kapitel 7	
Ganzrationale Funktionen 2. und höherer Grades	115
Kapitel 8	
Die Hyperbelfunktion	127
Kapitel 9	
Trigonometrische Funktionen	135
Kapitel 10	
Exponential- und Logarithmusfunktionen	145
Kapitel 11	
Vertiefende Betrachtungen zu Betragsungleichungen	169

Gesamtwortzahl: 1.200.000 Wörter zu Algebra und Funktionen. Dieses Buch ist als Lernhilfe konzipiert und soll das Erlernen erleichtern.

(Bestandteile des Buchs)

Siehe auch:

Alle Rechte vorbehalten. All rights reserved.

Das Werk, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,

aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

SelbstVerlag

Lehrers & Freunde GmbH, Koblenz (Germany)

Lehrerselbstverlag.de

www.f-druck.de

Steigung m: Die Steigung einer Funktion ist durch das folgende Verhältnis dem

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{f(x_Q) - f(x_P)}{x_Q - x_P}$$

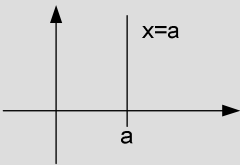
Verdeutlichen Sie sich anhand der Abbildungen auf der folgenden Seite, was man unter einer steigenden und einer fallenden Geraden versteht.

m>0: die Gerade steigt

m<0: die Gerade fällt

Gerade verläuft horizontal

Achtung: Geraden der Form $x = a$ gehen an der Stelle a durch die y-Achse und verlaufen senkrecht. Diese Geraden sind **keine Funktionen**.



Funktionsgleichung: Die Funktionsgleichung einer linearen Funktion ist durch die **Steigung m** und den **y-Achsenabschnitt c** gegeben:

$$y = mx + c \text{ oder } f(x) = mx + c$$

(Oft wird anstelle von c auch ein b verwendet.)

Nullstelle N: Die Stelle an der Stelle x_0 von einer Geraden mit der x-Achse geschnitten, so ist dieser Punkt als **Nullstelle N** (Nullpunkt) bezeichnet. Wenn man die Nullstelle mit dem Ansatz $f(x) = 0$ berechnet werden.

Man sagt auch: „Die Funktion wird Null gesetzt“.

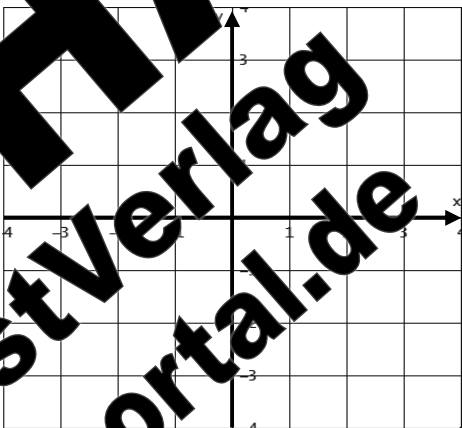
Um die Nullstelle zu erhalten, setzt man in den Ansatz die Nullstelle ein. Die resultierende Gleichung $mx + c = 0$ nach x auflösen.

Zeichnen von Geraden: Um eine Gerade in einem Koordinatensystem zu zeichnen, benötigt man keinen Taschenrechner und auch keine Wertetabelle. Wie man eine Gerade direkt aus der Kenntnis von Achsenabschnitt und Steigung zeichnen kann, wird im Folgenden an zwei Beispielen erläutert. Wenden Sie sich die Vorgehensweise, und wenden Sie die Methode in der Übung 3.1 an.

Beispiel Zeichnen von Geraden

$$f(x) = -2x + 1$$

$$g(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}$$



Schritt 1: Markieren Sie den y-Achsenabschnitt c im Koordinatensystem.

für f(x) gilt $c_f = 1$
für g(x) gilt $c_g = -\frac{1}{2}$

Schritt 2: Stellen Sie den Wert für die Steigung m als Bruch dar. Ein negatives Vorzeichen kann man dann dem Zähler oder Nenner zuordnen. Bedenken Sie dabei, dass man jede Zahl als Bruch mit dem Nenner 1 schreiben kann. Hier gilt:

für f(x) gilt:

$$m_f = -2 = \frac{-2}{1} = \frac{2}{-1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \left(= \frac{\text{Anzahl der Kästchen in y - Richtung}}{\text{Anzahl der Kästchen in x - Richtung}} \right)$$

$$m_g = \frac{2}{3} = \frac{-2}{-3} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \left(= \frac{\text{Anzahl der Kästchen in y - Richtung}}{\text{Anzahl der Kästchen in x - Richtung}} \right)$$

Schritt 3: Zeichnen Sie die Gerade durch den y-Achsenabschnitt c durch Abzählen der entsprechenden Anzahl von Kästchen jeweils das Steigungsdreieck einzeichnen. Sie danach die angegebenen Geraden zeichnen.

Übung 3.1

a) Zeichnen Sie die Geraden f(x) = 2x + 1 und g(x) = -x + 3 ohne Taschenrechner oder einer Wertetabelle in einem Koordinatensystem.

b) Zeichnen Sie die Geraden f(x) = 2x + 1 und g(x) = -x + 3 auf der folgenden Seite gegebene Koordinatensystem ein.

b) Zeichnen Sie die Gerade ebenfalls in diesem Koordinatensystem ein. $x = -2$

c) Welche Bedeutung hat, bezogen auf Angaben in einem Koordinatensystem, die Schreibweise Δx ?



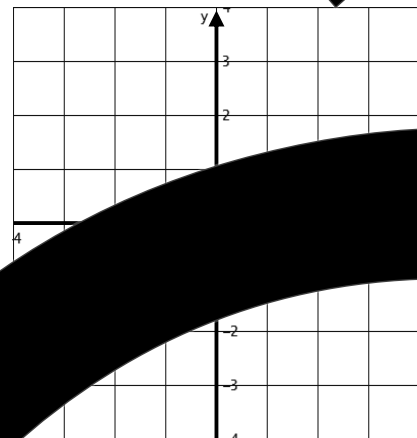
d) Welche Bedeutung hat, bezogen auf Angaben in einem Koordinatensystem, der Quotient $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$?

Aufgabe 3.2

Lagebeziehungen zwischen Geraden

Ergänzen Sie nach dem Vorzeichen der Geraden die Überschriften, und füllen Sie die jeweiligen Lücken im Text aus.

a) _____ Geraden



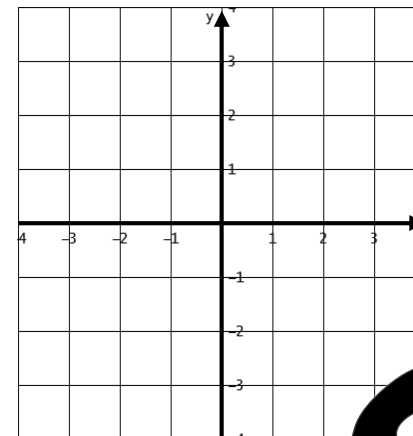
Zeichnen Sie die beiden Geraden g und h in das Koordinatensystem ein, und geben Sie an, wie die Geraden zueinander verlaufen.

$$g(x) = 0,5x + 3$$

$$h(x) = -2x + 1$$

Merke: Zwei Geraden $g(x) = m_g x + c_g$ und $h(x) = m_h x + c_h$ sind parallel, wenn für die Steigungen gilt: $m_h = m_g$

b) _____ Geraden



Zeichnen Sie die beiden Geraden g und h in das Koordinatensystem ein, und geben Sie an, wie die Geraden zueinander verlaufen.

$$g(x) = 3x + 3$$

$$h(x) = 0,5x + 1$$

Die Geraden sind _____

Wenn Sie ebenfalls die Geraden g und h mit Steigungen $m_g = 3$ und $m_h = -\frac{1}{3}$, $m_g = -4$ und $m_h = \frac{1}{4}$ oder

$m_g = \frac{2}{5}$ und $m_h = -\frac{5}{2}$ zeichnen, erkennen Sie, dass auch die Geraden jeweils orthogonal sind.

Merke: Zwei Geraden $g(x) = m_g x + c_g$ und $h(x) = m_h x + c_h$ sind

orthogonal (Schreibweise $g \perp h$), wenn gilt: $m_h = -\frac{1}{m_g}$

Aufgabe 3.3

Schnittpunkte von Geraden

Die beiden Geraden g und h (siehe Aufgabe 3.2 b) schneiden sich. Lesen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes ab.

Um den Schnittpunkt zu berechnen, verwendet man das Gleichsetzungsverfahren. Man kann auch mit dem Additions- bzw. Einsetzungsverfahren.

Merke: Berechnen Sie den Schnittpunkt zwischen zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ mit $f(x) = g(x)$

Verfolgen Sie die Schritte bei der Berechnung des Schnittpunktes zweier Geraden. Achten Sie auf die Angabe entsprechender Aufgaben im Heft, damit Sie die Dokumentation Ihres Vorgehens stets den Notizen notieren.

Berechnen des Schnittpunktes:

Schritt 1:
Notieren des Ansatzes.

$$g(x) = h(x)$$
$$-2x + 3 = 0,5x + 1$$

Schritt 2:
Gleichsetzen der Funktionsterme.

Schritt 3:
Auflösen der Gleichung nach x.

Schritt 4:
Berechnen des Wertes der Funktionswerte des Schnittpunktes durch Einsetzen von x in eine der beiden Funktionsgleichungen. (Man verwendet die Funktionsgleichung, bei der der Rechenaufwand geringer ist.)

Wert: $y = -2 \cdot 0,8 + 3 = 1,4$ $S(0,8 / 1,4)$

Aufgabe 3.4

Nullstellen kann man als Schnittpunkt der Geraden mit der x-Achse betrachten. Da die x-Achse die Funktionsgleichung $f(x) = 0$ hat, ergibt sich für die Bestimmung der Nullstellen der schon angeführte Ansatz $f(x) = 0$. Berechnen Sie die Nullstellen der Funktionen $g_1(x) = -2x + 3$ und $g_2(x) = 0,5x + 1$, und vergleichen Sie zur Probe die berechneten Werte mit der Zeichnung von Aufgabe 3.2 a).

Gerade $g_1(x)$

Gerade $g_2(x)$

Schritt 1: _____

Schritt 1: _____

Schritt _____

Nullstelle g_1 : $N_1(\quad / \quad)$

Nullstelle g_2 : $N_2(\quad / \quad)$

Aufgabe 3.5

Rechnerische Bestimmung der Gleichung einer Geraden aus zwei gegebenen Punkten oder Bedingungen

Beispiel 1:

Gegeben sind die Punkte $P(-2 / 3)$ und $Q(2 / 1)$

Schritt 1

Die x- und y-Koordinate des gegebenen Punkts notieren, bzw. bei zwei gegebenen Punkten denjenigen mit den einfacheren Zahlen auswählen. (Es spielt das Ergebnis keine Rolle, welchen Punkt man verwendet.)

$x = 2$

Schritt 2

Die Koordinaten von beiden Punkten in die Steigungsformel einsetzen und m berechnen oder den Wert von m aus in der Aufgabenstellung angegebenen Bedingung interpretieren.

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$= \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q}$

$= \frac{3 - 1}{-2 - 2}$

$= \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$

Schritt 3

Die allgemeine Geradengleichung $y = mx + c$ nach c umformen: $c = -mx$.

Da man die um Schritt 1 und 2 ermittelten Werte für y, m und x einsetzen kann, berechnen

$c = y - mx = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2 = 1 - (-1) = 2$

Schritt 4

Die gesuchte Gleichung ergibt sich, wenn man m und c in die allgemeine Form $y = mx + c$ einsetzt.

Funktion: $g(x) = -\frac{1}{2}x + 2$

Üb

Gegeben sind die Punkte A(3/2) und B(2/4).

$x = \quad$

$y = \quad$

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\quad - \quad}{\quad - \quad} = \quad$

$c = \quad$

Funktion: $g(x) = \quad$

b) Gegeben ist die Gerade $h(x) = -3x + 5$. Gesucht ist die zu h parallele Gerade $g(x)$ durch den Punkt $P(2/2)$.

$x =$ _____

$$y = \underline{\hspace{2cm}}$$
$$m = m_h = \underline{\hspace{2cm}}$$
$$c = y - mx = \underline{\hspace{2cm}}$$

Funktion: $g(x) = -3x + 8$

Hier ist die Information über die Steigung in der Angabe, dass die Gerade g **parallel** zur Geraden h sein soll, versteckt. Daher verwendet man den Ansatz: $m_h = m_g$.

c) Gegeben ist die Gerade $h(x) = -\frac{1}{5}x + 1$. Gesucht ist die zu $h(x)$ orthogonale Gerade $g(x)$ durch den Punkt $P(2/3, 5)$.

$x =$ _____

$$y = \underline{\hspace{2cm}}$$
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{10 - 0}{10 - 0} = 1$$

$C =$

Funktion: $g(x) = \frac{5}{4}x + 1$

Zusatzinfo:

Die zu $h(x)$ orthogonal verlaufende Gerade $g(x)$ wird auch als die **Normale** der Geraden $h(x)$ bezeichnet.

Hier ist die Information über die Steigung in der Angabe, dass die Gerade g **orthogonal** zur Geraden h sein soll, versteckt. Daher verwendet man den

Ansatz: $m_g = -\frac{1}{m_b}$.

d) Gesucht ist die Gleichung der Geraden $g(x)$ durch den Punkt $P(1|1)$.

$$m = -\frac{1}{m_{w1}} =$$
$$C = Y - P$$

Fu = _____

Halbierende

hat die Gleichung
 $f(x) =$ und damit
 die Steigung

e) Gesucht ist die zur zweiten Winkelhalbierenden parallel verlaufende Gerade $g(x)$ durch den Punkt $P(-1 / -3)$.

$x =$ _____

$$y = \underline{\hspace{2cm}}$$
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2}$$
$$c = y - mx = \underline{\hspace{2cm}}$$

Funktion: $g(x) =$ _____

Die zweite Winkelhalbierende hat die Punktgleichung $y = -x$ und damit die Steigung $m_{W2} = -1$.

Raum für Notizen

VOR
LehrerSe
schuldruckp

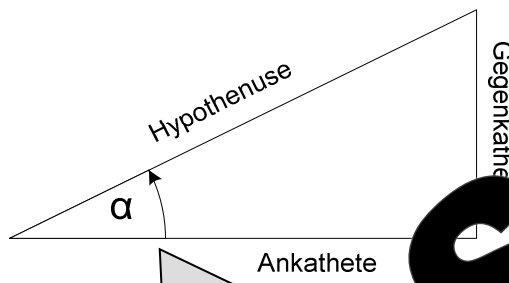
Ergänz

Aufgabe 3.6

Winkel bei Geraden

a) Wiederholung Winkelfunktionen am rechtwinkligen Dreieck

Recherchieren Sie die Definition von sin, cos und tan im rechtwinkligen Dreieck. Füllen Sie die entsprechenden Felder aus.

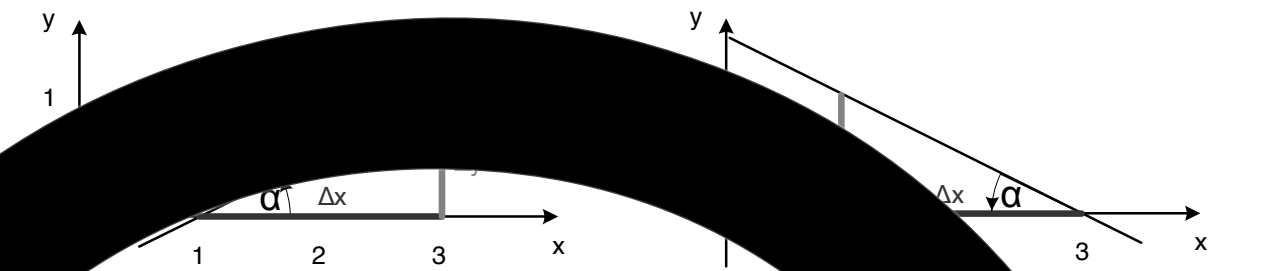


$\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$
 $\cos \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$
 $\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$

Die mathematische Orientierung eines Winkels.
 In der Mathematik hat ein Winkel eine Orientierung. Wird er von der Ankathete gegen den Uhrzeigersinn gemessen, so bezeichnet man diese Orientierung auch als **mathematisch positiv**.

b) Schnittwinkel von Geraden mit der x-Achse

Bei den beiden abgebildeten Geraden $f(x) = 0,5x - 1$ und $h(x) = -0,5x + 1,5$ stellt das eingezeichnete Steigungsdreieck jeweils ein rechtwinkliges Dreieck dar.



Ordnen Sie in den nebenstehenden Steigungsdreiecken Δy jeweils die Ankathete A_k und die Gegenkathete G_k zu und begründen Sie, ob die Steigungsgleichung gilt, wenn m die Steigung der Geraden ist.

$$\tan(\alpha) = m$$

Berechnen Sie

Der Zahlenwert von α lässt sich dann mit dem Taschenrechner und der Funktion $\tan^{-1}$ berechnen. (Bei den meisten Taschenrechnern über der $\tan$ -Taste mit shift oder inv.) (Auf dem Taschenrechner auf „deg“ einstellen).

Aus der Beziehung oben folgt: $\alpha = \tan^{-1}(m)$

für $h(x)$ gilt dann: $\alpha = \tan^{-1}(0,5) \approx 26,6^\circ$ und für $f(x)$ gilt: $\alpha = \tan^{-1}(-0,5) \approx -26,6^\circ$

Da man die Größe eines Winkels nicht als negativ angeben kann, kann man die Formel für die Berechnung des Schnittwinkels einer Geraden mit der x-Achse auch mit Betragstaschen versehen und den Winkel somit als positiven Wert angeben.

$$\text{Schnittwinkel } \alpha \text{ einer Geraden mit der x-Achse: } \alpha = |\tan^{-1}(m)|$$

Übung 3.3

Gegeben ist die Gerade $f(x) = -3x + 1$.
a) Berechnen Sie den Schnittwinkel der Geraden $f(x) = -3x + 1$ mit der x-Achse.

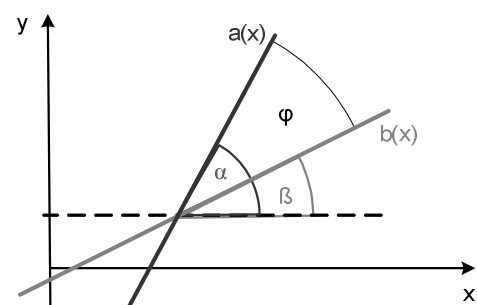
b) Begründen Sie anhand einer Skizze, dass es eine Gerade, welche die x-Achse unter einem Winkel von 7° schneidet, mit der y-Achse einen Winkel von $18,5^\circ$ einschließt.

Information 3.1

Schnittwinkel

Wenn zwei Geraden sich schneiden, entstehen paarweise zwei Winkel, die sich zu 180° ergänzen. Als Schnittwinkel bezeichnet man den kleineren der beiden Winkel, also den Winkel, der kleiner als 90° bezeichnet. Man kann die Schnittwinkel zwischen den Geraden mit Hilfe der Steigungswinkel berechnen.

a) Beide Geraden steigen oder fallen:

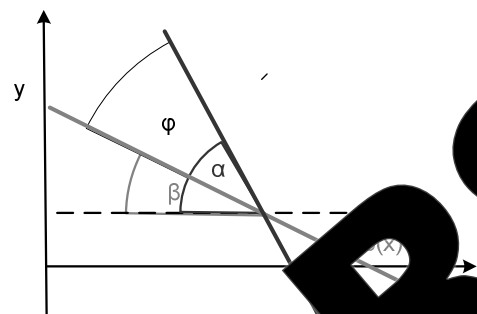


Man berechnet jeweils den Schnittwinkel α und β der beiden Geraden mit der x-Achse.

Der Schnittwinkel φ der beiden Geraden kann dann über die Differenz $\alpha - \beta$ berechnet werden.

Schnittwinkel zwischen $a(x)$ und $b(x)$

$$\varphi = \alpha - \beta$$



b) Eine Gerade fällt, die andere steigt

Man berechnet jeweils den Schnittwinkel α und β der beiden Geraden mit der x-Achse. Der Schnittwinkel φ der Geraden kann dann über die Summe der Beträge von α und β berechnet werden.

Schnittwinkel zwischen $a(x)$ und $b(x)$

$$\varphi = |\alpha| + |\beta|$$

Schnittwinkel zwischen $a(x)$ und $b(x)$

$$\varphi = 180^\circ - (|\alpha| + |\beta|)$$

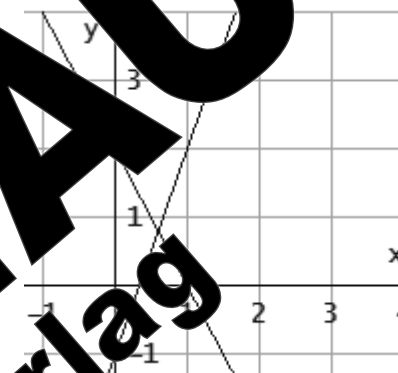
Übung 3.4

Gegeben sind die beiden Geraden

$$a(x) = -2x + 2 \text{ und } b(x) = 3x - 1$$

a) Zeigen Sie durch Rechnung, dass sich die Geraden unter einem Winkel von 45° schneiden.

b) Berechnen Sie, unter welchem Winkel die y-Achse von beiden Geraden geschnitten wird.



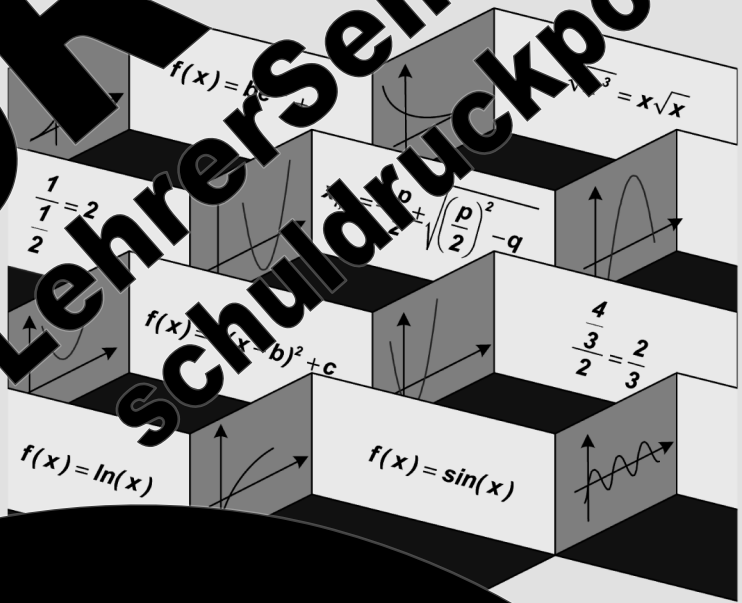
Ende Übungen:

Raum für Notizen:



Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Grundlegende
zu Algebra
und Funktionen
selbstorganisiert erlernen



Kapitel

Quadratische und biquadratische
Gleichungen und Ungleichungen



Kapitel 1	
Brüche, Potenzen, Wurzeln und Binome	9
Kapitel 2	
Grundlegendes zu Gleichungen	59
Kapitel 3	
Lineare Funktionen	63
Kapitel 4	
Quadratische und biquadratische Gleichungen und Ungleichungen	77
Kapitel 5	
Ganzrationale Funktion 2. Grades	87
Kapitel 6	
Gleichungen 3. und höherer Grades	104
Kapitel 7	
Ganzrationale Funktionen 2. und höherer Grades	115
Kapitel 8	
Die Hyperbelfunktion	127
Kapitel 9	
Trigonometrische Funktionen	135
Kapitel 10	
Exponential- und Logarithmusfunktionen	145
Kapitel 11	
Vertiefende Betrachtung von Betragsungleichungen	169

Gesamtwortmarken zu Algebra und Funktionen erlernen
(Bestandteile der Markierung sind durch die Rechte der Markierungsberechtigten vorbehalten. All rights reserved.
Dieses Werk, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet
SelbstVerlag
tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germany)
Lehrerselbstverlag.de
www.f-druck.de

Kapitel 4: Quadratische und biquadratische Gleichungen und Ungleichungen

In der Sekundarstufe I haben Sie bereits Lösungsverfahren für diese Gleichungen kennen gelernt. Sie wissen sicherlich, dass für die Lösung quadratischer Gleichungen die Formel des abc-Formel und die quadratische Ergänzung angewandt werden kann. Dieser Vorgehensweise ist nicht immer notwendig. Im Folgenden lernen Sie, wie man quadratische Gleichungen auf jeweils einfachsten und damit für Rechenfehler am wenigsten anfälligen Verfahren lösen kann.

Quadratische Gleichungen können in unterschiedlichen Darstellungsformen auftreten.

Allgemeine Form der quadratischen Gleichung in **polynomialer** Darstellung

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Der Begriff **polynomial** bedeutet, dass der Gleichungsterm aus einer Summe besteht, in der verschiedene Potenzen von x auftreten.

Allgemeine Form der quadratischen Gleichung in **faktorieller** Darstellung

$$a(x-b)(x-c) = 0$$

Der Begriff **faktoriell** bedeutet, dass der Gleichungsterm aus einem Produkt unterschiedlicher „Summen“ besteht.

Aufgabe 4.1

In den dieser Aufgabe werden Lösungsverfahren für quadratische und biquadratische Gleichungen in **polynomialer** Form behandelt. Bei einer quadratischen Gleichung können, müssen aber nicht immer, alle drei Summanden vorhanden sein. Der Summand bx und auch der Summand c können fehlen. Das wirkt sich auf das anzuwendende Lösungsverfahren aus. Im Folgenden werden die einzelnen Verfahren vorgestellt.

Aufgabe 4.1.1

Quadratische Gleichungen

Gegeben zu den Beispielen.

4.1.1

Der Summand bx fehlt und es kommt nur ein x^2 vor.

$$ax^2 + c = 0$$

$$ax^2 = -c$$

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Schritt 1: Gleichung auflösen

Schritt 2: Beim Ziehen der Wurzel darauf achten, dass sowohl positive und eine negative Wurzel herauskommen kann.

Ist der Ausdruck unter der Wurzel negativ, gibt es keine Lösung.

Begründung, warum es eine positive und eine negative Wurzel gibt.

$$\begin{aligned}
 x^2 &= t \\
 \Rightarrow \sqrt{x^2} &= \sqrt{t} \\
 \Rightarrow |x| &= \sqrt{t} \\
 \Rightarrow +x_1 &= \sqrt{t} \vee -x_1 = \sqrt{t} \\
 \Rightarrow x_1 &= +\sqrt{t} \vee x_1 = -\sqrt{t} \\
 \text{also } x &= \pm\sqrt{t}
 \end{aligned}$$

Wenn man aus der Lösungsvariablen die Wurzel zieht, muss man den Betrag beachten, da gilt: $(+x)^2 = x^2$ und $(-x)^2 = x^2$.

Wenn man die Wurzel zieht, muss man das Vorzeichen von dem x beachten, da gilt: $(+x)^2 = x^2$ und $(-x)^2 = x^2$.

Bringt man das Vorzeichen, so erhält man eine positive und eine negative Lösung für die Gleichung.

In den beiden folgenden Beispielen sind die Lösungen der Gleichung angegeben. Bestätigen Sie die angegebenen Lösungen durch die Rechnung.

Beispiel 1: $x^2 - 8 = 0$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{4} \quad L = \{\pm 2\}$$

Beispiel 2: $3x^2 + 6 = 0$

$$L = \{\}$$

Beispiel 3: $1 - (x - 1)^2 = 2x$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad L = \{0\}$$

Aufgabe 4.1.2

Quadratische Gleichungen der Form $ax^2 + bx = 0$

Lesen Sie die Information zum Lösen dieses Gleichungstyps, und wenden Sie den Lösungsweg auf die Aufgabenstellung von Beispiel 2 an.

Information 4.1.2

Der Summand ohne x fehlt.

Alle Terme mit x durch x teilen!

Ausklammern:

$$x(ax + b) = 0 \quad \text{oder} \quad ax + b = 0$$

Fallunterscheidung: Ein Produkt ist Null, wenn ein Faktor den Wert Null annimmt. Es gilt: $x = 0$ oder $ax + b = 0$.
Ist das x vor dem Null, so ist der Ausdruck in der Klammer immer Null.

Die zweite Lösung x_2 ergibt sich, indem man den Term in der Klammer Null setzt und die Gleichung nach x auflöst.

Die erste Lösung x_1 ist immer Null.

Beispiel 1: $3x^2 - 9x = 0$ Alles nach links bringen. Nicht durch x teilen!

$$\begin{aligned}
 3x^2 - 9x &= 0 \\
 x(3x - 9) &= 0 \\
 x_1 &= 0 \\
 3x - 9 &= 0 \\
 3x &= 9
 \end{aligned}$$

a) Berechnen Sie die Lösungsmenge der Gleichung. (Kontrollergebnis $x_1 = 0$; $x_2 = 4$)

b) Begründen Sie, warum man bei der Lösung der Gleichung nicht durch x teilen darf.

Aufgabe 4.1.3

Anwenden der pq-Formel bei quadratischen Gleichungen der Form $ax^2 + bx + c = 0$

Lesen Sie die Information, und arbeiten Sie anschließend die Beispiele durch. Ergänzen Sie die dabei fehlende Angaben. Auf die Anwendung der abc-Formel wird im Rahmen dieser Aufgabe verzichtet, da es für das Lösen von quadratischen Gleichung dieser Form ausreicht, eine pq-Formel zu kennen.

Information 4.1.3

Gesamte Gleichung und damit alle Summanden durch a teilen.

Vor dem x steht „nix“

Es ergibt sich aus $\frac{b}{a}$ und $\frac{c}{a}$ die pq-Formel

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Beispiele

a) $x^2 + 6x - 36 = 0$

$x^2 + 6x - 36 = 0$

$$x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 - (-36)} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 36} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{153}{4}} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{153}}{2}$$

$x_1 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{153}}{2} = 3$ $x_2 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{153}}{2} = -6$

$L = \{3; -6\}$

Anmerkung:

b) $x^2 - 4x + 4 = 0$ Lösungsmenge hier leer ist.

$2x - 4 = x^2$

$-x^2 + 2x - 4 = 0$

$x^2 - 2x + 4 = 0$

$x_{1,2} = \frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 - 4} = 1 \pm \sqrt{1 - 4} = 1 \pm \sqrt{-3}$

$L = \{\}$

Begründung:

c) Bestätigen Sie die Lösung $x = 3$ ergibt, indem sie fehlende Angaben ergänzen.

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-3}{2}\right)^2 - 9}$$

$$x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm 0$$

$$x_{1,2} = 3$$

$L = \{3\}$

Aufgabe 4.1.4

Lösen einer biquadratischen Gleichung der Form $ax^4 + bx^2 + c = 0$

Information 4.1.4

durch a dividieren; $p = \frac{b}{a}$ und $q = \frac{c}{a}$

Substitution: $x^4 = z^2$
 $x^2 = z$

$ax^4 + bx^2 + c = 0$

$z^2 + pz + q = 0$

pq-Formel für z

$z_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Zwei Lösungen für z

Da die Lösung der Variable x nicht in z rückt, muss die Substitution rückwärts gehen. $x^2 = z$

$x_{1,2} = \pm \sqrt{z_1}$

$x_{3,4} = \pm \sqrt{z_2}$

Es können bis zu vier Lösungen x_1, x_2, x_3 und x_4 entstehen.

Beispiel:

$$2x^4 - 6x^2 + 4 = 0$$

durch 2 dividieren

Substitution $x^4 = z^2$
 $x^2 = z$

$$z_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-3}{2}\right)^2 - 2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow z_1 = 1 \quad \wedge \quad z_2 = 2$$

$$z = 2$$

$$x_{3,4} = \pm \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \pm 1$$

Formel anwenden

Lösungen für z

Da die Substitution $z = x^2$ Lösung berechnen

$$\Rightarrow L = \{1, -1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$$

Aufgabe 4.1.5

Lösen einer quadratischen Gleichung in faktorisierter Form

Lesen Sie die Information, und bearbeiten Sie die Beispiele.

Auf keinen Fall die Klammern ausmultiplizieren!

Wenn die linke Seite einer Gleichung in Klammern x nur mit der Potenz vorkommt, nennt man die Klammern auch **Linearfaktoren**.

Fallunterscheidung:
Ein Produkt ist Null, wenn ein Faktor den Wert Null annimmt. D.h., entweder ist der Ausdruck in der ersten oder zweiten Klammer Null.

Den Inhalt jeder Klammer separat voneinander Null setzen und die entstehende Gleichung lösen. In der Regel braucht man gar nicht zu rechnen, sondern liest die Lösungen direkt aus den **Linearfaktoren** ab.

Beispiel:

a) $12(x+7)=0$
direktes Ablesen: $\Rightarrow x_1 = -4; x_2 = -7$

b) $(3x+6)(2x-1)=0$
 $3x+6=0 \Rightarrow x_1 = -2$
 $2x-1=0 \Rightarrow x_2 = 0,5$

c) $(x-5)^2=0$
 $x_{1,2} = 5$

d) $(x-5)(x-5)=0$
 $x_{1,2} = 5$

Der Vorfaktor 12 hat keinen Einfluss auf das Ergebnis, da man beide Seiten der Gleichung durch 12 dividieren kann.

Achtung!
Da man den Term $(x-5)(x-5)$ in der Form $(x-5)(x-5)$ schreiben kann, nennt man, dass die Lösung doppelt ist.

Achtung!
Hier geht keine Fallunterscheidung, da die rechte Seite des Gleichheitszeichens **keine 0** steht. Man muss die Klammern ausmultiplizieren. Zeigen Sie, dass die Gleichung ist.

Übung 4.1

Bestätigen Sie die angegebenen Lösungen der quadratischen und biquadratischen Gleichungen durch Rechnung.

- | | |
|--|------------------------|
| a) $5 - 3x^2 = 22$ | $L = \{ \}$ |
| b) $x^2 - 7x + 2 = 10$ | $L = \{1; 6\}$ |
| c) $(x+2)(x-5) = 0$ | $L = \{-2; 5\}$ |
| d) $(x+5)(x+4) = 20$ | $L = \{0; -9\}$ |
| e) $4x^2 + 12x = 0$ | $L = \{0; -3\}$ |
| f) $9x^2 + 12x + 4 = 0$ | $L = \{-2/3\}$ |
| g) $3x^2 = 5x$ | $L = \{0; 5/3\}$ |
| h) $0,5x^4 - x^2 = 0$ | $L = \{0\}$ |
| i) $x(2x+12) = 0$ | $L = \{0; -6\}$ |
| j) $7x^2 - 5x + 1 = 0$ | $L = \{1/2\}$ |
| k) $13x^2 + 12x + 4 = 0$ | $L = \{\pm 3; \pm 2\}$ |
| l) $x(8x^2 + 12x + 5) = 0$ | $L = \{0, 25; -0,5\}$ |
| m) $(2x+1)(3x+1) = 2$ | $L = \{1/6; -1\}$ |
| n) $4a^2 - 3(a^2 + 9) = 3a^2 + 9a$ | $L = \{0\}$ |
| o) $(x+4)^2(x-4)^2 = 0$ | $L = \{4; -4\}$ |
| p) $(x+2)^2(x-2)^2 = 9$ | $L = \{\pm 7; \pm 1\}$ |
| q) $(x+5)^2(x-5)^2 = 0$ | $L = \{ \}$ |
| r) $(x+5)^2 - c(2c+3) = c+1$ | $L = \{-5/6; 1/2\}$ |
| s) $(1+t)(2+t)(3+t) - (t-1)(t-2)(t-3) = 1$ | $L = \{6; 0\}$ |
| t) $(c+5)^2 - c(2c+3) = c+1$ | $L = \{2/7; -2\}$ |

Quadratische Gleichungen mit einem Parameter, also mit gehobenem Freiheitsgrad.

- | | |
|------------------|---------------------|
| v) $x^2 + 1 = 0$ | $L = \{b\}$ |
| w) $x^2 + 1 = 0$ | $L = \{-1/a; 1/a\}$ |
| x) $x^2 + 1 = 0$ | $L = \{-1; -1/a\}$ |

Aufgabe 4.2

Erweiternde Betrachtungen: Wurzelgleichungen

Gleichung so umformen, dass alle Ausdrücke mit Wurzel auf einer Seite stehen.

$$\sqrt{2x+5} - x = 1$$

$$\sqrt{2x+5} = x+1$$

$$(\sqrt{2x+5})^2 = (x+1)^2$$

$$2x+5 = x^2 + 2x + 1$$

$$x^2 = 4$$

$$x_1 = +2$$

Beide Seiten der Gleichung quadrieren. Binomisch auflösen!

Gleichung nach x auflösen.

Probe:

$$\sqrt{2 \cdot 2 + 5} - 2 = \sqrt{9} - 2 = 1 - 2 = -1 \neq 1 \Rightarrow x = 2 \text{ ist keine Lösung!}$$

$$\sqrt{2 \cdot (-2) + 5} - (-2) = \sqrt{1} - 2 = -1 - 2 = -3 \neq 1 \Rightarrow x = -2 \text{ ist keine Lösung!}$$

Wichtige Information:

Da Quadrieren eine Äquivalenzumformung ist, muss für Gleichungen, bei denen die Lösungen durch Quadrieren der Lösungsvariablen gefunden wurden, eine Probe durch einsetzen der Ergebnisse in die Ausgangsgleichung, vorgenommen werden. Lösungen der Gleichung sind nur die Ergebnisse, welche zu einer wahren Aussage führen.

Übung 4.2

Lösen Sie die folgenden Wurzelgleichungen in Ihrem Heft.

- a) $\sqrt{3x-2} = 5$

b) $\sqrt{3x-2} = x$

c) $\sqrt{8x+9} - x = -7$

f) $\sqrt{4(x+3)} = x$

g) $3x + \sqrt{4x-1} = 5$

h) $\sqrt{x+1} = x-1$
- L = {2}

L = {2;1}

L = {20}

L = {6}

L = {-2}

L = {0;8}

Aufgabe 4.3

Erweiternde Betrachtungen: Quadratische Ungleichungen und lineare Ungleichungen

Bei quadratischen Ungleichungen führt die Anwendung der p,q-Formel häufig zu Fehlern bei der Bestimmung der Lösungsmenge. Daher ist es günstig, wenn man hier die so genannte **quadratische Ergänzung** verwendet (Vgl. Kapitel 3, Aufgabe 4.2). Verdeutlichen Sie sich den Lösungsweg anhand der folgenden Beispiele.

Beispiel 1:

Für die quadratische Ergänzung wird der Teilterm $x^2 + 6x$ als Teil eines Binoms aufgeführt.

$$x^2 + 6x + 9 > 0$$

Schritt 1: Am besten, wenn man die **quadratische Ungleichung** so umformt, dass auf der linken Seite der Teil steht, den man zum Ergänzen möchte. Hier soll man also auf jeder Seite der Gleichung $+9$ addieren.

$$x^2 + 6x + 9 > 0 + 9$$

Schritt 2: In diesem Schritt führt man die quadratische Ergänzung durch. Man erhält auf der linken Seite ein Binom, wenn addiert wird. Dann addiert man hier auf jeder Seite der Gleichung -9 .

$$x^2 + 6x + 9 - 9 > -5 + 9$$

Schritt 3: Nun fasst man die linke Seite als Binom zusammen.

$$(x+3)^2 > 4$$

Schritt 4: Im nächsten Schritt zieht man auf beiden Seiten die Wurzel. Da man allerdings beachten muss, dass die Quadraterm, nämlich dem Quadrieren aus $(x+3)$ und $-(x+3)$ der rechten Seite der Ungleichung zunächst in Betragsstriche. Man erhält so zwei **lineare Ungleichungen**.

Schritt 5: Weglassen der Betragsstriche. Hier gilt in Gleichungen und Ungleichungen gilt folgende Regel.

Merke:

Beim Weglassen von Gleichungen oder Ungleichungen der Betragsstriche, indem man den Ausdruck in den Betragsstrichen in Klammern setzt und dann ein Minus (-) vor die Klammer schreibt, erhält man zwei lineare Ungleichungen.

$$+(x+3) > 2$$

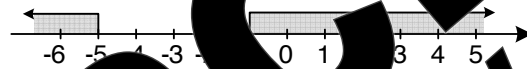
$$-(x+3) > 2$$

Schritt 6: Beide Gleichungen getrennt voneinander lösen.

$$x + 3 > 2 \quad \vee \quad -x - 3 > 2$$
$$ -x > 5$$

Lösung $x > -1 \quad \vee \quad x < -5$

Schritt 7: Darstellung der Lösungsmenge einer linearen Ungleichung am Zahlenstrahl.



Beispiel 2:

Beim Wurzelziehen der Betragsstriche und dann auf die positive und negative Lösung achten.

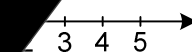
Linke Seite so umformen, dass eine Binom entsteht, indem auf beiden Seiten der Gleichung 2 addiert wird.

Für beide Ungleichungen x getrennt berechnen.

$$x^2 + 2x - 1 > 2$$
$$x^2 + 2x - 3 > 0$$
$$(x + 1) > \sqrt{4}$$
$$|x + 1| > 2 \Rightarrow \begin{cases} x + 1 > 2 \\ \text{oder} & -(x + 1) > 2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x + 1 > 2 \\ \text{oder} & -x - 1 > 2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x > 1 \\ \text{oder} & x < -3 \end{cases}$$

Wichtige Info!
Bei der Multiplikation oder Division mit einer negativen Zahl, wird das Relationszeichen umgedreht.

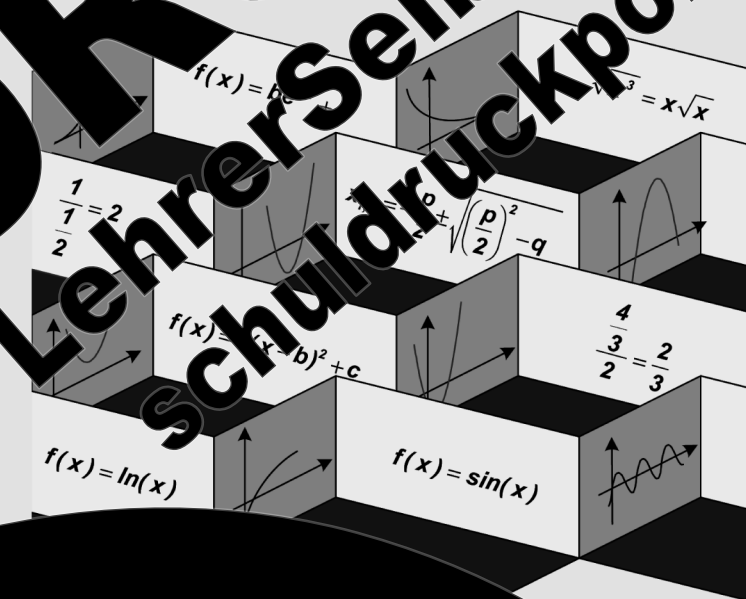
Zeichnen Sie die Lösungsmengen von Beispiel 2 aus Aufgabe 4.3 auf dem Zahlenstrahl dar.



Ergebnisse:

Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Grundlegende zu Algebra und Funktionen selbstorganisiert erlernen



Kapitel

Ganzrationale Funktion 2

Kapitel 1	
Brüche, Potenzen, Wurzeln und Binome	9
Kapitel 2	
Grundlegendes zu Gleichungen	59
Kapitel 3	
Lineare Funktionen	63
Kapitel 4	
Quadratische und biquadratische Gleichungen und Ungleichungen	77
Kapitel 5	
Ganzrationale Funktion 2. Grades	87
Kapitel 6	
Gleichungen 3. und höherer Grades	104
Kapitel 7	
Ganzrationale Funktionen 2. und höheren Grades	115
Kapitel 8	
Die Hyperbelfunktion	127
Kapitel 9	
Trigonometrische Funktionen	135
Kapitel 10	
Exponential- und Logarithmusfunktionen	145
Kapitel 11	
Vertiefende Betrachtungen zu Betragsungleichungen	169

Gesamtwortmarken zu Algebra und Funktionen ...
 (Bestandteile der ...)
 ... vorbehalten. All rights reserved.
 ... auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
 ... aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet
 ... SelbstVerlag
 ... & Freunde GmbH, Koblenz (Germ...
 ... Lehrerselbstverlag.de
 ... www.f-druck.de

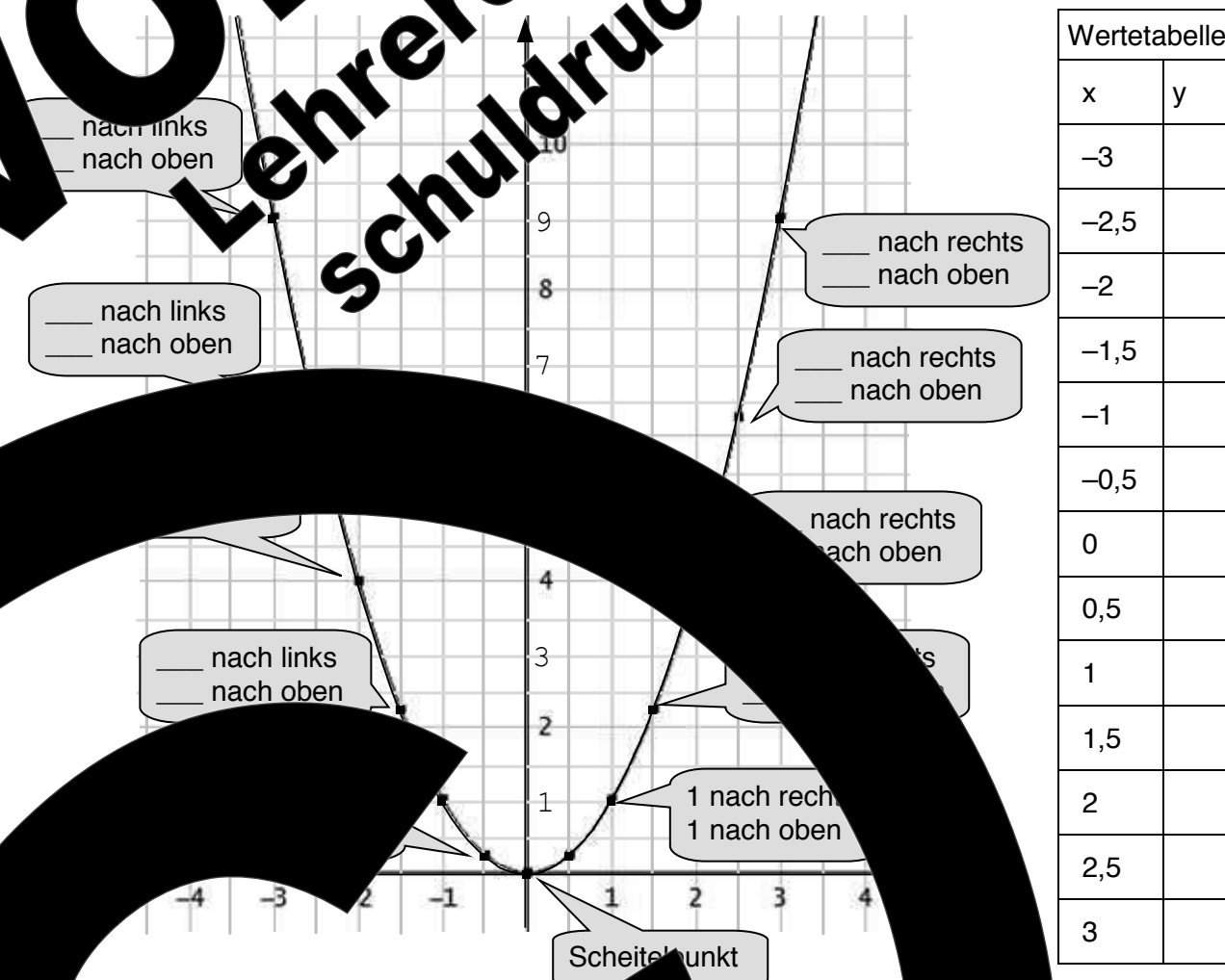
Kapitel 5: Ganzrationale Funktionen 2. Grades

Die wesentlichen Inhalte dieses Kapitels dürften Ihnen schon aus der Sekundarstufe 1 bekannt sein. Im Rahmen dieser Unterlagen sollen diese Kenntnisse wiederholt und vertieft werden. Insbesondere die Eigenschaften von Potenzfunktionen höheren Grades, also Funktionen, bei denen die Potenz von x größer als 2 ist, werden hier erweiternde Zusammenhänge erklärt. Am Ende dieses Kapitels finden Sie daher auch dann noch Aufgaben, wenn Sie der Meinung sind, dass Sie über ausreichende Kenntnisse zum Thema verfügen.

Aufgabe 5.1

Die Normalparabel $f(x) = x^2$

- Die y -Werte der Normalparabel entsprechen den Quadratzahlen. Ergänzen Sie die Wertetabelle ohne Verwendung des Taschenrechners.
- Um eine Normalparabel zu zeichnen, benötigt man keine Parabelschablone. Häufig verlangt eine Aufgabenstellung, dass eine einigermaßen genaue Skizze einer Normalparabel erstellt werden muss. Dazu genügt es, wenn man ausgehend vom Scheitelpunkt auf jeder Seite der x -Achse, je nach gefordertem Maßstab, zwei oder drei weitere Punkte der Parabel in das Koordinatensystem einträgt und die Punkte miteinander verbindet. Man muss sich dann, egal an welcher Stelle der Scheitelpunkt der Parabel liegt, nur vorstellen, wie die Punkte ausgehend vom Scheitelpunkt eingezeichnet werden. Ergänzen Sie die Wertetabelle und füllen Sie die fehlenden Werte in den Sprechblasen.



Aufgabe 5.2

Verschieben von Normalparabeln im Koordinatensystem

Für das Verschieben von Funktionen gibt es, unabhängig um welchen Typ von Funktion es sich handelt, weitgehend einheitliche Regeln. Im Rahmen dieser Aufgabe werden die Zusammenhänge beim Verschieben von Funktionen zunächst nur an der Parabel erläutert. In späteren Kapiteln, bei der Behandlung von Exponentialfunktionen und trigonometrischen Funktionen werden die hier gewonnenen Erkenntnisse zurückgegriffen. Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben vorher, auch wenn Sie schon Vorkenntnisse haben.

Information 5.1

Sie haben im Kapitel 4 gelernt, dass man quadratische Gleichungen sowohl in polynomialer als auch in faktorisierte Form darstellen kann. Dies gilt analog auch für den Funktionsterm von Parabeln. Hier kommt allerdings noch eine dritte Variante, die sogenannte Scheitelfunktform, vor. Allgemein kann man die Funktionsgleichung einer Parabel auf drei verschiedene Arten darstellen:

Darstellung in polynomialer Form: $f(x) = ax^2 + px + q$

Darstellung in faktorisierte Form: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

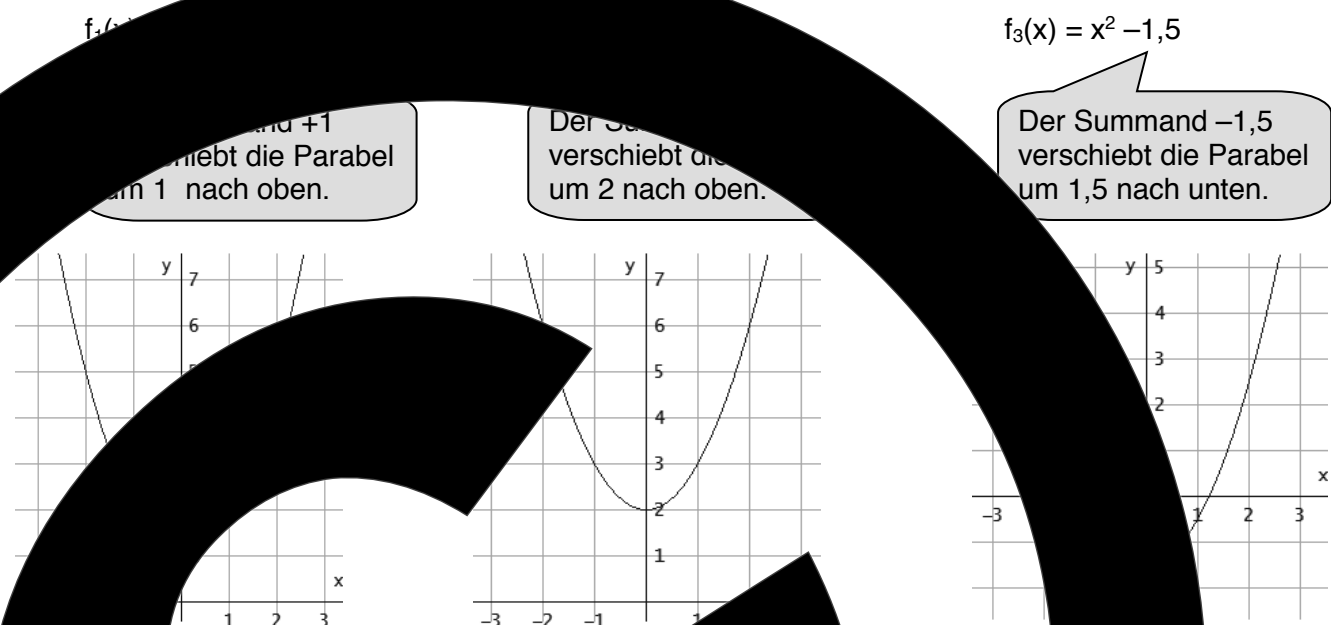
Darstellung in Scheitelfunktform: $f(x) = a(x - b)^2 + c$

Die Parameter a , b und c beeinflussen die Form und die Lage der Parabel im Koordinatensystem. Ihre Bedeutung in den einzelnen Darstellungsformen einer Parabelgleichung ist Gegenstand der nun folgenden Aufgabe 5.2.

Aufgabe 5.2.1

a) Verschieben von Parabeln nach oben und nach unten

Die folgenden Normalparabeln wurden mit Hilfe eines Graphikprogrammes gezeichnet.



Ergänzen Sie den Satz auf der folgenden Seite:

Addiert man zum Funktionsterm der Normalparabel $f(x)$ eine positive Zahl, so wird die Parabel nach _____ verschoben. Addiert man eine negative Zahl, so wird die Parabel nach _____ verschoben. Durch die Verschiebung entsteht eine neue Funktion.

Die verschobene Funktion soll mit $\tilde{f}(x)$ (sprich F-tilde von x) bezeichnet werden. Allgemein gilt:

$$\tilde{f}(x) = f(x) + c \quad \text{mit} \quad \begin{cases} c > 0: \text{verschieben in positiver Richtung nach oben} \\ c < 0: \text{verschieben in negativer Richtung nach unten} \end{cases}$$

b) Nullstellenberechnung für verschobene Normalparabeln

Im Kapitel 4 haben Sie gelernt, dass Nullstellen von Geraden mit Hilfe des Ansatzes $f(x) = 0$ berechnet werden. Dies gilt allgemein für alle Funktionstypen, also auch für Parabeln. Weisen Sie durch Rechnung nach, dass sich für die oben gezeichneten Funktionen folgende Nullstellen ergeben.

$f_1(x) = x^2 + 1$	$f_2(x) = x^2 + 2$	$f_3(x) = x^2 - 1,5$
$f_1(x) = 0$	$f_2(x) = 0$	$f_3(x) = 0$
$\Rightarrow x^2 + 1 = 0$	$\Rightarrow x^2 + 2 = 0$	$\Rightarrow x^2 - 1,5 = 0$
$\Rightarrow \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$	$\Rightarrow \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$	$\Rightarrow \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$
$\Rightarrow \underline{\hspace{1cm}} = \pm\sqrt{\hspace{1cm}}$	$\Rightarrow \underline{\hspace{1cm}} = \pm\sqrt{\hspace{1cm}}$	$\Rightarrow \underline{\hspace{1cm}} = \pm\sqrt{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$

Nullst. $N_1(1,22/0), N_2(-1,22/0)$

Darstellung der Funktionsterme in polynomialer und Scheitelfunktform

(1) Polynomiale Form

- $f_1(x) = x^2 + 1$

Am Summanden ohne x liest man die y -Koordinate bzw. hier den y -Achsenabschnitt der Parabel ab. Bei Geraden ist dies der y -Achsenabschnitt, wie bei Geraden. Einsetzen von 0 in den Funktionsterm liefert also mit $f(0)$, berechnet wird.

(2) **Faktorierte Form**

- $f_1(x)$ lässt sich nicht faktorisieren.
- $f_2(x)$ lässt sich nicht faktorisieren.
- $f_3(x) = (x + \sqrt{1,5})(x - \sqrt{1,5})$ Faktorisieren durch Anwendung der binomischen Formel (Vgl. Kapitel 1 Aufgabe 4.1.5)

Diese Klammer enthält die Nullstelle $x_2 = -\sqrt{1,5} \approx -1,22$

Die Summen $\pm\sqrt{1,5}$ in den Linearfaktoren entsprechen den Nullstellen. D.h., aus der faktorierten Form kann man direkt die Nullstellen einer Funktion ableiten.

Zur Erinnerung:
Der Ansatz $f(x) = 0$ für die Berechnung der Nullstellen liefert die Gleichung $(x + \sqrt{1,5})(x - \sqrt{1,5}) = 0$
mit den Lösungen $x_{1,2} = \pm\sqrt{1,5}$.
(Vgl. Kapitel 1 Aufgabe 4.1.5)

Aufgabe 2.2

a) Verschieben von Parabeln nach links und rechts

$f_1(x) = (x - 1)^2$
oder $f(x) = (x - (+1))^2$

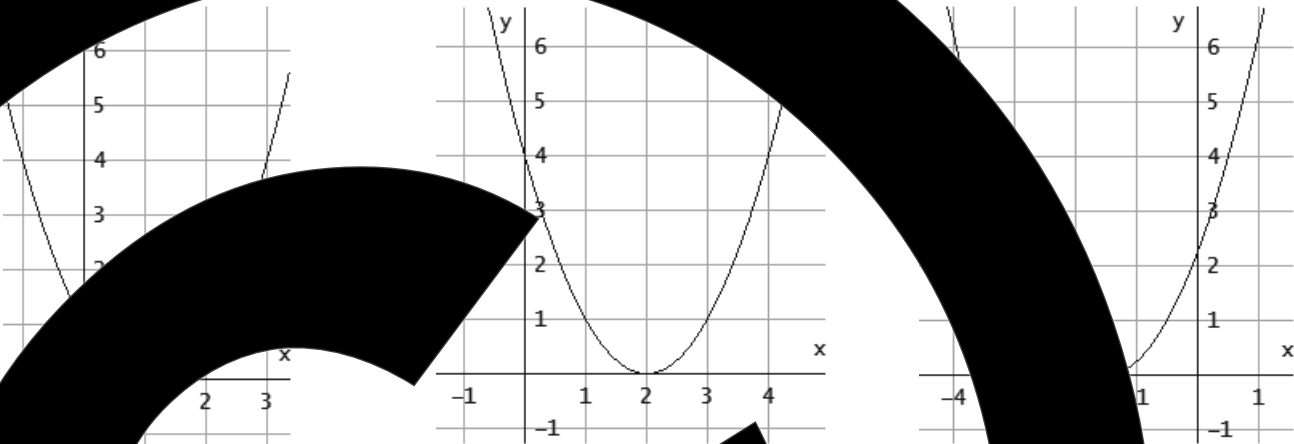
$f_2(x) = (x - 2)^2$
oder $f(x) = (x - (+2))^2$

$f_3(x) = (x + 1,5)^2$
oder $f(x) = (x - (-1,5))^2$

Subtrahiert man von x die Zahl +1, wird die Parabel um 1 nach rechts verschoben.

Subtrahiert man von x die Zahl +2, wird die Parabel um 2 nach rechts verschoben.

Subtrahiert man von x die Zahl (-1,5) wird die Parabel um 1,5 nach links verschoben.



Wie den Satz auf der folgenden Seite

Subtrahiert man vom Argument* x der Normalparabel $f(x)$ eine positive Zahl, so wird die Parabel nach _____ verschoben. Subtrahiert man vom Argument x eine negative Zahl, wird die

Parabel nach _____ verschoben. Durch die Verschiebung entsteht eine neue Funktion.

Die verschobene Funktion soll wieder mit $\tilde{f}(x)$ (sprich: f-tilde) bezeichnet werden.

Allgemein gilt:

$$\tilde{f}(x) = f(x - b)$$

mit

$b > 0$: verschoben in positiver Richtung nach **rechts**
 $b < 0$: verschoben in negativer Richtung nach **links**

***Anmerkung:** der Ausdruck, der bei der Funktionsschreibweise $f(x)$ in der Klammer steht, wird als Argument der Funktion bezeichnet.

b) Nullstellen berechnen bei den verschobenen Parabeln

Wie man bereits gelernt, dass das Verfahren zur Nullstellenbestimmung von Geraden auf nach oben und unten verschobene Parabeln übertragen werden kann. Verdeutlichen Sie sich, dass die Nullstellen bei nach links und rechts verschobenen Parabeln genauso berechnet werden und ergänzen Sie fehlende Angaben.

$f_1(x) = (x-1)^2$

$f_1(x) = 0$

$\Rightarrow (x-1)^2 = 0$

$\Rightarrow x_{1,2} = \dots$

$f_2(x) = (x-2)^2$

$f_2(x) = 0$

$\Rightarrow (x-2)^2 = 0$

$f_3(x) = (x + 1,5)^2$

$f_3(x) = 0$

$\Rightarrow \dots = 0$

$\Rightarrow \dots = \dots$

$N_{1,2}(\dots / \dots)$

Wichtige Info!

Bei der Berechnung der Nullstellen einer Parabel führt die Lösung der Gleichung zweimal das gleiche Ergebnis hervor. Spricht man von **doppelten Nullstellen**. Geometrisch bedeutet das, dass der Scheitelpunkt der Parabel auf der x-Achse liegt. Damit ist der gemeinsame Punkt von der Parabel und der x-Achse kein Schnittpunkt, sondern ein **Berührungspunkt**. Wie Sie das sehen, dass dies auch für andere Funktionen gilt.

c) Darstellung der Funktionsterme in polynomialer und faktorisierter Form

(1) Polynomiale Form

- $f_1(x) = (x - 1)^2 = \underline{\hspace{1cm}} - \underline{\hspace{1cm}} + 1$
- $f_2(x) = (x - 2)^2 = \underline{\hspace{1cm}} - \underline{\hspace{1cm}} + 4$
- $f_3(x) = (x + 1,5)^2 = \underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}} + 2,25$

(2) Faktorisierte Form:

- $f_1(x) = (x - 1) (x - 1)$
- $f_2(x) = (x - 2) (x - 2)$
- $f_3(x) = (x + 1,5) (x + 1,5)$

Anhand der polynomialen Darstellung kann man den Scheitelpunkt und den Schnittpunkt der Parabel ablesen.

Wenn man die Nullstellen der Funktion in die faktorisierte Form einsetzt, erkennt man, dass man die Nullstellen der Parabel aus der faktorisierten Form ablesen kann.

Aufgabe 5.2

a) Gleichzeitiges Verschieben einer Parabel nach links bzw. rechts und oben bzw. unten

Sie haben in 5.3.1 und 5.3.2 gelernt, wie man Parabel nach unten und oben sowie links und rechts verschieben kann. In dieser Aufgabe werden diese Erkenntnisse gleichzeitig verwendet, so dass die folgenden Funktionsgleichungen und die abgebildeten Funktionen entstehen. Ergänzen Sie die Sprechblöcke und die Koordinaten der Scheitelpunkte.

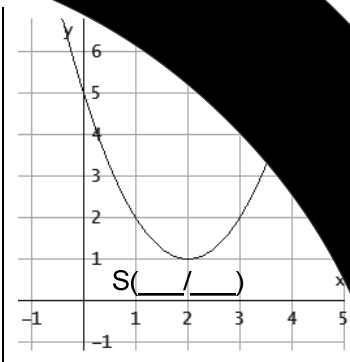
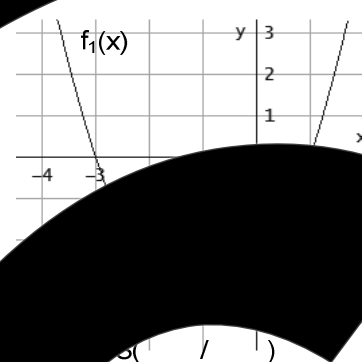
$$f_1(x) = (x + 1)^2 - 4$$

$$f_2(x) = (x - 2)^2 + 1$$

Verschiebung um $\underline{\hspace{1cm}}$ nach $\underline{\hspace{1cm}}$

Verschiebung um $\underline{\hspace{1cm}}$ nach $\underline{\hspace{1cm}}$

Verschiebung um $\underline{\hspace{1cm}}$ nach $\underline{\hspace{1cm}}$



Die Koordinaten der Scheitelpunkte erscheinen bereits in der Funktionsgleichung. Man nennt diese Parameter der Funktionsgleichung einer Parabel daher **Scheitelpunkt**.

Verallgemeinerung der Zusammenhänge:

Ergänzen Sie: Für die Verschiebung in $\underline{\hspace{1cm}}$ -Richtung gilt die Beziehung $\tilde{f}(x) = f(x) + c$, wobei der Parameter $\underline{\hspace{1cm}}$ angibt, wie weit die Parabel ausgehend vom Ursprung $\underline{\hspace{1cm}}$ links oder $\underline{\hspace{1cm}}$ verschoben wird.

Aus der x-Koordinate des Scheitelpunkts folgt: Bei $f_1(x)$ ist $\underline{\hspace{1cm}}$, bei $f_2(x)$ ist $b = \underline{\hspace{1cm}}$.

Die Variable c in der Beziehung $\tilde{f}(x) = f(x) + c$ legt die Verschiebung in $\underline{\hspace{1cm}}$ -Richtung fest. Aus der y-Koordinate der Scheitelpunkte folgt: Bei $f_1(x)$ ist $c = \underline{\hspace{1cm}}$ und bei $f_2(x)$ ist $c = \underline{\hspace{1cm}}$.

Allgemein kann man daher den Term einer Normalparabel, die gleichzeitig in x- und y-Richtung verschoben wird in der Scheitelpunktform mit $\tilde{f}(x) = f(x) + c$ angeben.

b) Nullstellenbestimmung

Bestätigen Sie durch Rechnung die Existenz bzw. Lage von Nullstellen bei den abgebildeten Parabeln.

$$f_1(x) = (x + 1)^2 - 4$$

$$f_2(x) = (x - 2)^2 + 1$$

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 0 \\ (x + 1)^2 - 4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(x) &= 0 \\ (x - 2)^2 + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Nullstellen: $N_1(1 / 0)$ und $N_2(-3 / 0)$

c) Vergleich der Funktionen

$$(1) \quad \tilde{f}(x) = f(x) + c$$

$$f_1(x) = (x + 1)^2 - 4$$

$$f_2(x) = (x - 2)^2 + 1$$

Ablezen der Koordinaten des Scheitelpunkts $S(\underline{\hspace{1cm}} / \underline{\hspace{1cm}})$

(2) Polynomiale Form $f(x) = x^2 + px + q$

- $f_1(x) = x^2 + 2x - 3$
- $f_2(x) = x^2 - 4x + 5$

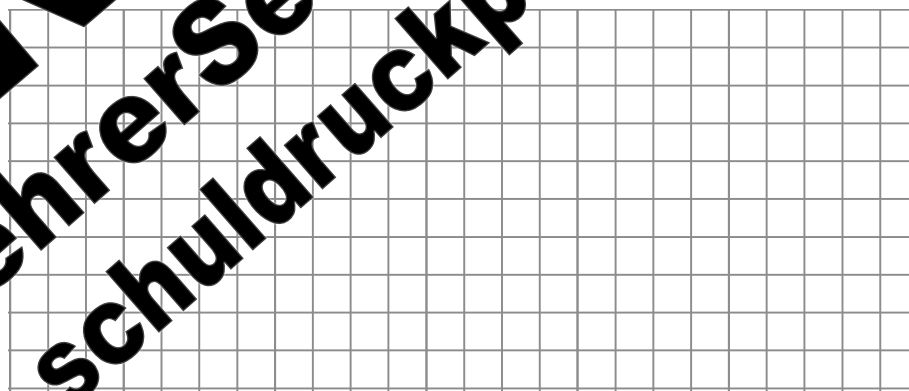
Ablezen des y-Achsenabschnitts.

(2) Faktorierte Form $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)$

- $f_1(x) = (x - 1)(x + 3)$

Erinnerung: Die Linearfaktoren enthalten $x_1 = 1$ und $x_2 = -3$ als Nullstellen der Funktion.

Überprüfen Sie die Ausmultiplikation des Terms $(x - 1)(x + 3)$, dass dieses Produkt der polynomen Darstellung von $f_1(x)$ entspricht.



- $f_2(x)$ lässt sich faktorisieren

Wenn eine Funktion nicht in Linearfaktoren gegeben ist, kann man sie nicht in Linearfaktoren zerlegen, da man Nullstellen nicht ablesen kann.

Aufgabe 5.2.4

Parabeln strecken oder stauchen

a) Zusammenhänge beim Strecken und Stauchen der Normalparabel

Die folgende Abbildung zeigt gestreckte und gestauchte Parabeln, die nach oben bzw. nach unten geöffnet sind. Verdeutlichen Sie sich den Zusammenhang zwischen Streckungs- bzw. Stauchungsfaktor a und der Form der Parabel, und ergänzen Sie den folgenden Satz.



Nach einem Parameter a , so erhält man die

oben geöffnete Parabel

Die Parabel wird gestreckt, wenn gilt: $a > \underline{\hspace{1cm}}$

Die Parabel wird gestaucht, wenn gilt: $\underline{\hspace{1cm}} < a < \underline{\hspace{1cm}}$

Nach unten geöffnete Parabel

Die Parabel wird gestreckt, wenn gilt: $a > \underline{\hspace{1cm}}$

Die Parabel wird gestaucht, wenn gilt: $\underline{\hspace{1cm}} < a < \underline{\hspace{1cm}}$

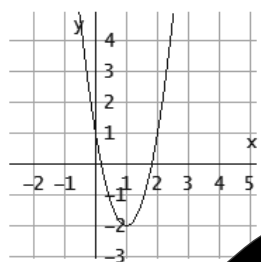
Die Parabel wird an der x-Achse gespiegelt und gestreckt, wenn gilt: $a > \underline{\hspace{1cm}}$

Die Parabel wird an der x-Achse gespiegelt und gestaucht, wenn gilt: $\underline{\hspace{1cm}} < a < \underline{\hspace{1cm}}$

b) Zusammenhänge beim Strecken oder Stauchen verschobener Normalparabeln.

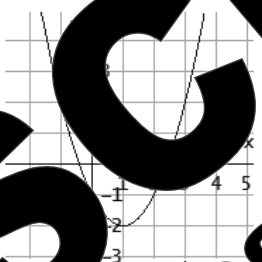
Die folgende Abbildung zeigt verschobene, gestreckte bzw. gestauchte Normalparabeln, die nach oben und unten geöffnet sind und alle den Scheitelpunkt $S(1|-2)$ haben. Diese Parabeln werden auch als **ganzrationale Funktionen 2. Grades** bezeichnet. Verdeutlichen Sie den Zusammenhang zwischen dem Streckungs- bzw. Stauchungsfaktor a und der Parabel, und ergänzen Sie den folgenden Satz.

$$f(x) = 3(x - 1)^2 - 2$$



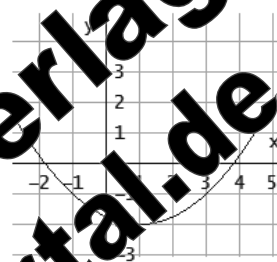
gestreckte verschobene Normalparabel

$$f(x) = (x - 1)^2 - 2$$



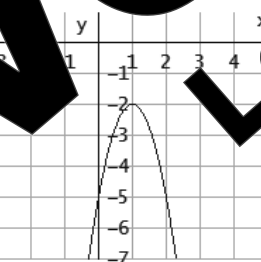
Verschobene Normalparabel

$$f(x) = 0,25(x - 1)^2 - 2$$



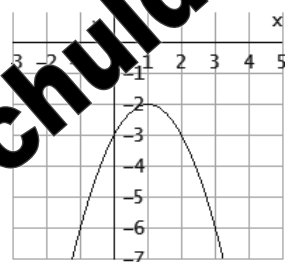
gestauchte verschobene Normalparabel

$$f(x) = -2(x - 1)^2 - 2$$

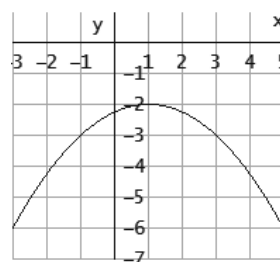


gestreckte verschobene Normalparabel nach unten geöffnet

$$f(x) = -(x - 1)^2 - 2$$



$$f(x) = -0,25(x - 1)^2 - 2$$



gestauchte verschobene Normalparabel nach unten geöffnet bzw. Spiegelung an der Geraden $y = -2$

Um die Öffnungsrichtung einer verschobenen Parabel zu ändern, bspw. eine verschobene Parabel zu strecken oder zu stauchen, verändert man die Klammer in der Scheitelpunktform der Parabel $f(x) = a(x - b)^2 + c$. Die Klammer wirkt wie beim Strecken oder Stauchen von Normalparabeln. Bei einem negativen a ist die Parabel nach unten geöffnet. Ein Vorzeichenwechsel von a spiegelt eine Spiegelung an einer Geraden durch den Scheitelpunkt $S(b|c)$ vor.

Information 5.2

Überblick Darstellungsformen der Funktionsgleichung ganzrationaler Funktionen 2. Grades

Darstellung in Scheitelpunktform:

$$f(x) = a(x - b)^2 + c$$

a streckt, staucht und ändert die Öffnungsrichtung bzw. spiegelt die Parabel an der Geraden $y = c$.

b verschiebt die Parabel nach links und rechts.

c verschiebt die Parabel nach oben und unten.

Bei verschobenen Normalparabeln, also bei einem Streckfaktor $a = 1$, kann man die Funktionsgleichung für abgewinkelte Parabeln besonders einfach bestimmen. Man entnimmt den Koordinaten des Scheitelpunktes die Werte b und c und setzt die beiden Werte direkt in die Formel $f(x) = (x - b)^2 + c$ ein.

Um die Funktionsgleichung in der Scheitelpunktform in die Normalform zu überführen, rechnet man das Polynom in die Scheitelpunktform um.

Wenn die Parabelgleichung in der Normalform vorliegt, so kann man die Scheitelpunktform mit Hilfe der quadratischen Ergänzung ermitteln.

Beispiel 1:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 6x + 2 \\ f(x) &= x^2 + 6x + 9 - 9 + 2 \\ f(x) &= (x^2 + 6x + 9) - 9 + 2 \\ f(x) &= (x + 3)^2 - 7 \end{aligned}$$

Quadratische Ergänzung

$x^2 + 6x$ wird durch Addition von 9 zum Binom ergänzt. Damit kein Fehler entsteht, wird 9 sofort wieder subtrahiert. Den Teilterm der faktorisiert werden soll in Klammern setzen und dann umformen.

Beispiel 2:

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x^2 - 6x + 9) - 9 - 2 \\ f(x) &= -(x^2 - 6x + 9) - 11 \\ f(x) &= -(x - 3)^2 - 11 \end{aligned}$$

Bei einer nach unten geöffneten Parabel muss man bei der quadratischen Ergänzung das Vorzeichen beachten. Sonst gilt das gleiche wie in Beispiel 1.

Die Normalform lautet:

$$f(x) = ax^2 + px + q$$

a entspricht dem Streckfaktor bzw. Stauchfaktor der Scheitelpunktform.

Der Summenkoeffizient p gibt den y-Achsenabschnitt an. Mit den Koordinaten $(x_1|0)$ und $(x_2|0)$ hat die Funktion die Nullstellen x_1 und x_2 , so enthält q das Produkt $x_1 \cdot x_2$.

Darstellung in faktorisierter Form: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

a entspricht dem Streckfaktor bzw. Stauchfaktor der Scheitelpunktform.

und x_2 sind die Nullstellen der Funktion mit den Koordinaten $N_1(x_1/0)$ und $N_2(x_2/0)$.

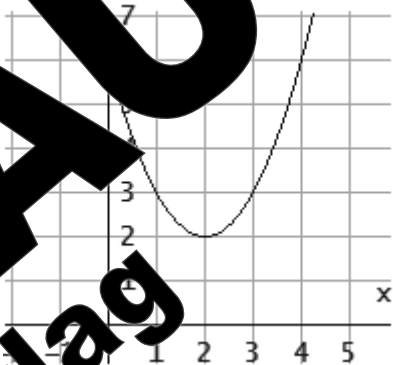
Übungen

Ü5.1
Bei einer verschobenen Normalparabel sind die Nullstellen und die Öffnungsrichtung bekannt. Ermitteln Sie jeweils die Funktionsgleichung in Scheitelpunktform, faktorisierter sowie in polynomialer Darstellung.

- a) $N_1(-2/0)$ und $N_2(4/0)$ nach oben geöffnet. (Kontrollergebnis: $f(x) = (x - 1)^2 - 9$)
b) $N_1(-4/0)$ und $N_2(2/0)$ nach unten geöffnet. (Kontrollergebnis: $f(x) = -(x + 2)^2 + 16$)
c) $N_1(0/5)$ und $N_2(5/0)$ nach unten geöffnet. (Kontrollergebnis: $f(x) = -x^2 + 10x - 25$)

Ü5.2
Gegeben ist die rechts abgebildete verschobene Normalparabel.

- a) Ermitteln Sie die Funktionsgleichung dieser Parabel in Scheitelpunktform, und zeigen Sie, dass für die polynomiale Darstellung gilt: $f(x) = x^2 - 4x + 6$
b) Begründen Sie anhand einer Rechnung und anhand des Funktionsgraphen, dass keine faktorisierte Funktionsgleichung existiert.



Aufgabe 5.3
Lagebeziehungen von Parabel und Gerade

Gegeben sind die Parabel $f(x) = (x-1)^2 + 1$ sowie die Geraden $g(x) = x+2$, $h(x) = x-2$ und $k(x) = 2x-2$. Lässt man die drei Funktionen per Computer zeichnen, erhält man folgende Abbildung.



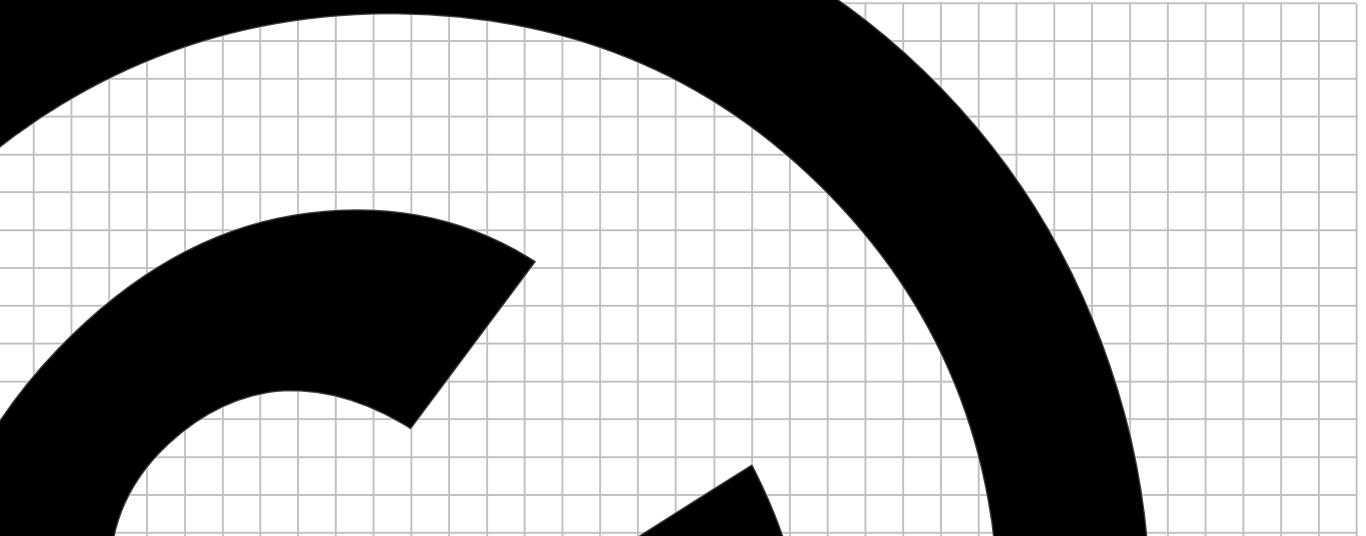
Übungen

Ü5.3
Berechnen Sie die Schnittpunkte der drei Geraden mit der Parabel.



Ü5.3
Zeichnen Sie zu jeder Aufgabe die Parabel und die Geraden in ein gemeinsames Koordinatensystem. Entscheiden Sie dann aufgrund der Zeichnung, ob die Geraden Sekanten, Tangenten oder Passanten sind. Überprüfen Sie diese Ergebnisse jeweils durch Berechnung und ggf. mit Hilfe eines geeigneten Programms zum Zeichnen von Funktionen.

- a) $f(x) = (x + 2)^2 - 1$ $h(x) = x - 2$ $k(x) = -2x - 8$
b) $f(x) = (x - 3)^2 + 3$ $h(x) = x + 3$ $k(x) = 0,5x - 5$





Ü5.5

Wenn man bei der Berechnung von Schnittpunkten die pq- Formel anwendet, erhält man:

- (3) Eine Parabel und eine Gerade haben zwei Schnittpunkte, wenn bei der pq- Formel _____ unterschiedliche Lösungen erhält.
- (4) Eine Parabel und eine Gerade haben einen Berührungspunkt, wenn bei der pq- Formel eine _____ unter der Wurzel auftritt und man dann _____ (doppelte) Lösung erhält.
- (5) Eine Parabel und eine Gerade haben _____ gemeinsame Punkte, wenn der Ausdruck unter der Wurzel bei der pq- Formel _____ ist und man sonst _____ Lösung erhält.

Ü5.6

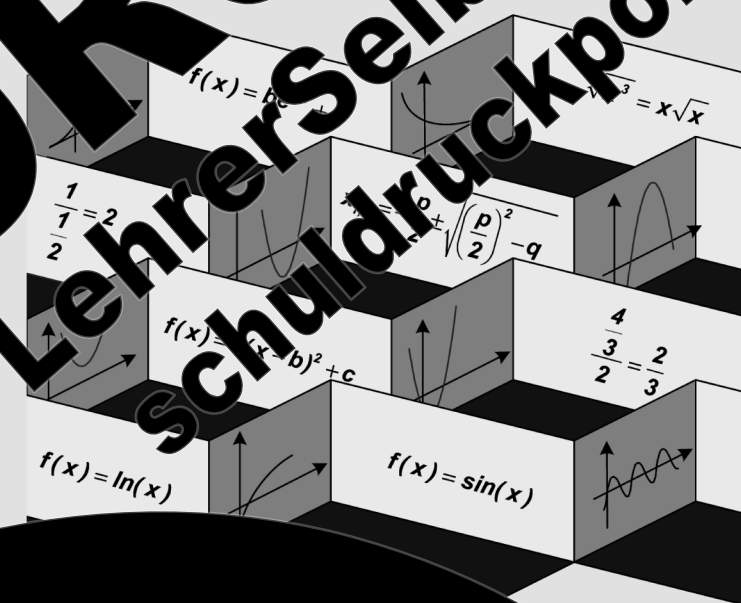
Gegeben seien die Parabel $p(x) = -x^2 + 6$ und die Gerade $g(x) = x - 5$. Bestimmen Sie die Schnittpunkte S_1 und S_2 der Parabel und der Geraden. Ermitteln Sie die Gleichungen $g_1(x)$ und $g_2(x)$ der zu $g(x)$ senkrechten Geraden g_1 und g_2 .



VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Grundlegende zu Algebra und Funktionen selbstorganisiert erlernen



Kapitel

Gleichungen 3. und
n-ten Grades

Kapitel 1	
Brüche, Potenzen, Wurzeln und Binome	9
Kapitel 2	
Grundlegendes zu Gleichungen	59
Kapitel 3	
Lineare Funktionen	63
Kapitel 4	
Quadratische und biquadratische Gleichungen und Ungleichungen	77
Kapitel 5	
Ganzrationale Funktion 2. Grades	87
Kapitel 6	
Gleichungen 3. und höherer Grades	104
Kapitel 7	
Ganzrationale Funktionen 3. und höherer Grades	115
Kapitel 8	
Die Hyperbelfunktion	127
Kapitel 9	
Trigonometrische Funktionen	135
Kapitel 10	
Exponential- und Logarithmusfunktionen	145
Kapitel 11	
Vertiefende Betrachtung von Betragsungleichungen	169

VORSCHAU
 LehrerselbstVerlag
 schuldruckportal.de

Gesamtwortmarken zu Algebra und Funktionen ... erlernen
 (Bestandteile des Buches)
 Sämtliche Rechte vorbehalten. All rights reserved.
 Nachdruck, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
 aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet
 LehrerselbstVerlag
 Druck & Freunde GmbH, Koblenz (Germany)
 www.f-druck.de

Kapitel 6: Gleichungen 3. und höheren Grades

Die Lösungsverfahren für Gleichungen 3. und höheren Grades bauen auf den Kenntnissen zum Umgang mit quadratischen Gleichungen auf. Es kommen hier, bis auf das neu zu erlernende Verfahren der Polynomdivision grundsätzlich die gleichen Lösungsverfahren zur Anwendung.

Aufgabe 6.1

Lösen einer Gleichung höheren Grades, die in faktorisierte Form vorliegt

$$a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n) = 0$$

Lösung durch Ablesen:
 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$

Wie Sie bereits wissen, soll man die Klammern für das Lösen der Gleichung nicht auflösen, sondern kann die Lösungen jeweils aus den Klammern bestimmen. (Vgl. Kapitel 4, Aufgabe 4.1.5 und Kapitel 5, Aufgabe 5.2.1 und 5.2.3 c))

Beispiel:

Ermitteln Sie die Lösungen der Gleichung

$$(x - 7)(x + 3)(x^2 + 3x - 10)(x^2 + 9) = 0$$

Man erhält $x_1 = 7$ durch Ablesen

2. Klammer $(2x + 4) \Rightarrow x_2 = -2$ Berechnung $2x + 4 = 0$.

3. Klammer $(x^2 - 1) \Rightarrow x_3 = 1$ Anwendung der 3. binomischen Formel, also $(x^2 - 1) = (x + 1)(x - 1)$, liefert 2 Lösungen.

4. Klammer $(x^2 + 9)$ kommt auf Grund des Quadrates nicht in Betracht, da es zwei gleiche Lösungen.

5. Klammer $(x^2 + 3x - 10) \Rightarrow x_7 = 2, x_8 = -5$ Der Ansatz $x^2 + 3x - 10 = 0$ führt zu einer quadratischen Gleichung, die mit Hilfe der p,q-Formel gelöst wird.

6. Klammer $(x^2 + 9)$ führt zu einem Widerspruch, da die Gleichungen $x^2 = -9$ keine reellen Lösungen haben.

Aufgabe 6.2

Lösen einer Gleichung, bei der man x^n ausklammern kann.

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 = 0$$
$$x^2(ax^2 + bx + c) = 0$$

Kleinste Potenz ausklammern

$$x_{1,2} = 0$$

Lösungen getrennt schreiben

oder $ax^2 + bx + c = 0$ (nach Potenzen auflösen)

Übungen

Ü6.1

Berechnen Sie die Lösungen der folgenden Gleichungen. Achten Sie dabei insbesondere auf die Bedeutung von geraden und ungeraden Potenzen bei der Lösungsvariablen für das Ergebnis.

- a) $x^2 = 25$ b) $169 + 12x + x^2 = 0$ c) $x^2 = 6x$ d) $x^2 + 7x = 0$
e) $x^3 = 81x$ f) $x^3 + 144x = 0$ g) $x^4 = 27x$ h) $x^4 + 64x = 0$
i) $x^5 = 81x$ j) $x^5 + 21x = 0$ k) $x^6 = 32x$ l) $x^6 + x = 0$

Lösungen: a) ± 5 ; b) 0 ; c) 0 ; d) 0 ; e) 0 ; f) 0 ; g) 0 ; h) 0 ; i) 0 ; j) 0 ; k) 0 ; l) 0

Ü6.2

Berechnen Sie die Lösungen der folgenden Gleichungen. Die Lösungen sind zur Kontrolle gegeben.

- a) $x^2 = 0$ $\pm \sqrt{6}$
b) $6 - t^2 = 0$ $3; 2$
c) $4x^2 + 8x + 4 = 0$ $\{ \}$
d) $x^2 - 5x = -6$ $1; -1; -2$
e) $(x + 5) = 0$ $6; -5$
f) $3x^2 + 9 - 2x = 0$ $-0,17; 2,27$
g) $0,4t^2 - 1,2t = 0$ $\frac{1}{4}; \frac{1}{3}$
h) $(x^2 - 1)(x + 2)(x^2 + 3) = 0$ $0; \pm 3$
i) $4x^2 + x + 15 = 0$ $0; \frac{5}{4}$
j) $2x^2 - 8x^3 = 0$ $0; \pm 3$
k) $2x^2 - 4,2x - 0,76 = 0$ $0; 5; 1$
l) $2(4v - 1)^2 = v - (2v - 1)^2$ $\pm 3; \pm 2$
m) $9x^2 - 6x + 1 = 0$ $-1; 3$
n) $3x^2 - \frac{1}{3}x^4 = 0$ ± 3
o) $0,5 + 1,5x = 0$ -3
p) $0,4(1,2x^2 - 1,8x + 0,8)^4 = 0$ $0; 2,2; 0,5$
q) $16x^2 + 1,1t + t^3 = 0$ $0; 4; -2$
r) $32x^4 - 2x^2 = 0$ ± 3

Berechnen Sie die Lösungen der folgenden Gleichungen. Die Lösungen sind zur Kontrolle gegeben.

- a) $(1 - x^2)^2 = 0$ ± 1
b) $(x^2 + 1)(x^2 + 2) = 0$ $\{ \}$
c) $100x^3 + 80x^2 = 0$ $0; 0,1$
d) $x^4 = 0$ $0; 5; 1$
e) $0,4z^2 = 0$ $0; 0,5$
f) $x^4 + 16x = 0$ $\pm 3; \pm 2$
g) $0,4z^2 = 0$ $0; 0,5$
h) $(x^2 - 1)(x + 2)(x^2 + 3) = 0$ $-1; 3$
i) $16x^2 + 1,1t + t^3 = 0$ $0; 4; -2$
j) $(2x^2 - 1)^2 = 0$ ± 3
k) $0,4(1,2x^2 - 1,8x + 0,8)^4 = 0$ -3
l) $8 - \frac{1}{6}x^2 = 0$ $6; -8$
m) $0,5(x - 3)^2 = 0$ ± 3
n) $32x^4 - 2x^2 = 0$ $\pm \frac{3}{4}$

Information 6.1

Nicht jede Gleichung höheren Grades kann mit Hilfe der bisher erlernten Methoden gelöst werden. Bei Gleichungen 3. und höheren Grades kann es notwendig werden, das Verfahren der **Polynomdivision** anzuwenden.

Lösen von Gleichungen 3. und höheren Grades mit Polynomdivision

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Bei einer Gleichung 3. Grades kann man nicht ausklammern und Lösungsformeln, die eine Mitternachts-Formel ähneln, in der Praxis schwierig anzuwenden und meist nicht effizient. Eine Möglichkeit, alle Lösungen der hier vorliegenden Gleichung zu berechnen, bietet das Verfahren der **Polynomdivision**.

Aufgabe 6.3

Mit Hilfe der **Polynomdivision** sollen Sie schrittweisen Dividieren, das Sie bereits in der Grundschule erlernt haben ähnelt, sollen Sie die in polynomieller Darstellung gegebene Gleichung $18x^3 - 27x^2 - 17x - 2 = 0$ bearbeiten und aus den Lösungen die faktorierte Form des Gleichungsterms ermittelt werden. Arbeiten Sie nach Beispiel 1 eingehend durch und wenden Sie das Verfahren anschließend in der Übung 6.4 an.

Beispiel 1: $18x^3 - 27x^2 - 17x - 2 = 0$

Um das Verfahren der Polynomdivision anwenden zu können, benötigt man die erste Lösung der Gleichung. Wenn diese Lösung nicht geben bzw. nicht bekannt ist, versucht man die Lösung durch Raten zu finden. Zum Raten geeignet sind ganzzahlige Werte des Summanden ohne x. Hier also ± 1 und ± 2 . Diese Zahlen werden in die Funktion eingesetzt. Wenn sich dabei, wie im 1. Schritt unten beim Einsetzen von $x = 2$ Null ergibt, hat man die erste Lösung gefunden und kann das Verfahren mit dem 2. Schritt fortsetzen.

1. Schritt: Raten

$$\begin{aligned} x = -1 &\Rightarrow -18 - 27 + 17 - 2 = -30 \\ x = 2 &\Rightarrow 144 - 108 - 34 - 2 = 0 \end{aligned}$$

Erratene erste Lösung: $x_1 = 2$

Das Ergebnis des Ratevorgangs als Linearfaktor $(x - 2)$ notieren. Dieser Linearfaktor wird in der Polynomdivision eingesetzt. $x = 2 \mid -2 \Rightarrow x - 2 = 0$

2. Schritt: Polynomdivision mit dem Linearfaktor $(x - 2)$ notieren.

$$(18x^3 - 27x^2 - 17x - 2) : (x - 2) =$$

3. Schritt: 1. Divisionsvorgang

1. Division

Nur der erste Summand $18x^3$ wird durch das x aus dem Linearfaktor $(x - 2)$ dividiert. Der Zahlenwert, hier -2 , wird dabei nicht berücksichtigt.

$$(18x^3 - 27x^2 - 17x - 2) : (x - 2) = 18x^2$$

4. Schritt: 1. Multiplikationsvorgang

$$(18x^3 - 27x^2 - 17x - 2) - 18x^2(x - 2) = 18x^2 - 36x^2 - 17x - 2$$

Das Ergebnis der Multiplikation in einer zweiten Zeile, wie dargestellt, notieren.

5. Schritt: Subtraktionsvorgang

$$(18x^3 - 27x^2 - 17x - 2) : (x - 2) = 18x^2$$
$$\underline{18x^3 - 36x^2}$$
$$9x^2 - 17x - 2$$

2. Zeile von der 1. Zeile subtrahieren

$$\begin{array}{r} 18x^3 \quad -27x^2 \\ -18x^3 \quad -(-36x^2) \\ \hline 0 \quad 9x^2 \end{array}$$

(fällt weg)

17x werden nach unten geholt.

6. Schritt: 2. Divisionsvorgang

2. Ergebnis aus $9x^2 : x = 9x$

$$9x^2 - 17x$$

Nur den 1. Summanden wieder nur durch das x aus dem Linearfaktor $(x - 2)$ dividieren.

7. Schritt: 2. Multiplikationsvorgang

$$(18x^3 - 36x^2 - 17x - 2) : (x - 2) = 18x^2 + 9x$$
$$\underline{18x^3 - 36x^2}$$
$$9x^2 - 17x$$
$$\underline{9x^2 - 18x}$$

Ergebnis dieser Multiplikation der nächsten Zeile notieren.

9x wird mit dem Linearfaktor multipliziert: $9x(x - 2) = 9x^2 - 18x$

8. Schritt:

2. Subtraktionsvorgang

$$(18x^3 - 27x^2 - 17x - 2) : (x - 2) = 18x^2 + 9x + 2$$

$$\underline{18x^3 - 36x^2}$$

$$9x^2 - 17x$$

$$\underline{9x^2 - 18x}$$

$$x - 2$$

9. Schritt:

3. Divisionsvorgang

$$(18x^3 - 27x^2 - 17x - 2) : (x - 2) = 18x^2 + 9x + 2$$

$$\underline{18x^3 - 36x^2}$$

$$9x^2 - 17x$$

$$\underline{9x^2 - 18x}$$

$$x - 2$$

10. Schritt:

Multiplikationsvorgang

$$(18x^3 - 27x^2 - 17x - 2) : (x - 2) = 18x^2 + 9x + 2$$

$$\underline{18x^3 - 36x^2}$$

$$9x^2 - 17x$$

$$\underline{9x^2 - 18x}$$

$$x - 2$$

$$\underline{x - 2}$$

$$0$$

11. Schritt:

3. Subtraktionsvorgang

$$(18x^3 - 27x^2 - 17x - 2) : (x - 2) = 18x^2 + 9x + 2$$

$$\underline{18x^3 - 36x^2}$$

$$9x^2 - 17x$$

$$\underline{9x^2 - 18x}$$

$$x - 2$$

$$\underline{x - 2}$$

$$0$$

12. Schritt:

18. Substitutionsvorgang

$$(18x^3 - 27x^2 - 17x - 2) : (x - 2) = 18x^2 + 9x + 2$$

$$\underline{18x^3 - 36x^2}$$

$$9x^2 - 17x$$

$$\underline{9x^2 - 18x}$$

$$x - 2$$

$$\underline{x - 2}$$

$$0$$

13. Schritt:

19. Substitutionsvorgang

$$(18x^3 - 27x^2 - 17x - 2) : (x - 2) = 18x^2 + 9x + 2$$

$$\underline{18x^3 - 36x^2}$$

$$9x^2 - 17x$$

$$\underline{9x^2 - 18x}$$

$$x - 2$$

$$\underline{x - 2}$$

$$0$$

Faktorierte Darstellung des Gleichungsterms:

Aus den Ergebnissen kann man nun analog wie bei den quadratischen Gleichungen eine faktorierte Darstellung der Gleichung aus der Aufgabenstellung angeben.

$$18x^3 - 27x^2 - 17x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + \frac{1}{3})(x + \frac{1}{6}) = 0$$

Information zum Rateverfahren

Beim Rateverfahren für Polynomdivision ist es nur sinnvoll mit ganzzahligen Werten zu arbeiten. Man sollte man also Zahlenwerte einsetzen, die ganzzahlige Teile des Summanden ohne x sind, da dieser Summand das Produkt der Lösungen enthält.

Hier: $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$

Lösung

Übungen

Ü6.4

Berechnen Sie die Lösungen der Gleichung $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$. Geben Sie anschließend die Gleichung in der faktorierten Darstellung an (Kontrollergleichung: $(x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0$)

Beispiel 2:

Im folgenden Beispiel geht man schrittweise genauso vor, wie im ausführlich dargestellten Beispiel 1. Es tritt hier jedoch eine Besonderheit auf.

Im Gleichungsterm fehlt der Summand mit x^2 .

Erratene erste Lösung.

Gleichung: $x^3+x-2=0$

1. Schritt Raten mit $x=1 \Rightarrow 1+1-2=0 \Rightarrow 1$

2. Schritt Ansatz für Polynomdivision mit dem Linearfaktor $(x-1)$

3 bis 11. Schritt liefert folgenden Rest:

Aus der Lösung $x=1$ erhält man den Linearfaktor $(x-1)$.

Da x und $-x^2$ nicht subtrahieren kann, schreibt man die Form $-(-x^2)=x^2$ in die nächste Zeile. Das nach „Untenholen“ des nächsten Summanden entfällt damit, da bereits zwei Summanden vorhanden sind. Alle weiteren Schritte bei der Division wie in Beispiel 1.

Zusatzinfo zu alternativer Rechnung:

Die Potenzen von x auftreten, kann man die Division mit folgendem Ansatz schreiben:

und dann wie im

1. Schritt $x^2+x+2=0$

$x_{1,2}=-0,5 \pm \sqrt{0,25-2} \Rightarrow$ negative Wurzel $\Rightarrow$ keine

Faktorierte Form:

Für die faktorierte Gleichung gilt dann: $(x-1)(x^2+x-2)=0$

Der Ergebnisterm der Division übernimmt, da dieser sich faktorisieren lässt.

Beispiel 3:

Auch im folgenden Beispiel geht man schrittweise genauso vor, wie im ausführlich dargestellten Beispiel 1. Es tritt hier jedoch wieder eine Besonderheit bei der Rechnung auf.

Gleichung: $x^3+x^2+x+1=0$

Erratene erste Lösung.

1. Schritt Raten mit $x=-1 \Rightarrow -1+1-1+1=0$

2. Schritt Ansatz für Polynomdivision mit dem Linearfaktor $(x+1)$

3 bis 11. Schritt liefert folgenden Rest:

Aus der Lösung $x=-1$ erhält man den Linearfaktor $(x+1)$.

Beide ersten Subtraktionen ergibt sich für beide Potenzen Null. In der nächsten Zeile gibt es keinen Summanden mehr. Man holt dann die beiden folgenden Summanden aus der ersten Zeile gleichzeitig nach unten.

12. Schritt $x^2+1=0$ führt zu keinem Widerspruch. Es gibt damit keine weitere Lösung.

Für die faktorisierte Form der Ausgangsgleichung gilt dann: $(x+1)(x^2+1)=0$

Der Ergebnisterm der Division wird übernommen.

Übung

Bestimmen Sie die Lösungsmenge jeweils mit Hilfe der Faktorisierung, indem Sie die erste Lösung angeben. Die Lösungen sind in ungeordneter Reihenfolge angegeben.

- a) $x^3-10x^2+29x-20=0$

c) $x^3+6x^2+11x+6=0$

e) $2x^3+3x^2-2x-3=0$

g) $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$
- b) $25x^3-25x^2-8x+8=0$

d) $4x^3-3x^2-6x+4=0$

f) $4x^3-13x^2+12x-4=0$

h) $2x^5-11x^4+17x^3-8x^2-4x+4=0$

Lösungsmenge angeben:

-0,5; 1	-0,5; 2; 1	2; 0,8; 0,2	1
-1; 0,5	1; 4; 5	0,5; 1,5; -2	

Information 6.2

Sie haben für das Lösen von quadratischen Gleichungen und Gleichungen höheren Grades eine Reihe von Lösungsverfahren kennengelernt und es ist am Anfang oft schwierig, den Unterschied aller diese Lösungsmethoden zu behalten und souverän, ohne längeres Überlegen, die richtige zu finden. Um sich die Entscheidung, welches Lösungsverfahren zu wählen ist, zu erleichtern, kann Sie das Ablaufdiagramm auf der übernächsten Seite verwenden. Es stellt die Prinzipien, die Sie im Kopf bei der Entscheidungsfindung für die Wahl des passenden Lösungsverfahrens für eine Gleichung dar. Wenn Sie ohne Verwendung dieses Diagramms sofort entscheiden können, welche Gleichung zu lösen ist und das gewählte Verfahren fehlerfrei beherrschen, ist es nicht notwendig, weitere Übungsaufgaben zum Lösen von Gleichungen zu bearbeiten.

Übungen
Ü6.6

In dieser Übungsaufgabe sind alle benötigten Gleichungen vorhanden.

- a) Notieren Sie mit Stichworten in der zweiten Spalte der Tabelle unten, welche Lösungsverfahren man für die Lösung der Gleichung wählen sollte und ggf. welche Umformungen vorher notwendig sind. Sie können dabei als Hilfe das Ablaufdiagramm auf der übernächsten Seite verwenden.
- b) Berechnen Sie die Lösungen der Gleichungen in der ersten Spalte für die Aufgabenstellung günstigsten Lösungsverfahrens wählen. Zur Kontrolle sind die Lösungen jeweils angegeben.

Aufgabenstellung	Lösungsverfahren	Lösung zur Kontrolle
a) $x^2 = 0,75$		0; 0,75
b) $(2x + 4)(3 - x)(5 - 10x) = 0$		-2, 3; 0,5
c) $12x^4 - 44x^2 + 4 = 0$		2;-2
d) $x^2 + 1,08x - 3,41 = 0$		0, 1,08; -3,41
e) $(x^2 + 4)(x^2 - 9) = 0$		3;-3
f) $3x^3 - 7x^2 + 2x = 0$		
g) $(x^2 + 1)^3 = 0$		

h) $(0,25x + 1)^2 = (0,5x + 1)^2$		
i) $0,5x^3 + 3x^2 = 8$		-2; -5,46; - 1,46

Für $a \in \mathbb{R}^+$, $k \in \mathbb{R}^+$ und $t \in \mathbb{R}^+$ sind die folgenden parametrisierten Gleichungen gegeben.

j) $ax(x^2 + a)(x + 2a) = 0$		$0, -2a$
k) $x^4 - 2ax^3 + a^2x^2 = 0$		0, a
l) $(t + x)^2 = 4tx$		0; $1/(2t) + 1/2$
m) $x(2x^2 - k) = 0$		0; $\pm\sqrt{2k}$; $\pm\sqrt{\frac{k}{2}}$
n) $ax^3 - (a + 1)x^2 + 1 = 0$		1, -1, $\sqrt{1/a}$; $-\sqrt{1/a}$

Start

Decision: Gleichung hat die Form $(...)(...)(...) = 0$ oder $(...)^a (...)^b (...) = 0$?

If **ja** (yes): Inhalt jeder Klammer null setzen und x jeweils bestimmen.

If **nein** (no): Es kommt nur eine Potenz von x vor: x^2, x^3 oder x^4 etc.

Decision: Es kommt nur eine Potenz von x vor: x^2, x^3 oder x^4 etc.?

If **ja** (yes): Gleichung in eine der folgenden Formen auflösen, die entsprechende Wurzel ziehen.
Vorgehensweise:
- Wenn die Potenz gerade ist: positive und negative Lösungen beachten.
- Wenn die Potenz ungerade ist, gibt es nur eine Lösung, aber man kann man auch aus einer negativen Zahl die Wurzel ziehen.

If **nein** (no): Alles nach x in die Form $ax^n + b = 0$ bringen.

Decision: Enthält jede Summand irgendein x^n vor?

If **ja** (yes): So ausklammern, dass ein Summand kein x mehr hat und die Gleichung die Form: $x^n (... + ...) = 0$ hat. Dann Unterscheidung:
1. n Lösungen ergeben sich aus $x^n = 0$
2. Weitere Lösungen: Klammer Null setzen und daraus entstandene Gleichung lösen. **Gehe auf Start**

If **nein** (no): Die Gleichung so umformen, dass vor x^2 ein 1 steht.
Dann pq-Formel anwenden.

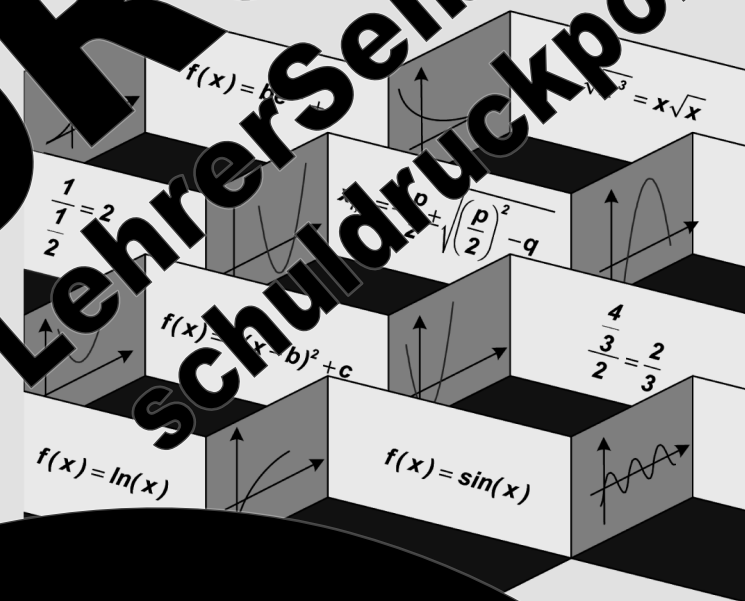
Decision: Die Gleichung hat die Form $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$?

If **ja** (yes): Substitution: $x^2 = z$. Dann Gleichung in $z^2 + pz + q = 0$ überführen. Dann pq-Formel für z. Rücksubstituieren $x^2 = z$. doppelte Lösung bei Wurzel beachten.

If **nein** (no): Lösungsverfahren Polynomdivision anwenden.

Decision: Ergebnis der Polynomdivision Null setzen und entstandene Gleichung lösen.

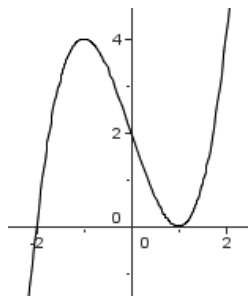
If **ja** (yes): 1. Erraten der ersten Lösung: 2. Polynomdivision mit: $(x - a)$ 3. Ergebnis der Polynomdivision Null setzen und entstandene Gleichung lösen. **Gehe auf Start**



Kapitel

Ganzrationale Funktionen höheren Grades

(3) $g(x) = x^3 - 3x + 2$



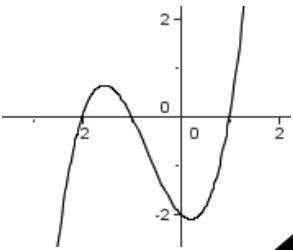
Nullstellen ablesen: $N_1(\quad)$ / $N_{2,3}(\quad)$

Funktionsterm in faktorisierter Form:

$g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

Nullstellen berechnen $g(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 3x + 2 = 0$

(4) $k(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$



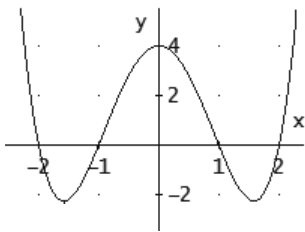
Nullstellen abgelesen: $N_1(\quad)$ / $N_{2,3}(\quad)$

Funktionsterm in faktorisierter Form:

Berechnen der Nullstellen: $k(x) = 0 \Rightarrow x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

b) Untersuchungen bei ganzrationalen Funktionen, bei denen der größte Exponent gerade ist

(1) $a(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

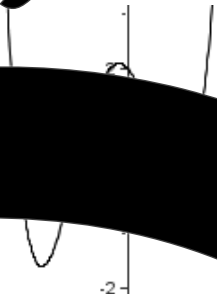


Nullstellen:
 $N_1(\quad / \quad); N_2(\quad / \quad);$
 $N_3(\quad / \quad); N_4(\quad / \quad)$
Funktionsterm in faktorisierter Form:
 $a(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

Berechnen der Nullstellen: $a(x) = 0 \Rightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

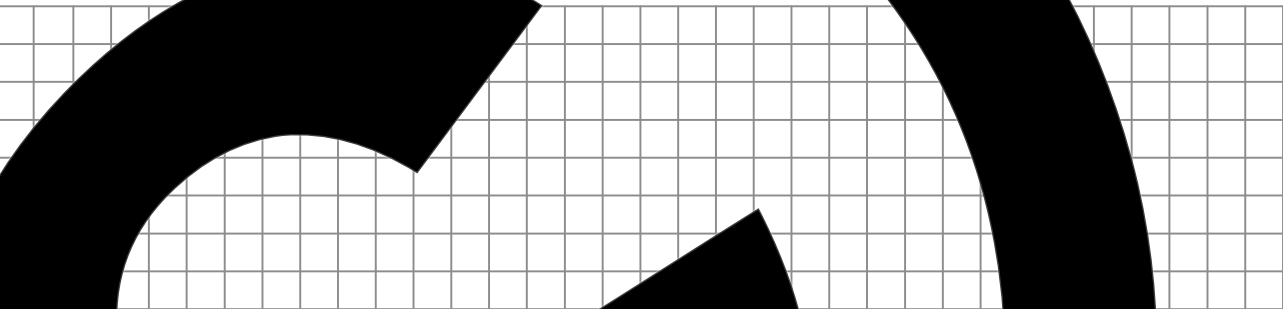


(2) $b(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2$

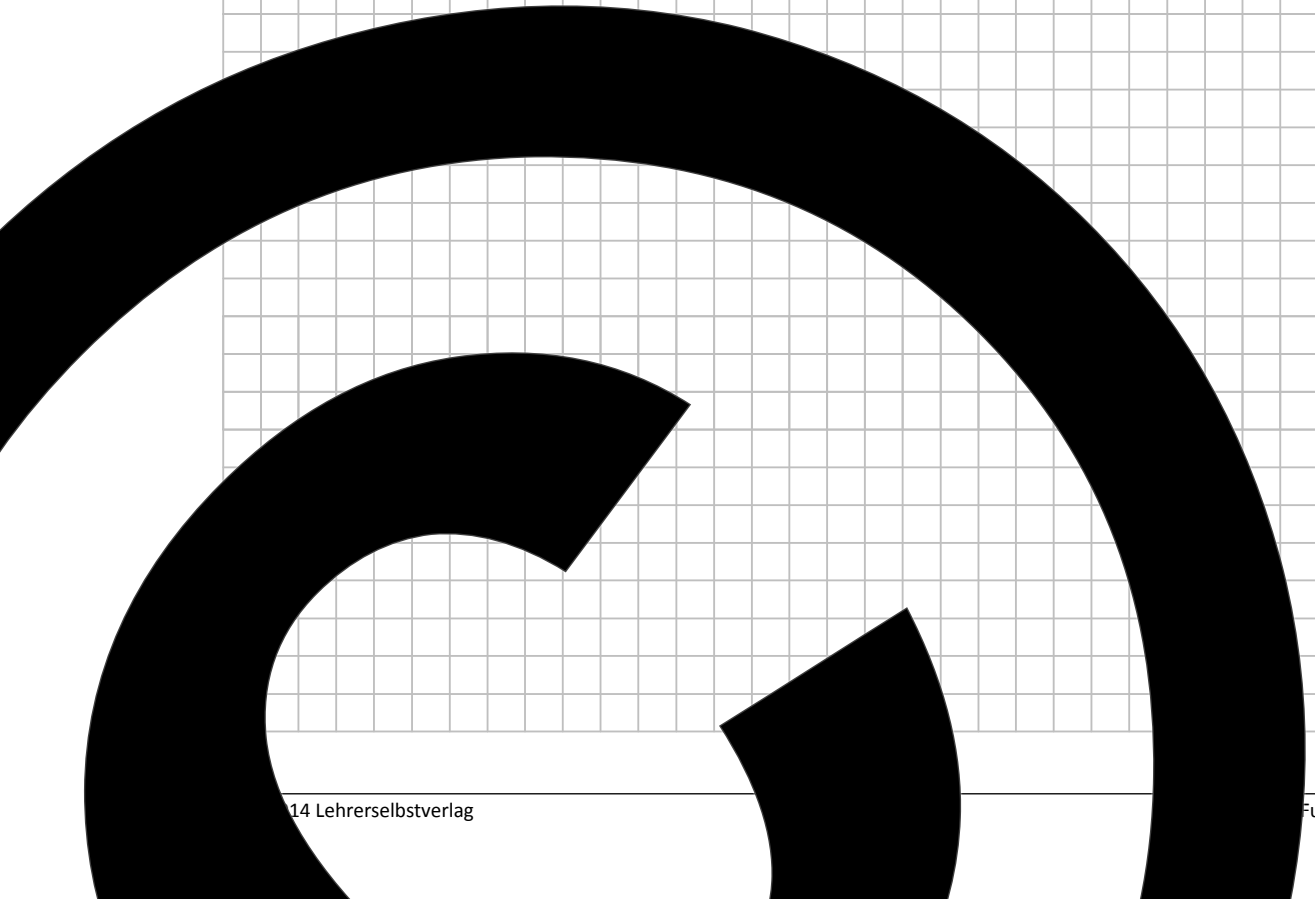


Nullstellen:
 $N_1(\quad / \quad); N_2(\quad / \quad)$
 $N_{3,4}(\quad / \quad)$
Funktionsterm in faktorisierter Form:
 $b(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

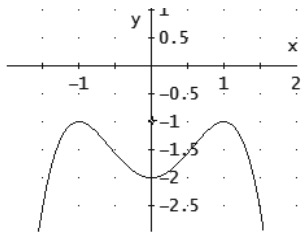
Berechnen der Nullstellen: $b(x) = 0 \Rightarrow x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2 = 0$



VORSCHAU
Lehrerselbstverlag
schuldruckportal.de



(3) $c(x) = -x^4 + 2x^2 - 2$



Nullstellen: _____

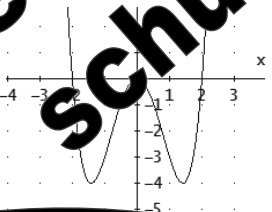
Funktionsterm in faktorisierter Form: _____

$c(x) =$ _____

Berechnen der Nullstellen: $c(x) = 0 \Rightarrow -x^4 + 2x^2 - 2 = 0$



(4) $d(x) = -4x^2$



Nullstellen: _____

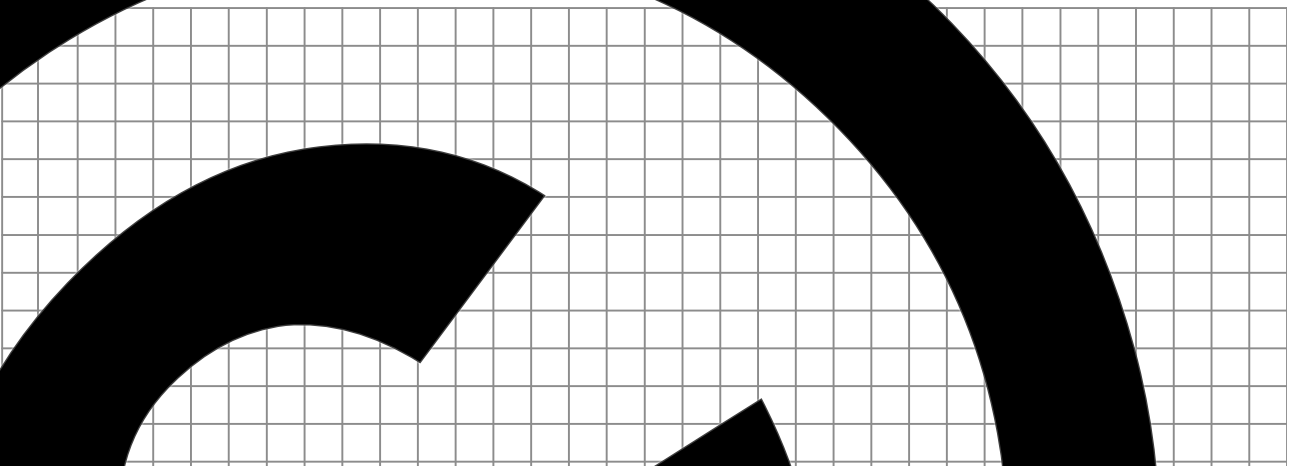
$N_1(\quad / \quad) \quad N_2(\quad / \quad)$

$N_{3,4}(\quad / \quad)$

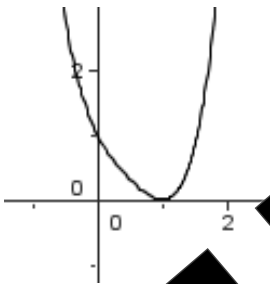
Funktionsterm in faktorisierter Form: _____

$d(x) =$ _____

Berechnen: $d(x) = 0 \Rightarrow -4x^2 = 0$



(5) $e(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$



Nullstellen: _____

Funktionsterm in faktorisierter Form: _____

$e(x) = (x - 1)^2(x^2 + 1)$

Weisen Sie hier durch Ausmultiplizieren der faktorierten Form der Funktion nach, dass gilt: $(x - 1)^2(x^2 + 1) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$



Ergänzen Sie:

Die Berechnung der Nullstellen einer Funktion 4. Grades führt zu einer Gleichung ____ Grades. Da Funktionen 4. Grades ____ Nullstellen haben können, gibt es bei Gleichungen 4. Grades ____ Lösungen.

Ergänzen Sie den allgemeinen Merksatz zur Anzahl der Nullstellen von Funktionen.

Zusammenfassender Merksatz:

Funktionsterm in faktorisierter Form: $f(x) = (x - 1)^2(x^2 + 1)$

Die größte Potenz von x ungerade ist ____.

Die Funktion besitzt ____ Nullstelle(n). Funktionen, die ____ ist, müssen keine Nullstellen haben.

Allgemein hat eine Funktion n-ten Grades maximal ____ Nullstellen.

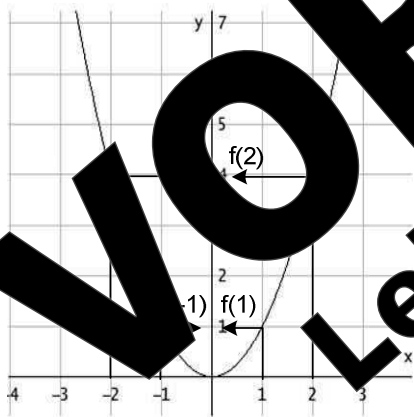
Aufgabe 7.2

Symmetriebetrachtungen bei ganzrationalen Funktionen

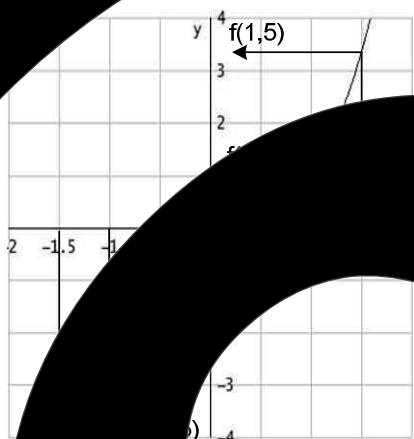
Oft verlangen Aufgabenstellungen die Anfertigung einer Skizze für den Verlauf einer Funktion. Dazu reicht es meist aus, die Nullstellen und den y-Achsenabschnitt zu kennen. Oft ist es jedoch auch, wenn man die Funktion hinsichtlich ihrer Symmetrieeigenschaften untersucht.

Beispielhafte Untersuchung auf Symmetrie anhand der einfachen Funktionen $f(x) = x^2$ und $h(x) = x^3$
 Füllen Sie jeweils die Wertetabelle aus, und vergleichen Sie die Funktionswerte der Wertepaare $f(x)$ und $f(-x)$. Formulieren Sie jeweils einen Zusammenhang zwischen $f(x)$ und $f(-x)$.

Symmetrie bei einer zur y-Achse symmetrischen Funktion

Funktion	Wert	Beziehung zwischen den Funktionswerten
Achsensymmetrie zur y-Achse		Ergänzen Sie: Bei einer zur y-Achse symmetrischen Funktion gilt für einen beliebigen Wert von x die folgende Beziehung:
$f(x) = x^2$		
		
	-2	$f(-2) = \underline{\hspace{2cm}}$
	-1	$f(-1) = \underline{\hspace{2cm}}$
	0	$f(0) = \underline{\hspace{2cm}}$
	1	$f(1) = \underline{\hspace{2cm}}$
	2	$f(2) = \underline{\hspace{2cm}}$
	3	$f(3) = \underline{\hspace{2cm}}$
		$f(-1) = f(1)$
		$f(-2) = f(\underline{\hspace{1cm}})$
		$f(-3) = f(\underline{\hspace{1cm}})$
		$f(-x) = f(\underline{\hspace{1cm}})$

Symmetrie bei einer zum Ursprung symmetrischen Funktion

Funktion	Wert	Beziehung zwischen den Funktionswerten
Punktsymmetrie zum Ursprung		Ergänzen Sie: Bei einer zum y-Achse symmetrischen Funktion gilt für einen beliebigen Wert von x die folgende Beziehung:
		
	-2	$f(-2) = \underline{\hspace{2cm}}$
		$f(2) = \underline{\hspace{2cm}}$
		$f(-1,5) = \underline{\hspace{2cm}}$
		$f(1,5) = \underline{\hspace{2cm}}$
		$f(-1) = \underline{\hspace{2cm}}$
		$f(1) = \underline{\hspace{2cm}}$
	1,5	
	2	

Aufgabe 7.3

Rechnerische Untersuchung auf Symmetrieverhalten bezüglich der y-Achse bzw. des Ursprungs

Information 7.1

In jedem Tafelwerk kann man nachschlagen, dass die anhand der Funktionen $f(x) = x^2$ und $h(x) = x^3$ verdeutlichten Beziehungen bei dem Vorliegen von Symmetrie für alle Funktionsklassen gültig sind. Die in Aufgabe 7.2 dargestellte Form der Zusammenhänge ist die rechnerische Untersuchung auf Symmetrie günstig und wird daher im Folgenden verwendet.

Achsensymmetrie zur y-Achse:
Punktsymmetrie zum Ursprung:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(-x) \\ f(x) &= -f(-x) \end{aligned}$$

Verdeutlichen Sie sich die Vorgehensweise zum rechnerischen Nachweis von Symmetrien anhand der folgenden Beispiele.

Beispiel 1:

Nachweis, dass die Funktion $g(x) = x^3 - 3x + 2$ keine Symmetrieeigenschaften hat.

- a) Prüfen auf Achsensymmetrie mit dem Ansatz $g(-x) = g(x)$
- $$g(-x) = (-x)^3 - 3(-x) + 2 = -x^3 + 3x + 2 \neq g(x) \Rightarrow \text{keine Achsensymmetrie}$$
- Alle Klammern wurden aufgelöst und der entstandene Ausdruck wird mit der ursprünglichen Funktion verglichen.
- Keine Übereinstimmung mit $g(x)$ $\Rightarrow$ keine Achsensymmetrie
- b) Prüfen auf Punktsymmetrie mit dem Ansatz $-g(-x) = g(x)$

$$-g(-x) = -[-x^3 + 3x + 2] = x^3 - 3x - 2 \neq g(x) \Rightarrow \text{keine Punktsymmetrie}$$

Keine Übereinstimmung mit $g(x)$ $\Rightarrow$ keine Punktsymmetrie

Beispiel 2:

Nachweis, dass die Funktion $c(x) = -x^4 + 2x^2 - 2$ achsensymmetrisch ist. Der Nachweis für Achsensymmetrie ist notwendig, die Untersuchung auf Punktsymmetrie ist nicht notwendig.

$$c(-x) = -(-x)^4 + 2(-x)^2 - 2 = -x^4 + 2x^2 - 2 = c(x) \Rightarrow \text{Achsensymmetrie}$$

Alle Klammern auf der linken Seite vom Gleichheitszeichen ergibt die Ausgangsfunktion. D.h. die Funktion ist achsensymmetrisch.

Beispiel 3:

Nachweis, dass die Funktion $f(x) = x^3 + x$ punktsymmetrisch ist.

a) Prüfen auf Achsensymmetrie

$f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x \neq f(x) \Rightarrow$ nicht achsensymmetrisch

Bei der Untersuchung auf Achsensymmetrie ergibt sich ein Widerspruch.

b) Prüfen auf Punktsymmetrie

$-f(-x) = -[-x^3 - x] = x^3 + x = f(x) \Rightarrow$ Punktsymmetrie

Bei der Untersuchung auf Punktsymmetrie ergibt sich nach dem Aufrechnen aller Funktionswerte auf der rechten Seite vom Nullpunkt die gleiche Funktionsgleichung.

Übung 7

a) Untersuchen Sie die ganzrationalen Funktionen aus Aufgabe 7.1, ohne Rechnung, alleine anhand des gegebenen Kurvenverlaufs auf Zusammenhänge zwischen den Symmetrieeigenschaften und den auftretenden Potenzen von x im Funktionsterm. Formulieren Sie entsprechende Regeln, indem Sie die folgenden Sätze vervollständigen.

Eine ganzrationale Funktion ist achsensymmetrisch zur y-Achse, wenn alle Potenzen von x gerade sind. (Ein Summand der Form $kx^0 = k$ zählt zu den geraden Potenzen von x.)

Eine ganzrationale Funktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn alle Potenzen von x ungerade sind.

Eine ganzrationale Funktion hat bezüglich der x-Achse und des Ursprungs keine Symmetrieeigenschaften, wenn keine und keine Potenzen von x auftreten.

b) Weisen Sie den Kurvenverläufen der Funktionen aus Aufgabe 7.1 die Symmetrieeigenschaften zu.

Raum für Rechnungen:

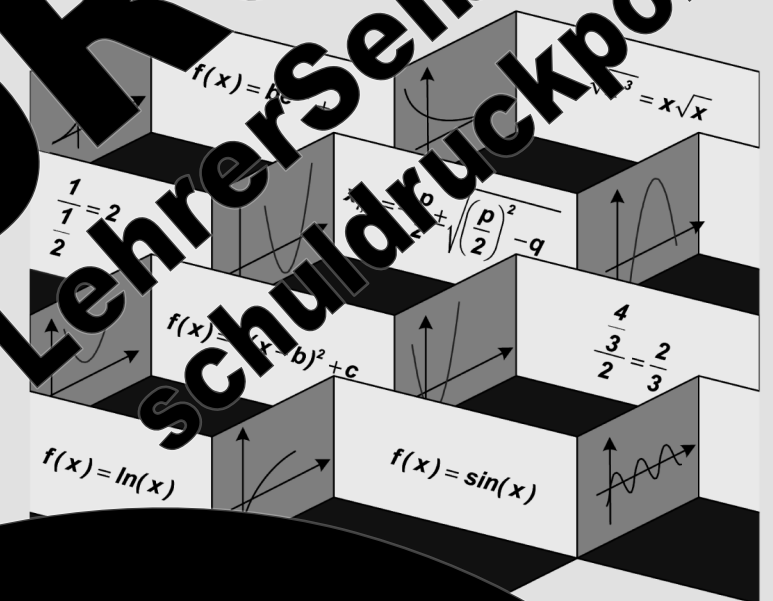
Raum für Rechnungen:

Grid area for calculations.



Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Grundlegende zu Algebra und Funktionen selbstorganisiert erlernen



Kapitel

Die Umkehrfunktion

Kapitel 8: Umkehrfunktionen

Aufgabe 8.1

Grundlegendes zu Umkehrfunktionen

In Ihrem bisherigen Mathematikunterricht haben Sie beim Lösen von Gleichungen und bei der Berechnung von Winkeln, ohne dass hier die Begriffe Funktion und Umkehrfunktion verwendet wurden, bereits eine wichtige Eigenschaft über Funktionen und deren möglichen Umkehrfunktionen kennengelernt. Arbeiten Sie alle Beispiele durch, und ergänzen Sie bei fehlenden Angaben.

Beispiel 1:

Lösen Sie die beiden Gleichungen in x auf. Die vollständigen Lösungen folgen dem Text:

$$x^2 = 4$$

$$\sqrt{x-4} =$$

Um die quadratische Gleichung zu lösen, muss man _____ und um die

Wurzelgleichung zu lösen, muss man _____

Durch Quadrieren eines Ausdrucks der Form $\sqrt{\quad}$ wird die Wurzel „vernichtet“, und durch das Ziehen der Wurzel aus einem Ausdruck a^2 fällt das Quadrat weg. Die Operationen Quadrieren und Wurzelziehen heben sich also gegenseitig auf und werden daher auch als Umkehroperationen bezeichnet.

Beispiel 2:

Für die Gleichung $\tan(\alpha) = m$ wird der folgende Ansatz verwendet:

$\tan^{-1}$ ist die Umkehroperation zu $\tan$.

$$\tan^{-1}(\tan(\alpha)) = \alpha$$

$$\alpha = \tan^{-1}(m)$$

Info: $\tan^{-1}$ wird auch als **arctan** (sprich arcus-tangens) bezeichnet.

Aufgabe 8.2

Zusammenhang zwischen Funktion und ihrer Umkehrfunktion

Überlegen Sie die Zusammenhänge von Beispiel 1 und Beispiel 2 unter funktionentheoretischen Gesichtspunkt, so dass die Begriffe Operation und Umkehroperation auf die Begriffe **Funktion** und **Umkehrfunktion** übertragen werden können. In der Tabelle auf der folgenden Seite sind die einfachen Funktionen und ihre zugehörigen Umkehrfunktionen angegeben. Verdeutlichen Sie die Zusammenhänge an den Beispielen die Zusammenhänge, und ergänzen Sie dann in der Tabelle die fehlenden Angaben.

Kapitel 1	Brüche, Potenzen, Wurzeln und Binome	9
Kapitel 2	Grundlegendes zu Gleichungen	59
Kapitel 3	Lineare Funktionen	63
Kapitel 4	Quadratische und biquadratische Gleichungen und Ungleichungen	77
Kapitel 5	Ganzrationale Funktion 2. Grades	87
Kapitel 6	Gleichungen 3. und höherer Grades	104
Kapitel 7	Ganzrationale Funktionen 2. und höherer Grades	115
Kapitel 8	Die Umkehrfunktion	127
Kapitel 9	Trigonometrische Funktionen	135
Kapitel 10	Exponential- und Logarithmusfunktionen	145
Kapitel 11	Vertiefende Betrachtungen zu Betragsungleichungen	169

Gesamtwortmarkenrecht zu Algebra und Funktionen

(Bestandteile)

Sie

alle Rechte vorbehalten. All rights reserved.

Druck, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte, die aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

LehrerselbstVerlag

LehrerselbstVerlag GmbH, Koblenz (Germany)

www.f-druck.de

Bei Betrachtungen zu Umkehrfunktionen muss meist ein Definitionsbereich angegeben werden. Bei der Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ sind beispielsweise keine negativen Zahlen erlaubt, da man im Zahlenbereich der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ einer negativen Zahl keine Quadratwurzel ziehen kann.

Funktion	Umkehrfunktion	Anwenden der Umkehrfunktion auf die Funktion	Definitionsbereiche
$f(x) = x^2$	$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$	$f^{-1}(f(x)) = \sqrt{x^2} = x$	$\mathbb{R}_0^+$

Erinnerung:
Der Ausdruck, welcher bei der Funktionsschreibweise in der Klammer steht, hier das x , wird als **Argument** der Funktion bezeichnet.

Argument

Argument x wird der zugehörige Funktionsterm (hier: x^2) eingesetzt.

Für f^{-1} wird der zugehörige Funktionsterm (hier: $\sqrt{}$) eingesetzt.

$f(x) = \sqrt{x}$	$f^{-1}(x) = x^2$	$f^{-1}(f(x)) = \sqrt{x^2} = x$	$\mathbb{R}_0^+$
$f(x) = \tan(x)$	$f^{-1}(x) = \tan^{-1}(x)$	$f^{-1}(f(x)) = \tan^{-1}(\tan(x)) = x$	$x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
$f(x) = \sin(x)$	$f^{-1}(x) = \sin^{-1}(x)$	$f^{-1}(f(x)) = \sin^{-1}(\sin(x)) = x$	$x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
$f(x) = x^3$	$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$	$f^{-1}(f(x)) = \sqrt[3]{x^3} = x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos(x)$	$f^{-1}(x) = \cos^{-1}(x)$	$f^{-1}(f(x)) = \cos^{-1}(\cos(x)) = x$	$x \in [0; \pi]$
$f(x) = \ln(x)$	$f^{-1}(x) = e^x$	$f^{-1}(f(x)) = \ln(e^x) = x$	$x \in \mathbb{R}$

Für eine Funktion und ihrer Umkehrfunktion gilt der Zusammenhang. Vervollständigen Sie die Tabelle.

Wendet man die Umkehrfunktion auf ihre zugehörige Funktion an, so erhält man das Argument. Formelmäßig gilt: $f^{-1}(f(x)) = x$

Verdeutlichen Sie mit einem Beispiels, dass auch die Umkehrfunktion den Satz des Pythagoras gilt und ergänzen Sie die Tabelle.

Bsp.: $f(x) = x^2$ $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

Wendet man die Funktion auf ihre zugehörige Umkehrfunktion an, so erhält man das Argument. Formelmäßig gilt: $f(f^{-1}(x)) = x$

Aufgabe 8.3

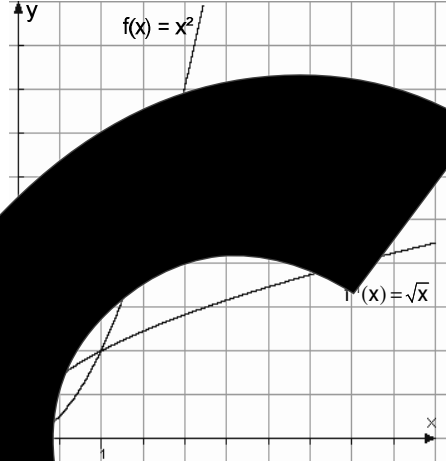
Zusammenhang zwischen den Graphen von Funktion und Umkehrfunktion

Im Folgenden sollen nun anhand der Potenzfunktionen $f(x) = x^2$ sowie $f(x) = x^3$ und zugehörigen Wurzelfunktionen weitere Zusammenhänge zwischen Funktion und Umkehrfunktion erarbeitet und formuliert werden.

a) Füllen Sie die beiden Wertetabellen aus, und beschreiben Sie, welcher Zusammenhang zwischen den Argumenten von Funktion und Umkehrfunktion und den zugehörigen Funktionswerten besteht.

Funktion		Umkehrfunktion	
x	f(x) = x^2	x	f^{-1}(x) = \sqrt{x}
0	0	0	0
0,5	0,25	0,25	0,5
1	1	1	1
1,5	2,25	2,25	1,5
2	4	4	2
2,5	6,25	6,25	2,5

b) Zeichnen Sie die Graphen der quadratischen Funktion und als Umkehrfunktion in ein Koordinatensystem. Welchen Zusammenhang zwischen den beiden Funktionen besteht? Formulieren Sie die Symmetriebeziehung. Beschreiben Sie die Symmetriebeziehung, und formulieren Sie dabei, wie man mithilfe von rein graphischen Mitteln die Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ ermitteln kann.



c) Die in Aufgabenteil a) und b) erarbeiteten Zusammenhänge sollen nun auf die Funktion $f(x) = x^3$ und die zugehörige Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ übertragen werden. Verdeutlichen Sie sich anhand der Wertetabelle auch hier den Zusammenhang zwischen den Argumenten und den Funktionswerten, indem Sie die fehlenden Werte ergänzen.

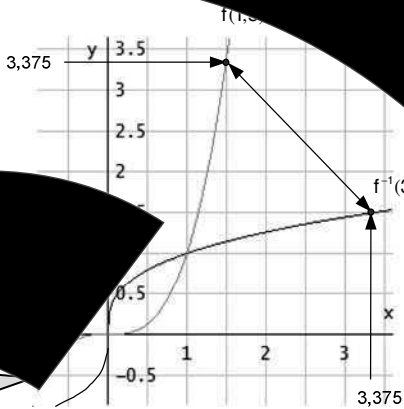
Potenzieren

Argument x der Funktion	Funktionswert f(x)
x	$f(x) = x^3$
-2	-8
-1,5	-3,375
-1	-1
0	0
1	1
2	8
Funktionswert der Umkehrfunktion	Argument x der Umkehrfunktion
$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$	x

Radizieren*

*Radizieren bedeutet Wurzel ziehen

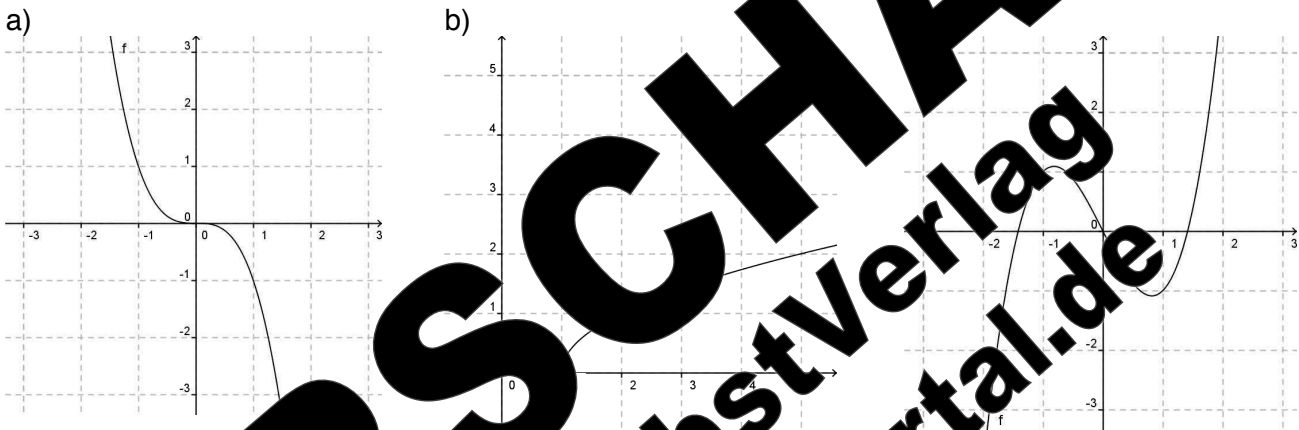
Ergänzen Sie die Wertetabelle und verdeutlichen Sie sich auch anhand der Graphik den Zusammenhang zwischen einer Funktion und ihrer Umkehrfunktion, indem Sie die fehlenden Zahlen ergänzen.



Die Umkehrfunktion von $f(x)$ ist auch die Umkehrfunktion von $f^{-1}(x)$.
Wichtig ist, dass die Umkehrfunktion die Umkehrfunktion von $f(x)$ ist.

Aufgabe 8.4

Ergänzen Sie, falls möglich, in den Abbildungen jeweils die Symmetriengerade und eine Skizze der Umkehrfunktion zu den dargestellten Funktionen. Begründen Sie dies, indem Sie erläutern, warum der erwähnte Satz gültig ist.



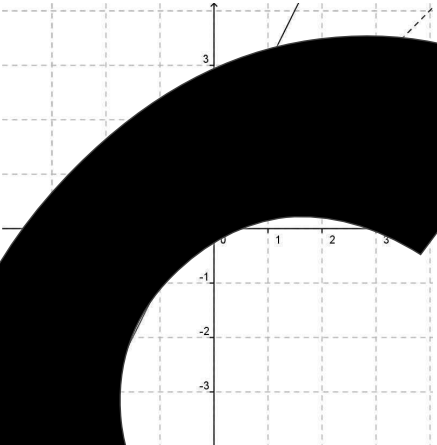
Stetig heißt, dass man beim Zeichnen der Funktion keinen Sprung machen muss. Betrachten Sie im Fall der Umkehrfunktion die Umkehrfunktion.

Wenn man den gesamten Definitionsbereich einer stetigen Funktion betrachtet, dann ist eine Funktion nur umkehrbar, wenn sie in diesem Bereich streng monoton steigt oder fällt.

Streng monoton heißt, dass die Funktion nur fällt oder steigt.

Aufgabe 8.5

Ermitteln Sie die Umkehrfunktion am Beispiel $f(x) = 2x + 1$. Zeichnen Sie die Umkehrfunktion zur Geraden $f(x) = 2x + 1$ auf graphischem Weg, und bestimmen Sie den Funktionsterm von $f^{-1}(x)$ durch algebraische Umformung. Verdeutlichen Sie sich anschließend die Umformungsschritte bei der rechnerischen Bestimmung der Umkehrfunktion.



Funktionsterm: $f^{-1}(x) =$ _____

Rechenschritte

Schritt 1:
Ersetzen von $f(x)$ durch y .

Schritt 2:
Gleichung nach x auflösen.

Schritt 3:
Ist das Auflösen nach x gelungen, vertauscht man die Variablen x und y .

Schritt 4:
Man ersetzt y durch $f^{-1}(x)$ und erhält so die Umkehrfunktion zu f .

$f(x) = 2x + 1$
 $y = 2x + 1$
 $-2x = -y + 1$
 $x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$
 $x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$
 $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

Zusatz:
Sollte die Gleichung nicht nach x auflösen lassen, so existiert die Umkehrfunktion keine Umkehrfunktion.

Übungen
(Raum für Rechnungen auf den Folgeseiten)

Übung 8.1
Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$. Skizzieren Sie die Funktion in ein geeignetes Koordinatensystem. Bestimmen Sie die Umkehrfunktion $g^{-1}(x)$ auf graphischem und rechnerischem Weg. Begründen Sie anhand des Funktionswertes, dass $f(b) = a$ und $g^{-1}(a) = b$.

Übung 8.2
Bestimmen Sie die Umkehrfunktion $g^{-1}(x)$ auf graphischem und rechnerischem Weg.
a) $f(x) = 2x + 1$, $x \geq 0$ c) $f(x) = 2x^3$

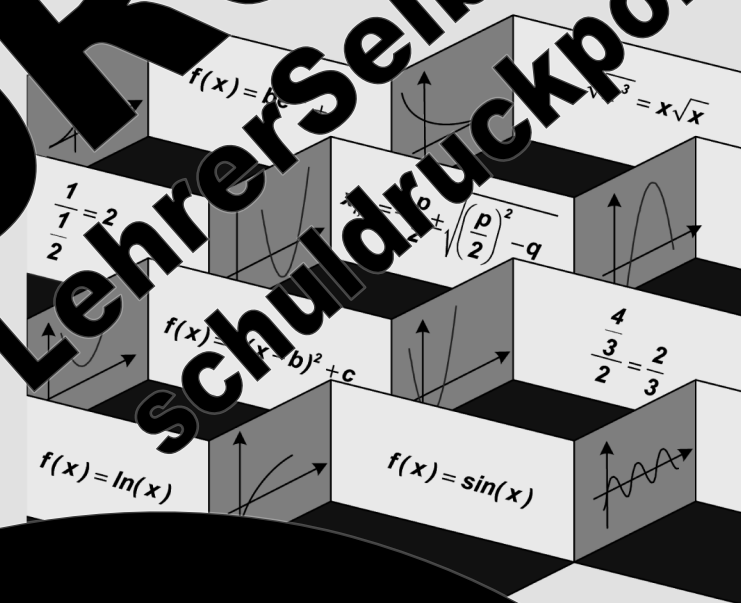
Übung 8.3
In Abbildung 8.1 ist die Funktion $f(x) = x^3 - 2x$ abgebildet. Anhand von graphischen Überlegungen hat man bereits erkannt, dass keine Umkehrfunktion existiert. Zeigen Sie nun analytisch, dass die Umkehrfunktion nicht ermittelbar ist.



VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Grundlegende zu Algebra und Funktionen selbstorganisiert erlernen



Kapitel

Trigonometrische Funktionen

b) Ermitteln Sie durch Messung aus der Abb. 9.1.1 den Winkel α und die angegebenen Seitenlängen so genau wie möglich.

$\alpha = \text{---}$ $\overline{AB} = \text{---}$ $\overline{AB'} = \text{---}$ $\overline{AC} = \text{---}$ $\overline{AC'} = \text{---}$ $\overline{BC} = \text{---}$

Berechnen Sie die angegebenen Seitenverhältnisse und jeweils die Werte von $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ und $\tan(\alpha)$ auf zwei Dezimalstellen gerundet. Achten Sie dabei darauf, dass Taschenrechner bei der Eingabe von Gradmaßen die Einstellung „deg“ haben muss.

- (1)

$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \text{---} = \text{---}$
- (2)

$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \text{---} = \text{---}$
- (3)

$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \text{---} = \text{---}$
- $\frac{\overline{B'C'}}{\overline{AC'}} = \text{---}$
- $\frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}} = \text{---}$
- $\frac{\overline{B'C'}}{\overline{AB'}} = \text{---}$
- $\sin(\alpha) = \text{---}$
- $\cos(\alpha) = \text{---}$
- $\tan(\alpha) = \text{---}$

Vergleichen Sie die Ergebnisse aus den Berechnungen der Seitenverhältnisse in (1), (2) und (3) mit den entsprechenden Werten von $\sin$, $\cos$ und $\tan$. Was stellen Sie fest?

Sie haben vorher erkannt, dass die berechneten Längenverhältnisse in (1), (2) und (3) mit den Werten von $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ und $\tan(\alpha)$ übereinstimmen. Ändert sich der Winkel α so verändern sich auch diese Längenverhältnisse und damit die Werte von $\sin(\alpha)$ bzw. $\cos(\alpha)$ und $\tan(\alpha)$. Diese Abhängigkeit der Längenverhältnisse vom Winkel α interpretiert man als funktionalen Zusammenhang und bezeichnet $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ und $\tan(\alpha)$ als **Winkelfunktionen**.

Dem Verhältnis von
Gegenkathete zu
Hypotenuse ordnet man den
Sinus des Winkels α zu.

$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete (von } \alpha \text{)}}{\text{Hypotenuse (von } \alpha \text{)}}$

Dem Verhältnis von
Ankathete zu
Hypotenuse ordnet man den
Cosinus des Winkels α zu.

$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete (von } \alpha \text{)}}{\text{Hypotenuse (von } \alpha \text{)}}$

Dem Verhältnis von
Gegenkathete zu **Ankathete**
ordnet man den **Tangens** des
Winkels α zu.

$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete (von } \alpha \text{)}}{\text{Ankathete (von } \alpha \text{)}}$

Aufgabe 9.1:
Die folgenden, häufig verwendeten Zusammenhänge zwischen $\sin$, $\cos$ und $\tan$ können Sie in jedem Tafelwerk nachschlagen. Zur Verständlichkeit der Betrachtungen werden die Funktionen jeweils anfalls angegeben.

$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Pythagoras
 $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$
 $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$

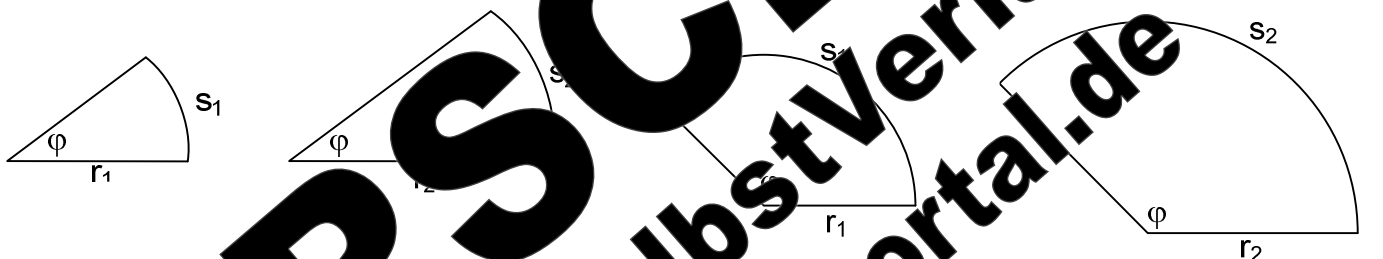
$\sin(-x) = -\sin(x)$
 $\cos(-x) = \cos(x)$
 $\tan(-x) = -\tan(x)$

$\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
 $\cos(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

Aufgabe 9.2
Bogenlänge, Grad- und Bogenmaß

Bei der Anwendung von Sinus, Cosinus und Tangens in Wissenschaft und Technik erfolgt die Winkelangabe meist nicht mithilfe des Gradmaßes, sondern über das **Bogenmaß**. Was man unter dem Bogenmaß eines Winkels versteht, soll anhand der folgenden Aufgaben klargestellt werden.

Verdeutlichen Sie sich anhand der im Folgenden abgebildeten Kreissegmente, wie die Bogenlänge, die hier mit s bezeichnet wird, vom Winkel φ und dem Radius r abhängt und ergänzen Sie den nachfolgenden Text.



Es gilt:
Je größer der Winkel φ , desto _____ der Bogen.
Je größer der Radius r , desto _____ der Bogen.

Wie wir bereits, dass man beim Vollkreis den Umfang bzw. die Bogenlänge s mit der Formel $s = 2\pi r$ berechnen kann. Ausgehend vom Vollkreis kann man auf die Bogenlänge bei einem Kreissegment schließen. Ergänzen Sie in der folgenden Tabelle fehlende Berechnungen für die Bogenlänge zu den gegebenen Winkeln, sowie das Verhältnis Bogenlänge s zu Radius r .

Winkel im Kreissegment	360°	270°	180°	90°	1°	30°	60°	45°
Bogenlänge s					$\frac{\pi r}{180}$			
Verhältnis $\frac{s}{r}$ (Bogenmaß)	2π	$\frac{3\pi}{2}$						

Jeder Angabe im Winkelmaß mit Gradangabe kann man eine Angabe im Bogenmaß zuordnen, die den Wert π enthält. Die Beziehungen zwischen Bogenmaß und Winkelmaß lauten:

Winkel α in Gradmaß in Bogenmaß umrechnen: $\alpha = \frac{x \cdot \pi}{180}$

Winkel α in Bogenmaß in Gradmaß umrechnen: $\alpha = x \cdot 180$

Einheit im Bogenmaß: **rad**

Einheit im Gradmaß: **deg**

Aufgabe 9.3

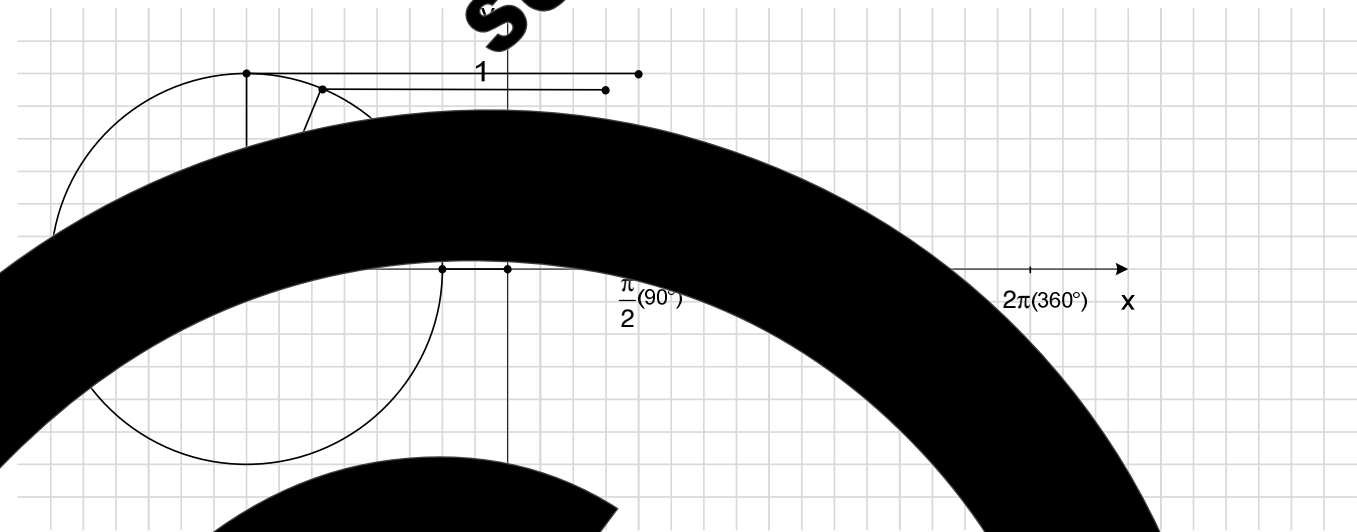
Die Sinusfunktion

In Naturwissenschaft, Technik und anderen Anwendungsgebieten, in denen periodische Schwingungen und Wellen auftreten, ist der funktionale Charakter des Sinus die Grundlage für die formelmäßige Beschreibung der Zusammenhänge. Die Funktionswerte dieser Sinusfunktion $f(x) = \sin x$ erhält man mit dem Taschenrechner, indem man für x entweder im Grad- oder Bogenmaß den Wert eines Winkel eingibt. Ergänzen Sie die folgende Tabelle, indem Sie Sinusfunktionswerte mit dem Taschenrechner erzeugen . Achten Sie dabei auf die Einheiten „Grad“ oder „Rad“.

x	0°	30° oder $\frac{\pi}{6}$	45° oder $\frac{\pi}{4}$	60° oder $\frac{\pi}{3}$	90° oder $\frac{\pi}{2}$
$f(x) = \sin(x)$					

Diese Werte treten in vielen Anwendungen häufig auf. Sie sind auch dann nützlich, wenn man sich das Einheitskreis anschaut.

Den Funktionsgraphen der Sinusfunktion kann man mithilfe des Einheitskreises (Kreis mit Radius 1) auf graphischen Weise ohne Wertetabelle erzeugen. Verdeutlichen Sie sich, wie die Koordinaten der Punkte rechts von der y-Achse erzeugt werden, und tragen Sie, entsprechend zu diesen Punkten, alle Werte links von der y-Achse ein. Verbinden Sie anschließend alle Punkte zu einem Graphen.



Der hier gezeichnete Graph ist die Sinusfunktion $f(x) = \sin(x)$ bezeichnet.

Aufgabe 9.4

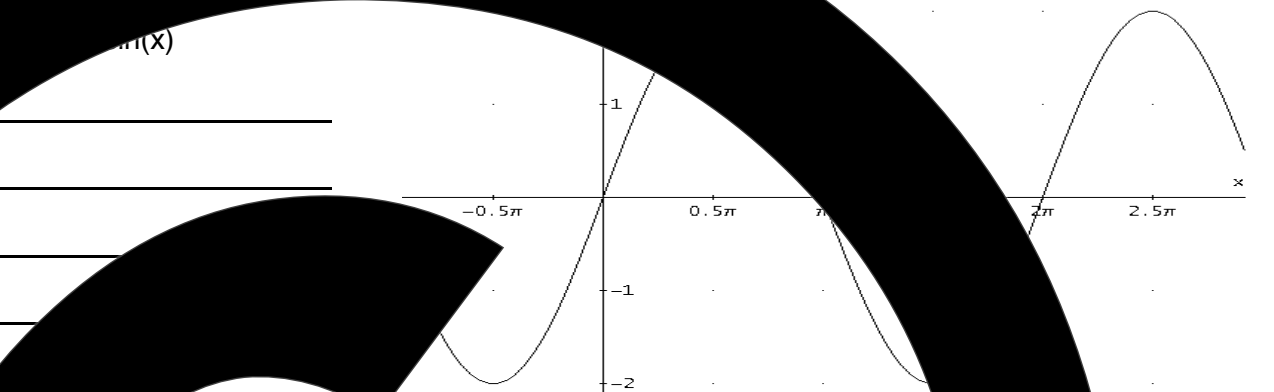
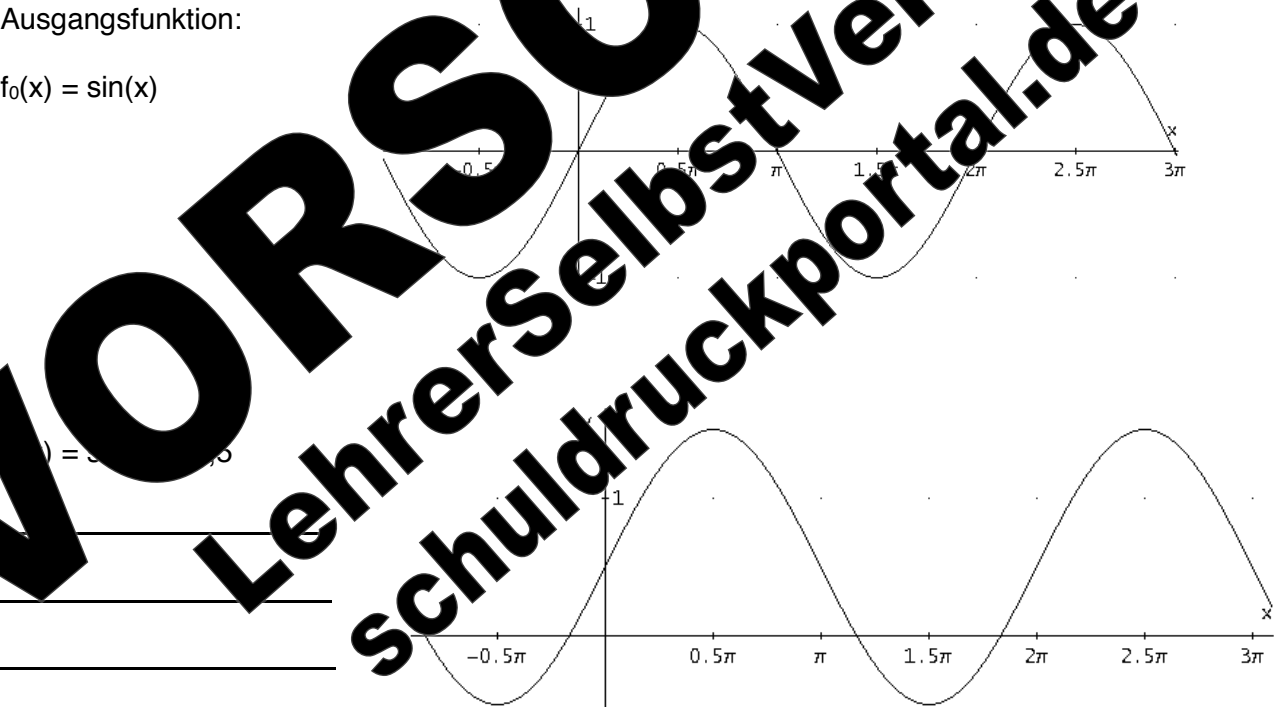
Verschieben, Strecken und Stauchen der Sinusfunktion

In den wenigsten Anwendungen tritt die Sinusfunktion in der Form $f(x) = \sin(x)$ auf. Wie bei den Parabeln kann die Sinusfunktion verschoben, gestaucht oder gestreckt sein. Die Regeln, die Sie im Kapitel 5 Aufgabe 5.2 gelernt haben, können weitgehend auf die Sinusfunktion übertragen werden.

- a) In den Abbildungen unten sind die Funktion $f(x) = \sin(x)$ und die Funktionen $f_1(x)$ bis $f_4(x)$ dargestellt. Untersuchen Sie mithilfe der Abbildungen welche Wirkung die Parameter a , b , c und d auf die Ausgangsfunktion $f_0(x) = \sin(x)$ haben. Notieren Sie die Wirkung jeweils in Stichworten.

Ausgangsfunktion:

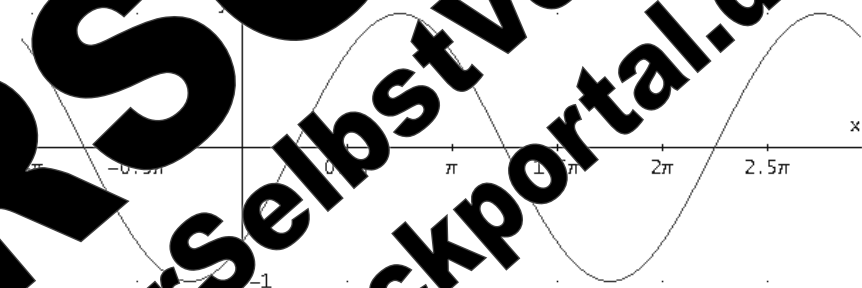
$f_0(x) = \sin(x)$



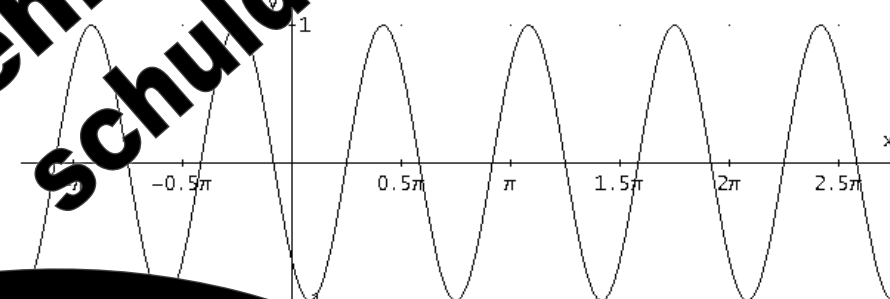
$$f_3(x) = \sin(2x)$$



$$f_4(x) = \sin(x - 0,25\pi)$$



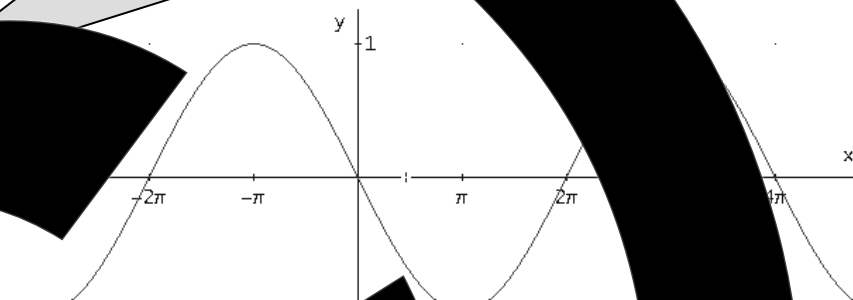
$$f_5(x) = \sin(3(x - 0,25\pi))$$



Um Verschiebungen und Stauchungen des Funktionsgraphen zu erkennen, muss man den Faktor vor dem x ausrechnen.

$$f_6(x) = \sin(0,5x - \pi)$$

$$f_6(x) = \sin(0,5x - \pi)$$



- b) Die allgemeine Form der Sinusfunktion kann wie folgt dargestellt werden. Formulieren Sie, welche prinzipielle Wirkung die Parameter a, b, c und d bei der Sinusfunktion haben, indem Sie die Texte in den Sprechblasen ergänzen. Zur Vereinfachung werden für die Parameter a und d hier nur positive reelle Zahlen betrachtet.

$a \in \mathbb{R}^+$ streckt und staucht die Funktion in ____-Richtung.

$a > 1 \rightarrow$ **strecken**
 $0 < a < 1 \rightarrow$ **stauchen**

Die Streckung bzw.

Stauchung hat _____ Einfluss auf die Lage der Nullstellen.

$$f(x) = a \sin(d(x - b) + c)$$

$d \in \mathbb{R}^+$ streckt und staucht die Funktion in ____-Richtung.

$d > 1 \rightarrow$ **strecken**
 $0 < d < 1 \rightarrow$ **stauchen**

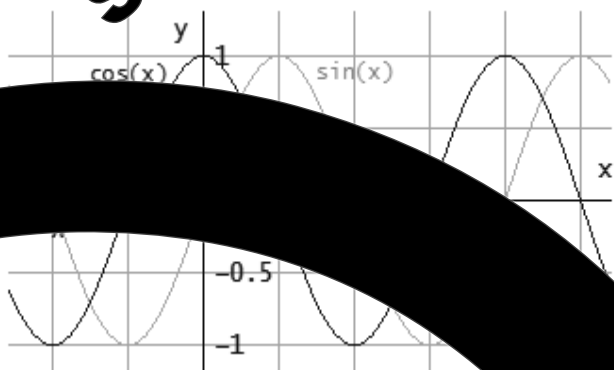
Die Streckung bzw. Stauchung hat _____ Einfluss auf die Lage der Nullstellen.

Wie bei Parabeln, verschiebt $c \in \mathbb{R}$ die Funktion in ____-Richtung.

Wie bei Parabeln, verschiebt $b \in \mathbb{R}$ die Funktion in ____-Richtung.

Information 9.2

Alle Betrachtungen zum Verschieben, Strecken und Stauchen der Sinusfunktion $f(x) = \sin(x)$ können auf die Sinusfunktion $f(x) = \cos(x)$ übertragen werden. In der folgenden Abbildung wird deutlich, dass die Cosinusfunktion $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ (vgl. Information 9.1) durch Verschiebung mit $b = -\frac{\pi}{2}$ nach links aus der Sinusfunktion hervorgeht.



Information 9.3

Die Begriffe $\sin$ und $\cos$ sind Funktionsnamen und können in der Anwendung der Umkehrfunktionen als Argument getrennt werden. Treten die Funktionsnamen innerhalb von Brüchen auf, so sind die Buchstaben bzw. Variablen nicht kürzbar.

falsches Kürzen: $\frac{\sin(x)}{x} \neq \text{six}$ oder $\frac{\cos(\pi)}{\pi} \neq \cos(\pi)$

ht's
t

Aufgabe 9.5

Bestimmen der **Periodizität p** einer gestreckten bzw. gestauchten Sinusfunktion bzw. Cosinusfunktion.

Zur Information:
Funktionen, die in gleichen Abständen auf der y-Achse die gleichen Funktionswerte haben, nennt man periodische Funktionen mit der Periode p. Formelmäßig drückt man das so aus: $f(x+p) = f(x)$

Wie Sie in Aufgabe 9.4 erkannt haben, beeinflusst der Streck- oder Stauchfaktor d der Funktionsgleichung $f(x) = a \sin(d(x - b)) + c$ die Periodizität einer Sinusfunktion. Überprüfen Sie sich anhand der Funktionen aus Aufgabe 9.4 und den folgenden Beispielen, dass man die Periodizität p einer Sinusfunktion wie folgt berechnen kann. Ergänzen Sie jeweils den Faktor d.

Funktion	Periodizität p der Funktion bestimmen	Faktor d	Periodizität p berechnen
$f_0(x) = \sin(x)$	$p = 2\pi$	1	nicht notwendig
$f_3(x) = \sin(2x)$	$p = \pi$	2	$p = \frac{2\pi}{2} = \pi$
$f_6(x) = \sin(0,5x)$	$p = 4\pi$	0,5	$p = \frac{2\pi}{0,5} = 4\pi$
$f_7(x) = \sin(x - 0,25\pi)$	Kann man nicht genau ablesen	—	$p = \frac{2\pi}{3} \approx 0,67\pi$

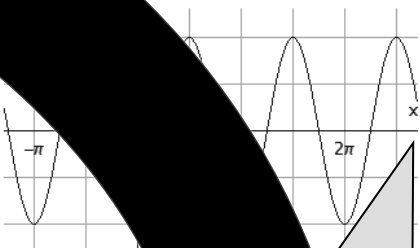
Aufgabe 9.6

Lösen von trigonometrischen Gleichungen

Da das Lösen von trigonometrischen Gleichungen mit der Berechnung von Nullstellen bei Funktionen verbunden ist, werden in diesem Kapitel Beispiele zu dieser Aufgabe gegeben.

Durch Rechnung gezeigt werden, dass die Funktion $f(x) = \sin(2(x - \frac{1}{4}\pi))$ (s. Abbildung rechts) an den Stellen

$$x_n = \frac{\pi}{4} \pm n \cdot \frac{\pi}{2} \text{ mit } n \in \mathbb{N}$$



Info:
Es ist in der Regel günstig, bei trigonometrischen Funktionen die Nullstellen der x-Achse zu bestimmen, die von π ansetzen.

Lösungsweg:

Schritt 1:
Ansatz für die Gleichung

Schritt 2:
Anwenden der Umkehrfunktion, um das Argument zu isolieren. (arcsin oder $\sin^{-1}$)

Schritt 3:
Gleichung nach x auflösen.

Schritt 4:
Periodizität berechnen

Schritt 5:
Weitere Lösungen berechnen. Da die Funktion nicht in y-Richtung verschoben ist, haben alle Nullstellen bei einer Periode von π einen Abstand von $\frac{\pi}{2}$.

$$f(x) = \sin(2(x - \frac{1}{4}\pi)) = 0$$

$$\sin(2(x - \frac{1}{4}\pi)) = \arcsin 0$$

$$2(x - \frac{1}{4}\pi) = 0$$

$$2x - \frac{1}{2}\pi = 0$$

$$2x = \frac{1}{2}\pi$$

$$x = \frac{1}{4}\pi$$

$$\text{Periodizität } p = \frac{2\pi}{d} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$$

$$x_3 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}$$

oder allgemein
$$x_n = \frac{\pi}{4} \pm n \cdot \frac{\pi}{2} \text{ mit } n \in \mathbb{N}$$

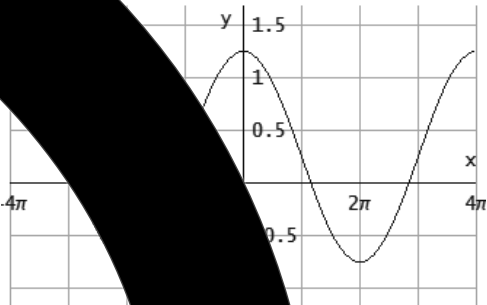
Achtung!
Aufgrund der Periodizität gibt es mehrere Lösungen.

Aufgabe 9.7:

Man kann der Abbildung rechts näherungsweise entnehmen, dass die dargestellte Cosinusfunktion für $x_{1,2} = \pm 1,2\pi$ und $x_{3,4} = \pm 2,8\pi$ Nullstellen hat. Bestimmen Sie die Nullstellen dieser in x-Richtung verschobenen Cosinusfunktion.

Die Nullstellen sollen im Intervall $[-4\pi; 4\pi]$ rechnerisch bestätigt werden.

Überprüfen Sie sich den Lösungsweg auf der folgenden Seite.



Lösungsweg:

Schritt 1:
Ansatz für die Gleichung; alle Summanden ohne x nach rechts bringen.

Schritt 2:
Anwenden der Umkehrfunktion, um das Argument zu isolieren.

Schritt 3:
Gleichung nach x auflösen

Schritt 4:
Periodizität berücksichtigen

Schritt 5:
Weitere Nullstellen berechnen

$f(x) = \cos(0,5x) - 0,25 = 0$

$\cos(0,5x) = 0,25$

$\cos(0,5x) = 0,25 \Rightarrow 0,5x = \arccos(0,25) \approx 1,1071$

$x_1 \approx 2,2142$

Achtung: Aufgrund der Periodizität gibt es weitere Lösungen.

Periodizität: $p = \frac{2\pi}{d} = \frac{2\pi}{0,5} = 4\pi$

Weitere Nullstellen im Intervall $[-4\pi; 4\pi]$

$x_2 \approx -2,2142$

$x_3 \approx -2,2142 + 4\pi \approx 10,0687$

$x_4 \approx 2,2142 - 4\pi \approx -12,4829$

Schritt 5:
Weitere Nullstellen berechnen. Da die Funktion in x-Richtung verschoben ist, haben hier jeweils drei aufeinanderfolgende Nullstellen nicht den gleichen Abstand (vgl. Abb. Bsp. 2). Aus dem Funktionsterm erkennt man, dass die Cosinusfunktion nicht in x-Richtung verschoben ist. Damit liegt, aus Symmetriegründen, zu $x_1 = 2,2142$ eine zweite Nullstelle bei $x_2 = -2,2142$. Die weiteren Nullstellen ergeben sich aus der Periodizität der Cosinusfunktion.

Information 9.4

Wie Sie sicher erkennen, sind die trigonometrischen Gleichungen der Form $\cos(x) = a$ oder $\sin(x) = a$ mit der Umkehrfunktion lösbar. Weitere Lösungen müssen ggf. durch Überlegungen gefunden werden, die die Symmetrieeigenschaften, Streckung, Verschiebung und Periodizität der Funktionen voraussetzen.

Ergebnisse:

Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Grundlegende zu Algebra und Funktionen selbstorganisiert erlernen



Kapitel Exponential- und Logarithmusfunktionen

Kapitel 10: Exponential- und Logarithmusfunktionen

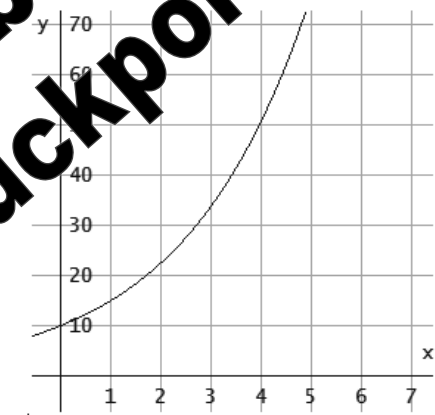
Da viele Zu- und Abnahmeprozesse in Natur und Technik nicht linear, sondern quadratisch oder exponentiell zu- und abnehmen, spielen Funktionen, die diese Prozesse beschreiben, in der angewandten Mathematik eine zentrale Rolle. Beispielhaft sind hier die Zunahme einer Population, die Abnahme der Konzentration eines Medikamentes im Blut oder auch die Abnahme der Menge eines radioaktiven Stoffes. In den beiden folgenden Aufgaben wird jeweils an einem Beispiel die Herleitung einer Funktionsgleichung für einen Wachstums- und Abnahmeprozess erarbeitet.

Aufgabe 10.1

Exponentielles Wachstum

Durch den weltweiten Handel mit Pflanzen werden aus immer weiteren Pflanzenschaublätern in Regionen eingeschleppt, in denen ein Schädling keine natürliche Fressfeinde hat und sich unkontrolliert ausbreiten kann. Ein solcher Schädling wächst exponentiell und hat sich auf einer Fläche von 10 km^2 ausgebreitet. Um das Ausbreitungsverhalten einschätzen zu können, wird die Ausbreitungsfläche monatlich neu vermessen. Die Messwerte werden in einer Tabelle registriert und in einem Diagramm dargestellt.

Zeit t in Monate	Fläche A_t in km^2
0	$A_0 = 10$
1	$A_1 = 15$
2	$A_2 = 22,5$
3	$A_3 = 33,7$
4	$A_4 = 50,625$
5	$A_5 =$
6	$A_6 =$



a) Ermitteln Sie die Ergebnisse der folgenden Quotienten.

$$\frac{A_1}{A_0} = \frac{15}{10} =$$

$$\frac{A_3}{A_2} = \frac{33,7}{22,5} =$$

$$\frac{A_4}{A_3} = \frac{50,625}{33,7} =$$

Information:

Es liegt **exponentielles Wachstum** vor, wenn der Quotient $\frac{A_{n+1}}{A_n}$ von zwei aufeinander folgenden Messwerten konstant und größer als 1 ist.

b) Überprüfen Sie an den Messwerten, dass dieser Wachstumsprozess mit der Funktion $f(t) = 10 \cdot 1,5^t$ beschrieben werden kann. Ermitteln Sie mithilfe der Funktionsgleichung die Größe der Fläche nach 5 Monaten.

Information:

Die Variable x oder hier t steht im **Exponenten**. Daher stammt auch der Name **Exponentialfunktion**.

$$f(5) = 10 \cdot 1,5^5 =$$

$$f(6) = 10 \cdot 1,5^6 =$$

Kapitel 1	Brüche, Potenzen, Wurzeln und Binome	9
Kapitel 2	Grundlegendes zu Gleichungen	59
Kapitel 3	Lineare Funktionen	63
Kapitel 4	Quadratische und biquadratische Gleichungen und Ungleichungen	77
Kapitel 5	Ganzrationale Funktion 2. Grades	87
Kapitel 6	Gleichungen 3. und höherer Grades	104
Kapitel 7	Ganzrationale Funktionen 2. und höherer Grades	115
Kapitel 8	Die Hyperbelfunktion	127
Kapitel 9	Trigonometrische Funktionen	135
Kapitel 10	Exponential- und Logarithmusfunktionen	145
Kapitel 11	Vertiefende Betrachtungen zu Betragsungleichungen	169

Gesamtwortzahl: 1.200.000 Wörter zu Algebra und Funktionen. Dieses Buch ist als Lernhilfe konzipiert und soll das Erlernen von Mathematik erleichtern.

(Bestandteile des Buches sind urheberrechtlich geschützt.)

Alle Rechte vorbehalten. All rights reserved.

Das Nachdruck, die Verbreitung und die öffentliche Zugänglichkeit, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte, die aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, ist nicht gestattet.

Das Kopieren von Texten, Bildern und anderen Inhalten ist ohne schriftliche Genehmigung des Verlegers nicht gestattet.

LehrerselbstVerlag

LehrerselbstVerlag & Freunde GmbH, Koblenz (Germany)

www.lehrerselbstverlag.de

www.f-druck.de

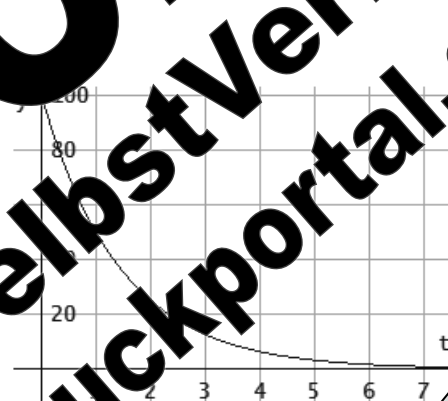
Aufgabe 10.2

Exponentielle Abnahme – Zerfallsprozesse

Radioaktives Jod 131 entsteht in Kernkraftwerken und kann bei Reaktorunfällen in die Umwelt gelangen. Nach dem Supergau in Tschernobyl wurden in einigen Gebieten in Deutschland die Böden mit diesem radioaktiven Jod so stark belastet, dass beispielsweise frisches Gemüse verkauft werden durfte und Sandkästen auf Spielplätzen für die Kinder gesperrt wurden. Radioaktives Jod hat die Eigenschaft, dass nach etwa einer Woche jeweils die Hälfte des Strahlungszerfalls ist, d.h. dass sich das Jod in das Edelgas Xenon umgewandelt hat.

- a) Ergänzen Sie die Wertetabelle für eine Ausgangsmenge $m_0 = 100$ kg radioaktives Jod 131 und überprüfen Sie die Richtigkeit ihrer Werte anhand des Graphen.

Zeit t in Wochen	Menge m in kg
0	$m_0 = 100$
1	$m_1 =$
2	$m_2 =$
3	$m_3 =$
4	$m_4 =$
5	$m_5 =$
6	$m_6 =$



Ergänzende Info:
Der Graph dieser Exponentialfunktion nähert sich der x-Achse nur an. Die Funktionswerte können den Wert 0 nicht annehmen und auch nicht negativ werden.

- b) Ermitteln Sie die Ergebnisse der folgenden Quotienten.

$$\frac{m_1}{m_0} = \frac{m_2}{m_1} = \frac{m_3}{m_2} = \frac{m_4}{m_3} = \frac{m_5}{m_4} = \frac{m_6}{m_5} =$$

Es liegt eine **exponentielle Abnahme** vor, da der Quotient **von zwei aufeinanderfolgenden Messewerten konstant** ist und **kleiner als 1** liegt.

- c) Überprüfen Sie die Ergebnisse, indem Sie die Werte in die Funktion $f(t) = 100 \cdot 0,5^t$ einsetzen. Berechnen Sie mithilfe der Funktion $f(t)$, dass nach 12 Wochen von der ursprünglichen Menge noch weniger als 30g, nur noch weniger als 10g, und schließlich noch weniger als 3g Jod vorhanden sind und zumindest durch Jod keine erhebliche Gefahr für die Bevölkerung besteht, wie es ursprünglich gegeben war. (Nach dieser Zeit wurden auch die Spielplätze wieder freigegeben.)

$$0,5^{12} =$$

Aufgabe 10.3

Vergleich von linearem, quadratischem und exponentiellem Wachstum

Die drei Abbildungen zeigen im gleichen Ausschnitt des Koordinatensystems beispielhaft den Verlauf von Funktionen, die im ersten Quadranten linear, quadratisch und exponentiell wachsen. Vergleichen Sie rein qualitativ anhand der drei folgenden Abbildungen das lineare, quadratische und exponentielle Wachstum.



In der ersten Abbildung ist $f(x) = 2x$ für $x \in [0; 2]$ dargestellt. Bei $x = 2$ ist das Wachstum, also der Zuwachs der Funktionswerte, am größten. In der zweiten Abbildung ist $f(x) = x^2$ für $x \in [0; 2]$ dargestellt. Bei $x = 2$ ist das Wachstum, also der Zuwachs der Funktionswerte, am größten. In der dritten Abbildung ist $f(x) = 2^x$ für $x \in [0; 2]$ dargestellt. Bei $x = 2$ ist das Wachstum, also der Zuwachs der Funktionswerte, am größten. Betrachtet man jedoch die Funktionswerte beispielsweise an der Stelle $x = 8$, so erkennt man, dass der Zuwachs bei der Exponentialfunktion am kleinsten und bei der Quadratischen am größten ist.

Anmerkung:
Tatsächlich wächst eine Exponentialfunktion schneller als jede Potenzfunktion.

Aufgabe 10.4

Exponentialfunktionen

Die Zusammenhänge und Eigenschaften von Exponentialfunktionen der Form $f(x) = a \cdot b^x$ sind bereits bekannt. Wenn man nun die Umkehrfunktion zur Umkehrfunktion bei diesem Funktionsverlauf wissen bereits, dass man beispielsweise bei Gleichungen der Form $x^2 = 9$ die Umkehrfunktion verwenden muss, um die Gleichung nach x aufzulösen. (Vgl. Aufgabe 8.1). Überträgt man diese Überlegung auf eine Gleichung der Form $a \cdot b^x = c$, stellt sich die Frage, mit welcher Umkehrfunktion man die Gleichung nach x auflösen kann, also wie man das x aus der Gleichung herausbekommt.

Diese Problemstellung wird in der beiden Funktionen $f(x) = 10^x$ und $g(x) = \log_{10}(x)$ bearbeitet werden.

Information:
Die Zahl e wird als **Eulersche Zahl** bezeichnet. Man kann den Zahlenwert von e berechnen, indem man auf dem Taschenrechner die Taste e^x verwendet und $x = 1$ eingibt. Man erhält: $e = 2,71...$
Die Funktion $f(x) = e^x$ nimmt in der höheren Mathematik eine zentrale Rolle ein und wird aus der Differentialrechnung bis zur Wahrscheinlichkeitsrechnung als Schwerpunktmaßnahme verwendet.

a) Die Exponentialfunktion $f(x) = 10^x$ und ihre Umkehrfunktion

- i) Füllen Sie mithilfe des Taschenrechners die Wertetabelle von links nach rechts in die Richtung „Potenzieren“ auf vier Dezimalstellen genau aus, und ordnen Sie die Funktionswerte dem richtigen Graphen zu, indem Sie den passenden Graphen mit $f(x)$ beschriften.
- ii) Suchen Sie auf Ihrem Taschenrechner eine passende Taste, mit der Sie an der rechten Spalte der Wertetabelle die Werte in der linken Spalte erzeugen können. Notieren Sie eine Bezeichnung für die erfolgte Rechenoperation unterhalb der Wertetabelle mit Pfeil, der von rechts nach links zeigt, und geben Sie den Funktionsterm der Umkehrfunktion an.

Potenzieren

Argument der Funktion	Funktionswert der Funktion
x	10^x
-1,5	
-1	
-0,5	
0	
0,5	
1	
1,5	
Funktionswert der Umkehrfunktion	Argument der Umkehrfunktion

Erinnerung:

Zu einer Funktion $f(x)$ erhält man die zugehörige Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$, indem man die Funktion an der 1. Vertikalachse spiegelt. (Vgl. Kapitel 8 Aufgabe 8.3)

Falls Sie die Aufgabenteile i) und ii) richtig bearbeitet haben, konnten Sie erkennen, dass man die Taste $\log$ auf dem Taschenrechner verwenden muss, um die Werte in der rechten Spalte der Wertetabelle zu erhalten. Die Bezeichnung „log“ steht für die mathematische Operation, die als **Logarithmieren** bezeichnet wird. Die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion $f(x) = 10^x$ wird daher als Logarithmusfunktion zur Basis 10 bezeichnet, also $f^{-1}(x) = \log_{10}(x)$.

Die Basis gibt an, welcher Zahlenwert mit welcher Potenz potenziert wurde. Wenn 10 die Basis ist, dann ist der Logarithmus mit einer indizierten 10. Gelegentlich findet man in der Literatur also auch die Bezeichnung „**lg10**“ für den dekadischen Logarithmus.

b) Die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ und ihre Umkehrfunktion

- i) Füllen Sie mithilfe des Taschenrechners die Wertetabelle von links nach rechts in die Richtung „Potenzieren“ auf vier Dezimalstellen genau aus, und ordnen Sie die Funktionswerte dem richtigen Graphen zu, indem Sie den passenden Graphen mit $f(x)$ beschriften.
- ii) Suchen Sie auf Ihrem Taschenrechner eine passende Taste, mit der Sie an der rechten Spalte der Wertetabelle durch Logarithmieren die Werte der linken Spalte erzeugen können, und geben Sie anhand der Bezeichnung der Taste auf dem Taschenrechner den Funktionsterm der Umkehrfunktion an.

Potenzieren

Argument der Funktion	Funktionswert der Funktion
x	e^x
-1,5	
-1	
-0,5	
0	
0,5	
1	
1,5	
Funktionswert der Umkehrfunktion	Argument der Umkehrfunktion

Logarithmieren

Falls Sie die Aufgabenteile i) und ii) richtig bearbeitet haben, konnten Sie erkennen, dass man die Taste $\ln$ auf dem Taschenrechner verwenden muss, um aus der rechten Spalte der Wertetabelle die Werte in der linken Spalte zu erzeugen. Die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ ist die

Da der Exponentialfunktion eine außerordentliche Bedeutung zukommt, und der Logarithmus deshalb als „**natürlicher Logarithmus**“ oder „**Logarithmus**“ bezeichnet wird, wurde vereinbart, dass man für „**log**“ die Ableitung verwendet.

Aufgabe 10

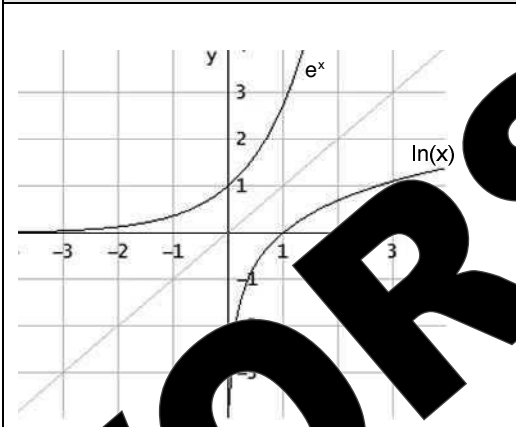
Begründen Sie, dass $e^{\ln x} = x$ (Vgl. Kapitel 8 Aufgabe 8.3)

Information 10.1

Regeln zum Umgang mit Exponential- und Logarithmusfunktionen speziell zur Basis e

Da Exponentialfunktionen zur Basis e, wie wir noch sehen werden, beispielsweise hinsichtlich der Differenzial- und Integralrechnung günstige Eigenschaften haben, spielt die Exponentialfunktion, auch einfach **e-Funktion** genannt, in Wissenschaft und Technik eine herausgehobene Rolle. Daher beziehen sich die folgenden Regeln insbesondere auf die Funktionen $f(x) = e^x$ und $f(x) = \ln(x)$. Beweise für die Regeln können in der Fachliteratur nachgelesen werden.

Wichtige Eigenschaften



$f(x) = e^x$
 $f(x) = \ln(x)$
 $\ln(1) = \ln(1) = \underline{\hspace{2cm}}$
 $f(e) = \ln(e) = \underline{\hspace{2cm}}$
 $f(0) = e^0 = \underline{\hspace{2cm}}$
 $f(\ln(0)) = \underline{\hspace{2cm}}$

Merke:

$e^1 = e$
 $\ln(1) = 0$
 $\ln(e) = 1$

Zusammenhang Funktion und Umkehrfunktion	
	$e^{\ln(x)} = x$

Umgang mit Regeln bei Exponential- und Logarithmgleichungen	
$e^x = a$ $\ln(e^x) = \ln(a)$ $x = \ln(a)$	$a = e^{\ln(a)}$

Eigenschaften bei Logarithmen		
$\ln(a)$	$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$	$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

Aufgabe 10.6

Umrechnen einer Exponentialfunktion mit einer beliebigen Basis b in eine Exponentialfunktion zur Basis e

In Naturwissenschaft und Technik ist es üblich, exponentielle Zusammenhänge mithilfe von Exponentialfunktionen der Form $f(x) = a \cdot b^x$ so umzuformen, dass man eine Funktion zur Basis e erhält. Begründen Sie den Ansatz (1) und erläutern Sie die Umformungsschritte.

Erinnerung:
Exponentialfunktionen mit der Basis e werden in der Regel als **e-Funktion** bezeichnet.

Aufgabenstellung: $f(x) = a \cdot b^x$ so umformen, dass man für $f(x)$ einen veränderten Funktionsterm der Form $f(x) = \dots$ erhält.

- (1) $a \cdot e^{z(x)} = a \cdot b^x$ (1) $\underline{\hspace{2cm}}$
- (2) $e^{z(x)} = b^x$ (1) $\rightarrow$ (2) $\underline{\hspace{2cm}}$
- (3) $\ln(e^{z(x)}) = \ln(b^x)$ (2) $\rightarrow$ (3) $\underline{\hspace{2cm}}$

- (4) $z(x) = x \ln(b)$ (4) $\rightarrow$ (5) $\underline{\hspace{2cm}}$
- (6) $f(x) = a \cdot e^{x \ln(b)}$ (5) $\rightarrow$ (6) $\underline{\hspace{2cm}}$

Einsetzen in den folgenden Zusammenhang ein.

Exponentialfunktion mit beliebiger Basis b in eine e-Funktion umformen.:	$f(x) = a \cdot b^x$	$f(x) = a \cdot e^{x \ln(b)}$
--	----------------------	-------------------------------

Übungen

Ü10.1
Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich, **ohne den Taschenrechner** zu verwenden. Wenden Sie dabei die Potenzgesetze aus Kapitel 1 und die Regeln aus Information 10.1 an. Orientieren Sie sich am Beispiel.

Beispiel:
$$e^{-\frac{1}{2}\ln(a)} = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}\ln(a)}} = \frac{1}{e^{\ln(a)^{\frac{1}{2}}}} = \frac{1}{e^{\ln\sqrt{a}}} = \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$$

Anwendung des Zusammenhangs zwischen Potenzfunktion und Logarithmusfunktion: „e“ und „ln“ heißen sich gegenseitig weg!

- a) $e^{\ln(2)}$ = _____
- b) $e^{\ln(a)}$ = _____
- c) $e^{\ln(1)}$ = _____
- d) $e^{\ln(e)}$ = _____
- e) $e^{-\ln(a)}$ = _____
- f) $e^{\ln(a)^2}$ = _____
- g) $e^{2\ln(3)}$ = _____
- h) $e^{3\ln(e)}$ = _____
- i) $e^{-2\ln(4)}$ = _____
- j) $e^{\ln(e)^2}$ = _____
- k) $e^{\frac{1}{2}\ln(e)}$ = _____
- l) $e^{\ln(e^2)}$ = _____
- m) $e^{-\frac{1}{2}\ln(1)}$ = _____
- n) $e^{-\ln(\frac{1}{3})}$ = _____

Lösungssatz für sortierter Reihenfolge:
1. $\frac{1}{6}$, e , e^3 , $\sqrt{e}$, a , $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, ungültiger Ausdruck

Ü10.2
Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich, **ohne den Taschenrechner** zu verwenden. Wenden Sie dabei die Potenzgesetze aus Kapitel 1 und die Regeln aus Information 10.1 an. Orientieren Sie sich am Beispiel.

Beispiel:
$$\ln\left(\frac{1}{\sqrt[3]{e}}\right) = \ln\left(\frac{1}{e^{\frac{1}{3}}}\right) = \ln\left(e^{-\frac{1}{3}}\right) = -\frac{1}{3}\ln(e) = -\frac{1}{3}$$

- a) $\ln(e)$ = _____
- b) $\ln(e^2)$ = _____
- c) $\ln(e^a)$ = _____
- d) $\ln(1)$ = _____
- e) $\ln(e^0)$ = _____
- f) $\ln(e^{-4})$ = _____
- g) $\ln(e^{-2})$ = _____
- h) $\ln(e^{-a})$ = _____
- i) $\ln(e^{\frac{1}{2}})$ = _____
- j) $\ln(e^{\frac{1}{2}})$ = _____
- k) $\ln(\sqrt[3]{e})$ = _____
- l) $\ln(\sqrt{e})$ = _____
- m) $\ln(\sqrt{e^k})$ = _____
- n) $\ln\left(\frac{1}{e}\right)$ = _____
- o) $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ = _____
- p) $\ln\left(-\frac{1}{e}\right)$ = _____
- q) $\ln\left(-\frac{1}{e}\right)$ = _____
- r) $\ln\left(\sqrt{\frac{2}{e}}\right)$ = _____
- s) $\ln\left(\sqrt{\frac{2}{e}}\right)$ = _____

Lösungssatz für unsortierter Reihenfolge:
1. ungültiger Ausdruck, 0, 0, 1, 1, -1, -1, 2, -2, -2, -2, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}$

Aufgabe 10.7

Lösen von Exponentialgleichungen zur Basis e

Wie bei Potenzgleichungen (vgl. im Kapitel 6) gibt es auch bei der Lösung von Exponentialgleichungen unterschiedliche Lösungsverfahren. Einige häufig auftretende Verfahren werden exemplarisch jeweils an einem Beispiel vorgestellt. Es handelt sich hierbei lediglich um Lösungsvorschläge, da meist auch alternative Vorgehensweisen möglich sind. Erläutern Sie für die in den Beispielen vorgestellten Lösungswege die von Zeile zu Zeile erfolgten Umformungen.

Beispiel 1:

Die Lösungsvariable kommt nur in einem exponentiellen Term vor

Form: $e^{ax+b} = b$

(1) $3e^{2x+1} - 6 = 0$

(2) $3e^{2x+1} = 6$

(3) $e^{2x+1} = 2$

(4) $\ln(e^{2x+1}) = \ln(2)$

(5) $(2x+1) \cdot \ln(e) = \ln(2)$

(6) $2x = \frac{\ln(2) - 1}{2} \approx -0,19$

(1)→(2):

(2)→(3):

(3)→(4):

(4)→(5):

(5)→(6):

(6)→(7):

Beispiel 2:

Die Lösungsvariable kommt in mehreren exponentiellen Summanden vor, ein rationaler Term fehlt

Im Gegensatz zu Beispiel 1, in dem die Lösungsvariable nur in einem exponentiellen Term vorkam, kommt sie hier in mehreren Summanden vor. Da die Summanden nicht durch x dividierbar sind, kann diese Gleichung algebraisch nicht gelöst werden. Man muss dann mit Näherungsverfahren oder zeichnerischen Methoden arbeiten.

Algebraisch nicht lösbar

Exponentialgleichung

$e^x - x = 0$

$\ln(e^x - x) = \ln(0)$

Die Anwendung von ln auf beiden Seiten der Gleichung führt dazu, dass das x nun nicht mehr im Exponenten von e erscheint, dafür aber im Argument des Logarithmus. Da der Logarithmus nicht für Null definiert ist, kann die Gleichung nicht nach x aufgelöst werden.

Lösung durch Faktorisieren

(1) $xe^x + 4x = 0$

(2) $x(e^x + 4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

(3) $e^x + 4 = 0$

(4) $e^x = -4 \Rightarrow$ keine weitere Lösung

(1)→(2):

(2)→(3):

(3)→(4):

Beispiel 3:

Die Lösungsvariable kommt in mehreren exponentiellen Summanden vor, ein rationaler Term fehlt

Form: $ae^{bx} + ce^{dx} = e$

(1) $e^{2x} - e^{-x} = 0$

(2) $e^{2x} = e^{-x}$

(3) $e^{3x} = 1$

(4) $\ln(e^{3x}) = \ln(1)$

(5) $3x = \ln(1)$

(6) $x = \frac{\ln(1)}{3} = 0$

(1)→(2):

(2)→(3):

(3)→(4):

(4)→(5):

(5)→(6):

Bei Gleichungen, die nicht durch x dividierbar sind, kann diese Gleichung algebraisch nicht gelöst werden. Man muss dann mit Näherungsverfahren oder zeichnerischen Methoden arbeiten.

Form: $ae^{bx} + ce^{dx} = e$

(1) $e^{2x} - e^{-x} = 0$

(2) $e^{2x} = e^{-x}$

(1)→(2):

(2)→(3):

Algebra und Analysis 1 © Ursula Pirkel

02-08-2014 Lehrerselbstverlag

176

Kapitel 10

Exponential- und Logarithmusfunktionen

177

(1) $\ln(ax^2 + bx + c) = d$

(2) $e^{\ln(ax^2 + bx + c)} = e^d$

(3) $ax^2 + bx + c = e^d$

(4) $ax^2 + bx + c - e^d = 0$

(1)→(2): _____

(2)→(3): _____

(3)→(4): _____

Entstandene Gleichung mit herkömmlichen Methoden lösen, hier beispielsweise mit der _____ Formel

Beispiel 2:

Die Gleichung besteht aus einem Produkt mit einem rationalen und einem logarithmischen Faktor. Beide Faktoren enthalten die Lösungsvariable.

a) **Form: $ax \cdot \ln(bx + c) = 0$**

Definitionsbereich:

$D = \{x \mid bx + c > 0\}$

$= \{x \mid x > -\frac{c}{b}\}$

(1) $ax \cdot \ln(bx + c) = 0$

(2) $ax = 0 \vee \ln(bx + c) = 0$

$e^{\ln(bx + c)} = e^0$

(4) $bx + c = 1$

(5) $x_1 = 0 \vee x_2 = -\frac{c}{b} + 1$

(1)→(2): _____

(2)→(5): _____

b)

Definitionsbereich:

$D = \{x \mid bx > 0\}$

(1) $ax \cdot \ln(bx) = 0$

(2) $ax = 0$

(3) $\ln(bx) = 0$

$e^{\ln(bx)} = e^0$

$bx = 1$

$x_2 = \frac{1}{b}$

(2)→(3): _____

Beispiel 3

Die Gleichung hat keinen konstanten, jedoch mehrere logarithmische Summanden, welche die Lösungsvariable enthalten.

Form: $\ln(2 - x) + \ln(x) = 0$

Definitionsbereich:

$D = \{x \mid 2 - x > 0 \wedge x > 0\}$

$= \{x \mid 0 < x < 2\}$

Beide Terme $\ln()$ haben eine um x veränderliche D so angeben, damit beide Terme kein unterschiedliches Argument enthalten können

Diese Gleichung kann man auf zwei verschiedenen Wegen lösen.

Lösungsweg 1:

(1) $\ln(2 - x) + \ln(x) = 0$

(2) $e^{\ln(2 - x) + \ln(x)} = e^0$

(3) $e^{\ln(2 - x)} \cdot e^{\ln(x)} = 1$

(4) $2x - x^2 = 1$

(5) $x^2 - 2x + 1 = 0$

(6) $x_{1,2} = 1$

(1)→(2): Regel _____ anwenden

(2)→(3): _____

(3)→(4): _____

(4)→(5): _____

(5)→(6): _____

Lösungsweg 2:

(1) $\ln(2 - x) + \ln(x) = 0$

(2) $e^{\ln(2 - x) + \ln(x)} = 1$

(3) $e^{\ln(2 - x)} \cdot e^{\ln(x)} = 1$

(4) $(2 - x) \cdot x = 1$

(5) $2x - x^2 = 1$

(6) $x^2 - 2x + 1 = 0$

(7) $x_{1,2} = 1$

(2)→(3): Regel _____ anwenden

(3)→(4): _____

(4)→(5): _____

(5)→(6): _____

(6)→(7): _____

Beispiel 4:

Algebraisch **nicht lösbare** Logarithmengleichung

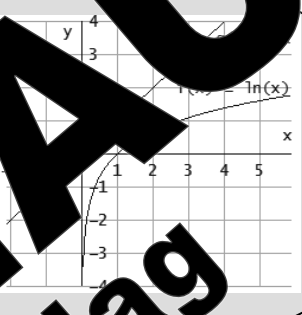
$$\ln(x) - x = 0$$

$$\ln(x) = x$$

$$e^{\ln(x)} = e^x$$

$$x = e^x$$

Anhand der graphischen Darstellung erkennt man, dass es keine Lösung gibt. (Vergleichen Sie auch die Aufgabenstellung.)



Übung 10.4

Ermitteln Sie den Definitionsbereich der folgenden Gleichungen nach x auf. Geben Sie das Ergebnis ggf. auf zwei Dezimalstellen gerundet an.

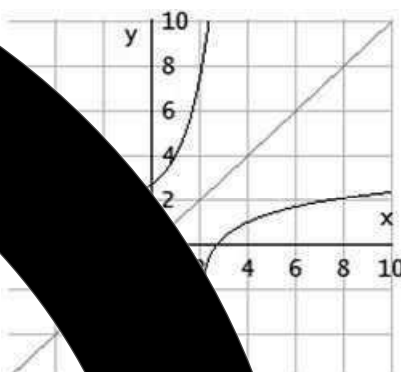
- a) $\ln(x) = 3$
b) $\ln(x) = -2$
c) $\ln(x) = 0$
d) $\ln(4x) = 0$
- e) $\ln(e^x) = 0$
f) $\ln(x-1) = 0$
g) $\ln(x-6) = 9$
h) $5\ln(x-7) = 1$
- i) $\ln(x+1) = \ln(x^2-1)$
j) $\ln(4x) = 4\ln(x)$
k) $\ln(x^2) + \ln(x) = 0$
l) $\ln(x^2) + \ln(8x) = 0$

- Lösungen und Rechenhilfen:
keine Lösung

$x = 1$
 $x = e^{-2} \approx 0,14$
 $x = e^3 \approx 20,09$
 $x = \sqrt[5]{e} + 7 \approx 8,22$
- $x_1 = -2; x_2 = -4$
 $x = 2$

$x = -0,5$
 $x = 0,25$

Übung 10.5

- Die Abbildung zeigt die Funktion $f(x) = e^x$ und die Gerade $y = x$.
a) Geben Sie die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ an und geben Sie den Definitionsbereich von $f(x)$ und $f^{-1}(x)$ an.
b) Zeigen Sie durch Rechnung, dass der y-Achsenabschnitt von $f(x)$ und die Nullstelle von $f^{-1}(x)$ denselben Zahlenwert haben.
- 

Zur Kontrolle: Der y-Achsenabschnitt von $f(x)$ ist auf zwei Dezimalstellen gerundet: 2,74

Ergebnisse:

Aufgabe 10.9

Verschieben, Stauchen, Strecken und Spiegeln der e-Funktion

Sie haben die Regeln, die beim Verschieben, Stauchen und Strecken von Funktionen zu beachten sind, bereits bei den quadratischen Funktionen (Parabeln) und bei den trigonometrischen Funktionen kennen gelernt und mit Sicherheit festgestellt, dass die Parameter in den Funktionsgleichungen weitgehend gleiche Wirkungen haben. Anhand von geeigneten Beispielen soll nun gezeigt werden, dass dieses Regelwerk, mit kleinen Unterschieden, auch auf Exponentialfunktionen übertragen werden kann.

a) Verschieben der Funktion $f(x) = e^x$ in y-Richtung

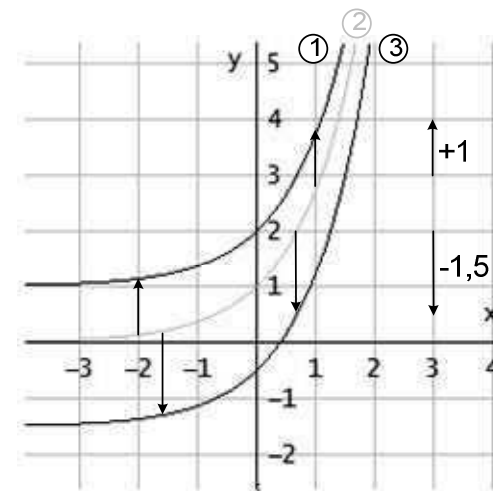
Zur Erinnerung:
 $f(x) = x^2 + c$ ist eine Parabel, die um c nach oben ($c > 0$) oder unten ($c < 0$) verschoben ist.
 $f(x) = \sin(x) + c$ ist eine Sinuskurve, die um c nach oben ($c > 0$) oder unten ($c < 0$) verschoben ist.

Wenn man die Formeln für Parabeln und trigonometrische Funktionen gütlich zusammenhängt auf die Funktion $f(x) = e^x$ an, so erhält man die Funktionsgleichungen $f(x) + c = e^x + c$ mit $c \in \mathbb{R}$.

Die Abbildung rechts sind die Funktionen

- $h_1(x) = e^x + 1$
- $f(x) = e^x$
- $h_2(x) = e^x - 1,5$

dargestellt. Erklären Sie, wie die Funktionen h_1 und h_2 aus f durch Verschieben entstehen. Geben Sie die Abbildungsbilder der Funktionen h_1 und h_2 an.



Die Funktionsgleichung von $f(x) = e^x$ wird der Parameter c hinzugefügt, so dass die Funktion $h(x) = e^x + c$ entsteht. Für $c > 0$ wird die Funktion $f(x)$ nach oben verschoben und für $c < 0$ wird die Funktion $f(x)$ nach unten verschoben. Damit gelten für das Verschieben von Funktionen in y-Richtung die gleichen Regeln wie beim Verschieben von Parabeln oder Sinuskurven in y-Richtung.

b) Verschieben der Funktion $f(x) = e^x$ in x-Richtung

Zur Erinnerung:
 $f(x) = (x - b)^2$ ist eine in x-Richtung verschobene Normalparabel.
 $f(x) = \sin(x - b)$ ist eine in x-Richtung verschobene Sinusfunktion.

Wendet man den für Parabeln und trigonometrischen Funktionen gültigen Zusammenhang auf die e-Funktion $f(x) = e^x$ an, so erhält man die Funktion $h(x) = e^{x-b}$ mit $b \in \mathbb{R}$. In der Abbildung rechts sind die Funktionen

- ① $h_1(x) = e^{x-2}$
- ② $f(x) = e^x$
- ③ $h_2(x) = e^{x+\ln(10)}$

dargestellt. Ergänzen Sie die Abbildung mit den folgenden Funktionen:

Im Exponenten der Funktionsgleichung von $f(x) = e^x$ wird der Parameter b mit $b \in \mathbb{R}$ hinzugefügt, sodass die Funktion $f(x) = e^{x+b}$ entsteht. Für $b > 0$ wird die Funktion $f(x) = e^x$ nach _____ und für $b < 0$ wird die Funktion $f(x) = e^x$ nach _____ verschoben. Damit gelten für das Verschieben von e-Funktionen in x-Richtung prinzipiell die gleichen Regeln wie beim Verschieben von _____ oder _____ in x-Richtung.

Man muss jedoch die folgende Besonderheit beachten.

Besonderheit beim Verschieben in x-Richtung!

Erläutern Sie die Wirkung eines Vorfaktors vor dem Exponenten. Ergänzen Sie den Kasten vervollständigen.

Bei der e-Funktion beeinflusst ein Vorfaktor $k \in \mathbb{R}^+$ vor dem Term e^x eine Verschiebung, während bei den Parabeln und trigonometrischen Funktionen durch einen entsprechenden Vorfaktor eine Streckung in _____-Richtung erfolgt.

$f(x) = k \cdot e^x$ mit $k > 0$ bewirkt eine Streckung in _____-Richtung.

Stellen Sie die Funktion $h(x) = k \cdot e^x$ in der Schreibweise $h(x) = k \cdot e^x$ dar.

h(x) = _____
 h(x) = _____
 h(x) = _____

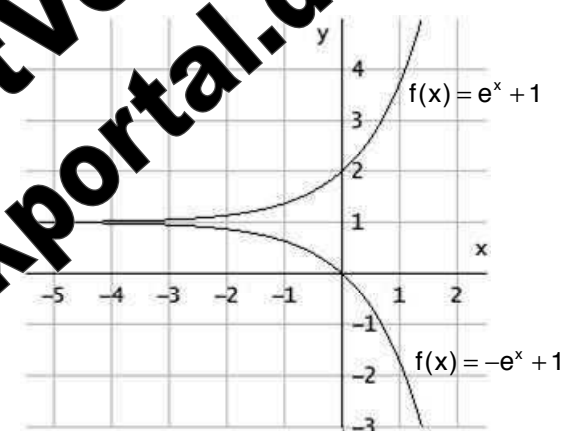
c) Spiegeln von e-Funktionen an einer Geraden $y = c$

Wie Sie in Aufgabenteil b) erkannt haben, bewirkt ein positiver reeller Vorfaktor vor der Funktionsterm e^x eine Verschiebung der Funktion in x-Richtung. Berechnen Sie, wie sich ein negatives Vorzeichen vor diesem Vorfaktor auswirkt.

Begründen Sie, warum bei der folgenden Umformung das Minuszeichen vor dem Faktor $k \in \mathbb{R}^+$ nicht in den Exponenten der Funktion übernommen werden kann:

$$f(x) = -k e^x = -e^{\ln(k)} e^x = -e^{x + \ln(k)} \quad \text{mit } k \in \mathbb{R}^+$$

Erläutern Sie anhand der Abbildung die Wirkung des Minuszeichens.

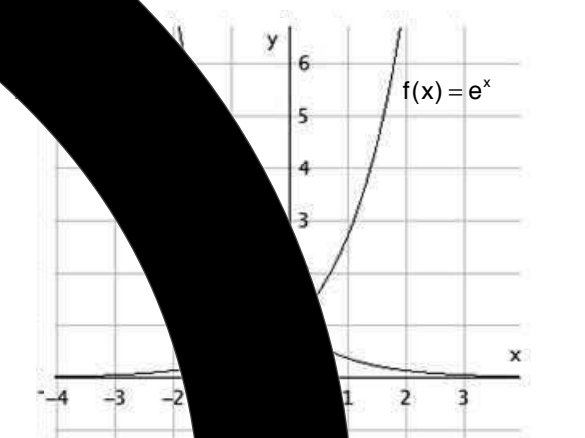


d) Spiegeln an der y-Achse sowie Strecken und Stauchen bei e-Funktionen

Wie Sie unter Aufgabenteil b) erkannt haben, können die Eigenschaften hinsichtlich des Streckens und Stauchens von den Parabeln und trigonometrischen Funktionen nicht direkt auf die e-Funktionen übertragen werden. Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke und erläutern Sie die Zusammenhänge beim Spiegeln an der y-Achse.

Regeln an der y-Achse

Durch ein negatives Vorzeichen im Exponent wird eine e-Funktion an der y-Achse gespiegelt. Man muss dabei beachten, dass die Funktion mit einem negativen Exponenten e^{-x} auch als $\frac{1}{e^x}$ geschrieben werden kann.



Strecken und Stauchen in y-Richtung

In der Abbildung rechts sind die Funktionen

- ① $h_1(x) = e^{3x} = (e^x)^3$
- ② $f(x) = e^x$
- ③ $h_2(x) = e^{0,5x} = \sqrt{e^x}$

dargestellt.
Ergänzen Sie in der Abbildung rechts zunächst die Funktionen

- ④ $h_3(x) = e^{-3x} = \frac{1}{e^{3x}} = \frac{1}{(e^x)^3} = \left(\frac{1}{e^x}\right)^3$
- ⑤ $h_4(x) = e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- ⑥ $h_5(x) = e^{-0,5x} = \frac{1}{\sqrt{e^x}}$

und danach den folgenden Teil.

Im Exponenten der Funktion $f(x) = e^x$ wird der Fall a mit $a \in \mathbb{R}$ hinzugefügt, so dass die Funktion $h(x) = e^{ax}$ entsteht. Wenn a ein positiver Parameter a wird die Funktion _____ und _____.
Vorzeichenwechsel beim Parameter a bewirkt eine _____ der Funktion in der y-Richtung.

Zusammenfassung der Eigenschaften der Funktion hinsichtlich des Streckens, Stauchens und Spiegels. Ergänzen Sie die Texte in den Sprechblasen.

Strecken, Stauchen und Spiegeln

$|a| > 1 \rightarrow$ strecken in ____-Richtung

$0 < |a| < 1 \rightarrow$ stauchen in ____-Richtung

_____ Wechsel von a bewirkt eine _____

$$f(x) = e^{ax-b} + c = e^{ax} \cdot e^{-b} + c = e^{ax} \cdot \frac{1}{e^b} + c = \frac{1}{e^b} \cdot e^{ax} + c$$

Wie bei anderen Funktionsklassen verschiebt der Parameter c die Funktion in ____-Richtung.

b verschiebt die Funktion in Richtung ____-Achse:

$b > 0 \rightarrow$ verschiebt die Funktion in ____-Richtung

$b < 0 \rightarrow$ verschiebt die Funktion in ____-Richtung

Ein weiterer Parameter c verschiebt die Funktion in ____-Richtung.

_____ die Funktion an der Geraden $y = c$,
beachten, dass gilt: $-be^{ax} + c = -e^{ax + \ln(b)} + c$

Übungen:

Aufgabe 10.10

Verschieben, Strecken, Stauchen und Spiegeln der Funktion $f(x) = \ln(x)$

Bereits gewonnene Erkenntnisse hinsichtlich des Verschiebens, Streckens, Stauchens und Spiegels bei Parabeln, trigonometrischen Funktionen und e-Funktionen können weiter und auch auf das Verhalten der Logarithmusfunktionen übertragen werden. Was bei e-Funktionen besonders beachtet werden. Zur Veranschaulichung der Verschiebung sind für $x \in \mathbb{R}^+$ in den Abbildungen jeweils die Funktion $f(x) = \ln(x)$ und eine weitere Logarithmusfunktion gegeben.

a) Verschieben von $f(x) = \ln(x)$ in y-Richtung

Verdeutlichen Sie sich die folgende Rechnung:

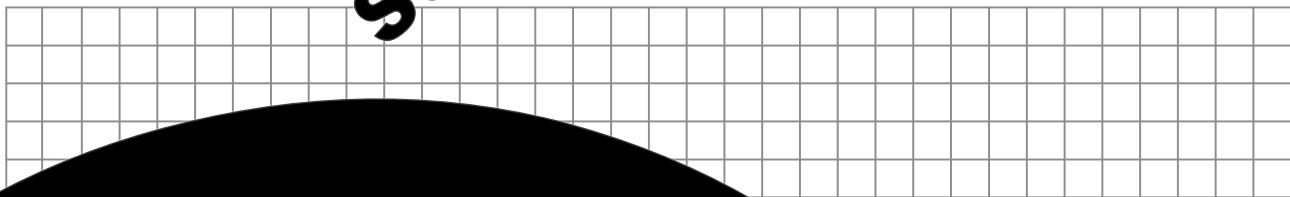
$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) + c \text{ mit } c \in \mathbb{R} \\ h(x) &= \ln(x) + c \\ h(x) &= \ln(x) + \ln(e^c) \\ h(x) &= \ln(e^c \cdot x) \\ h(x) &= \ln(k \cdot x) \text{ mit } k = e^c \end{aligned}$$

Ermitteln Sie die Abbildung aus der Abbildung rechts. Die Funktionsgleichung $h(x)$ in der Form $h(x) = \ln(k \cdot x) + c$ wie $\ln(x) = \ln(k \cdot x)$

$$h(x) = \ln(k \cdot x) + c = \ln(x) + \ln(k) + c$$

und ergänzen Sie die Funktion $h_2(x) = \ln(e^{-1} \cdot x)$

in der Abbildung. Formen Sie dazu den Funktionsterm in geeigneter Weise um.



$$h(x) = \ln(k \cdot x) + c = \ln(x) + \ln(k) + c$$

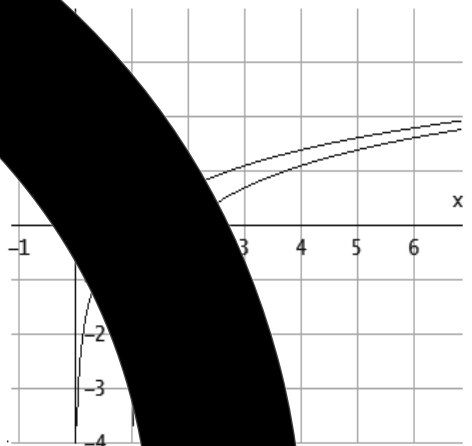
Verdeutlichen Sie sich die folgende Rechnung, und ermitteln Sie die Funktionsgleichung von $h(x)$ durch Ablesen aus der Abbildung rechts. Beschriften Sie zuvor die abgebildeten Graphen mit $f(x)$ und $h(x)$.

$$h(x) = f(x) + c$$

$$h(x) = \ln(x) + c$$

$$h(x) = \ln(x) + c = \ln(x) + \ln(e^c) = \ln(e^c \cdot x) \text{ für } x > 0$$

Zeichnen Sie in der Abbildung den Graph der Funktion $h(x) = \ln(x + 1)$ für $x > -1$.



c) Strecken und Stauchen der Funktion $f(x) = \ln(x)$ in y-Richtung

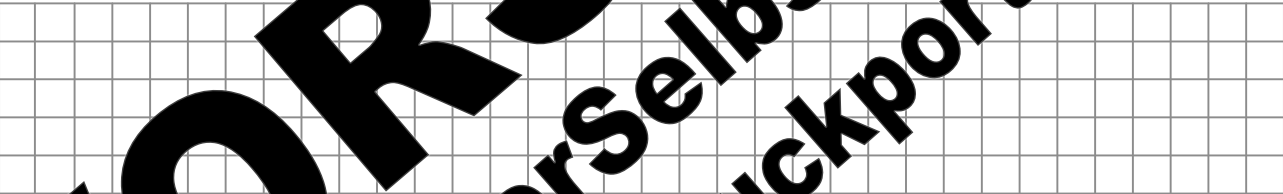
Verdeutlichen Sie sich die folgende Rechnung, und ermitteln Sie die Funktionsgleichung von $h_1(x)$ durch Ablesen aus der Abbildung rechts.

$$\begin{aligned} h(x) &= a \cdot f(x) && \text{für } a \in \mathbb{R}^+ \\ h(x) &= a \ln(x) \\ h(x) &= \ln(x^a) \end{aligned}$$

Funktionsgleichung $h_1(x)$ in beiden Darstellungsarten:

$$h_1(x) = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

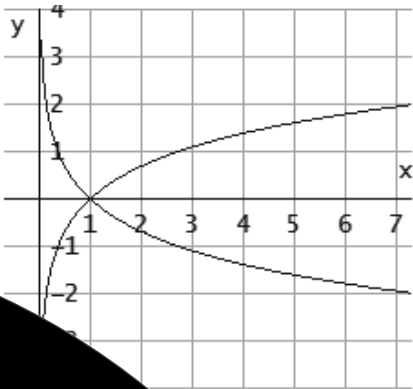
Ergänzen Sie in der Abbildung den Graphen der Funktion $h_2(x) = \ln(\sqrt{x})$. Formen Sie den Funktionsterm in geeigneter Weise um.



d) Spiegeln der Funktion $f(x) = \ln(x)$ bzw. $h(x) = a \ln(x)$ an der x-Achse

Verdeutlichen Sie sich die folgende Rechnung, und beschreiben Sie die Graphen in der Abbildung mit $f(x)$ und $h(x)$.

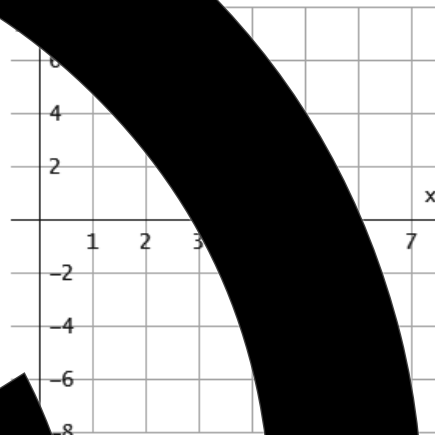
$$\begin{aligned} h(x) &= -f(x) \\ h(x) &= -\ln(x) = \ln(x^{-1}) = \ln\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$



Skizzieren Sie die Funktionen $h_1(x) = \ln(x^3)$ und $h_2(x) = \ln(x^{-3})$ im Koordinatensystem rechts. Ergänzen Sie den anschließenden Satz. Für $a \in \mathbb{R}$, in der Funktion $h(x) =$

$$\begin{aligned} |a| &> 1 && \underline{\hspace{2cm}} \\ 0 < |a| &< 1 && \underline{\hspace{2cm}} \end{aligned}$$

Ein Vorzeichenwechsel vor dem Betrag von a bewirkt eine Spiegelung an der $\underline{\hspace{1cm}}$ -Achse.



e) Spiegeln der Funktion $f(x) = \ln(x)$ an der y-Achse

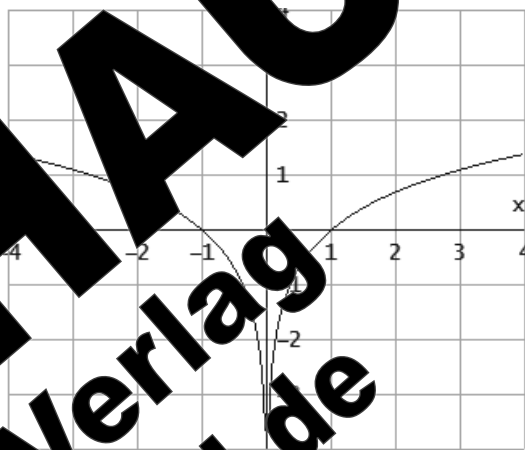
Da der Logarithmus für $x \leq 0$ nicht definiert ist, arbeitet man bei der Logarithmusfunktion oft mit Beträgen im Argument der Logarithmusfunktion.

Betragszeichen kann man weglassen, wenn man den Ausdruck, der in Betragsstrichen steht, einmal mit einem positiven und einmal mit einem negativen Vorzeichen versieht. (Vgl. Aufgabe 10.1)

$$f(x) = f(|x|) = \ln(|x|) \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \ln(x) & \text{für } x > 0 \\ \ln(-x) & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Ergänzen Sie in der Abbildung den Graphen zur Funktion $h(x) = \ln(|x|)$.

$$h(x) = \ln(|x|) = \begin{cases} \ln(x) & \text{für } x > 0 \\ \ln(-x) & \text{für } x < 0 \end{cases}$$



f) Zusammenfassung der Eigenschaften der Logarithmusfunktion hinsichtlich des Streckens, Stauchens und Spiegeln. Ergänzen Sie die Texte in den Sprechblasen.

Der Parameter $a \in \mathbb{R}$ **streckt** bzw. **staucht** die Funktion.

$|a| > 1$ **strecken** in $\underline{\hspace{1cm}}$ -Richtung

$0 < |a| < 1$ **stauchen** in $\underline{\hspace{1cm}}$ -Richtung

Für $c = 0$ wird die Funktion **verschoben** um $\underline{\hspace{1cm}}$.

Prüfen Sie dass gilt: $-\ln(|x|) = \ln(\underline{\hspace{1cm}})$

$$h(x) = a \ln(|x - b|) + c = \ln(|x - b|^a) + c$$

Die Funktion $h(x) = a \ln(|x - b|) + c$ ist eine Verschiebung von $f(x) = \ln(x)$ in

→ **verschieben nach** $\underline{\hspace{1cm}}$

→ **verschieben nach** $\underline{\hspace{1cm}}$

Wie bei anderen Funktionen verschiebt der Parameter $c \in \mathbb{R}$ die Funktion in $\underline{\hspace{1cm}}$ -Richtung.

Beachten Sie, dass bei Logarithmusfunktionen gilt:

$$\ln(x - b) = \ln(x - b) + c$$



Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Grundlegende zu Algebra und Funktionen selbstorganisiert erlernen



Kapitel

Vertiefende Betrachtung
Gleichungen

Kapitel 1	
Brüche, Potenzen, Wurzeln und Binome	9
Kapitel 2	
Grundlegendes zu Gleichungen	59
Kapitel 3	
Lineare Funktionen	63
Kapitel 4	
Quadratische und biquadratische Gleichungen und Ungleichungen	77
Kapitel 5	
Ganzrationale Funktion 2. Grades	87
Kapitel 6	
Gleichungen 3. und höherer Grades	104
Kapitel 7	
Ganzrationale Funktionen 2. und höherer Grades	115
Kapitel 8	
Die Hyperbelfunktion	127
Kapitel 9	
Trigonometrische Funktionen	135
Kapitel 10	
Exponential- und Logarithmusfunktionen	145
Kapitel 11	
Vertiefende Betrachtung von Betragsungleichungen	169

Kapitel 11: Vertiefende Betrachtung von Betragsungleichungen

Während in Kapitel 4 die Betragsungleichungen nur gestreift wurden, sollen nun ausführlichere Betrachtungen angestellt werden, wobei ein Schwerpunkt in der graphischen Darstellung der Lösungsmenge anhand von Diagrammen liegt.

Aufgabe 11.1

Lineare Betragsgleichungen, in denen ein Betrag auftritt

- a) Verdeutlichen Sie sich die Vorgehensweise im Lösen anhand der drei Beispiele und verfahren Sie bei den folgenden Aufgabe analog dazu.

Beispiel 1: Betragsungleichung $|x - 2| \geq 1$

Algebraische Lösung

$$\begin{aligned}
 |x - 2| &\geq 1 \\
 x - 2 &\geq 1 \quad \vee \quad x - 2 \leq -1 \\
 x &\geq 3 \quad \vee \quad x \leq 1 \\
 IL &= (-\infty; 1] \cup [3; \infty)
 \end{aligned}$$

Falsche Interpretation beim Weglassen der Betragsstriche

Wenn man die Betragsstriche weglässt, erhält man die allgemeine Form, die zwischen den Betragsstrichen steht einmal ein positives und einmal ein negatives Vorzeichen. Vgl. Kapitel 4 Aufgabe 4.3

Die Lösungsmenge kann dann in der folgenden Form mit Hilfe von Intervallen angegeben werden.

Offene Klammer:
Das Intervall ist auf dieser Seite nicht begrenzt.

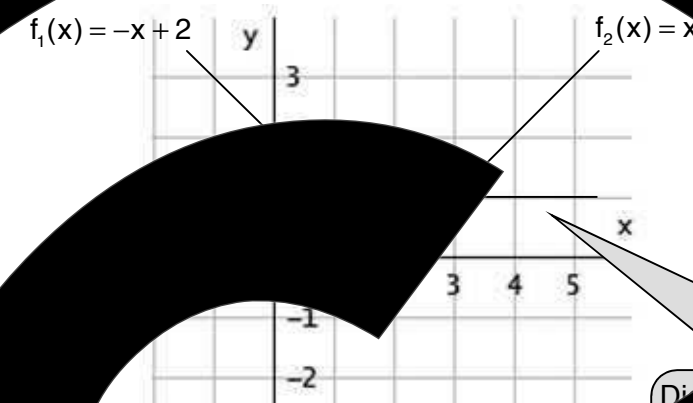
Eckige Klammer:
Das Intervall endet mit + bzw. beginnt bei 3.

Man fasst die linke Seite der Ungleichung als lineare Betragsfunktion

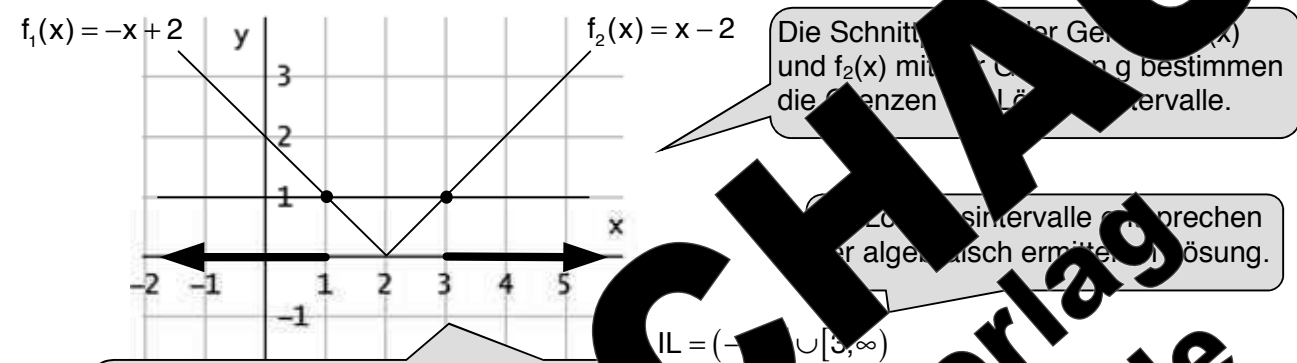
$f(x) = |x - 2|$ auf. Durch das Weglassen der Betragsstriche erhält man die beiden Geraden $f_1(x) = -x + 2$ und $f_2(x) = x - 2$

Die beiden Geraden werden in einem Diagramm im ersten und zweiten Quadranten eingezeichnet, denn die Funktionen sind antisymmetrisch wegen des Betragsstriches.

Die rechte Seite der Ungleichung wird ebenfalls als Funktion, $g(x) = 1$, eingezeichnet und ist hier eine horizontale Gerade durch $A(0/1)$.



2. Schritt



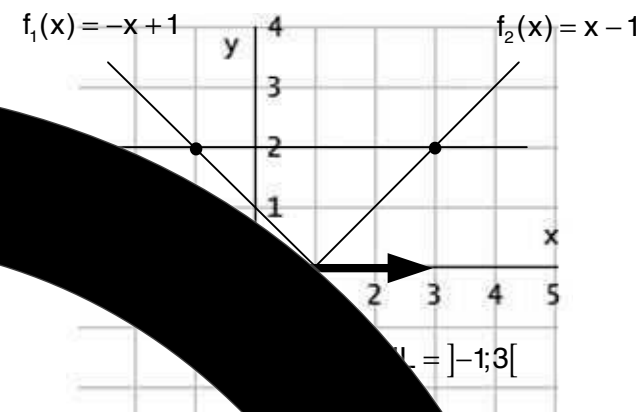
Man kann nun auf der x-Achse Bereiche markieren, für die gilt, dass die Funktionswerte der Geraden größer gleich 1 sind.

Beispiel 2: Betragsungleichung $|x-1| < 2$

Aus der Betragsungleichung entstehen die Funktionen:
 $f_1(x) = -(x-1) = -x+1$
 $f_2(x) = x-1$
 und
 $g(x) = 2$.

Algebraische Lösung

Graphische Lösung



Beispiel 3: Betragsungleichung $|2x-2| \leq x$

Es spielt für die Vorgehensweise keine Rolle, ob auf der rechten Seite der Gleichung eine Konstante oder ein von x abhängiger Term steht.

Algebraische Lösung

Graphische Lösung



Berechnung der Schnittpunkte

$$\begin{aligned} f_1(x) &= g(x) & f_2(x) &= g(x) \\ -2x+2 &= x & 2x-2 &= x \\ x &= \frac{2}{3} & x &= 2 \end{aligned}$$

Ob die Werte $\frac{2}{3}$ und 2 zum Lösungsintervall gehören, hängt davon ab, ob in der Aufgabenstellung die Relationszeichen $\geq$ bzw. $\leq$ verwendet werden.

Übung 1

Ermitte die Lösungsmenge der folgenden Betragsungleichung mit Hilfe des algebraischen Lösungsverfahrens.

b) $|3x-1| < 2$

de Übungen

Aufgabe 11.2

Betragsungleichungen mit mehreren Beträgen

Bei diesen Betragsungleichungen wird ein algebraischer Lösungsweg oft als schwierig empfunden. Ist anfällig für Rechenfehler. Daher wird hier eine Lösungsstrategie verfolgt, die überwiegend graphischen Vorgehensweise beruht, die schon in Aufgabe 11.1 angewendet wurde. Da es für der Vorgehensweise übersichtlich dargestellt werden kann, werden die einzelnen Lösungsschritte aufbauend aufeinander in mehreren Diagrammen gezeigt, wobei der nächste Schritt für Schritt ergänzt werden.

Verdeutlichen Sie sich die einzelnen Schritte bei der Ermittlung der Lösung und bearbeiten Sie die anschließenden Übungsaufgaben mit dem gleichen Verfahren.

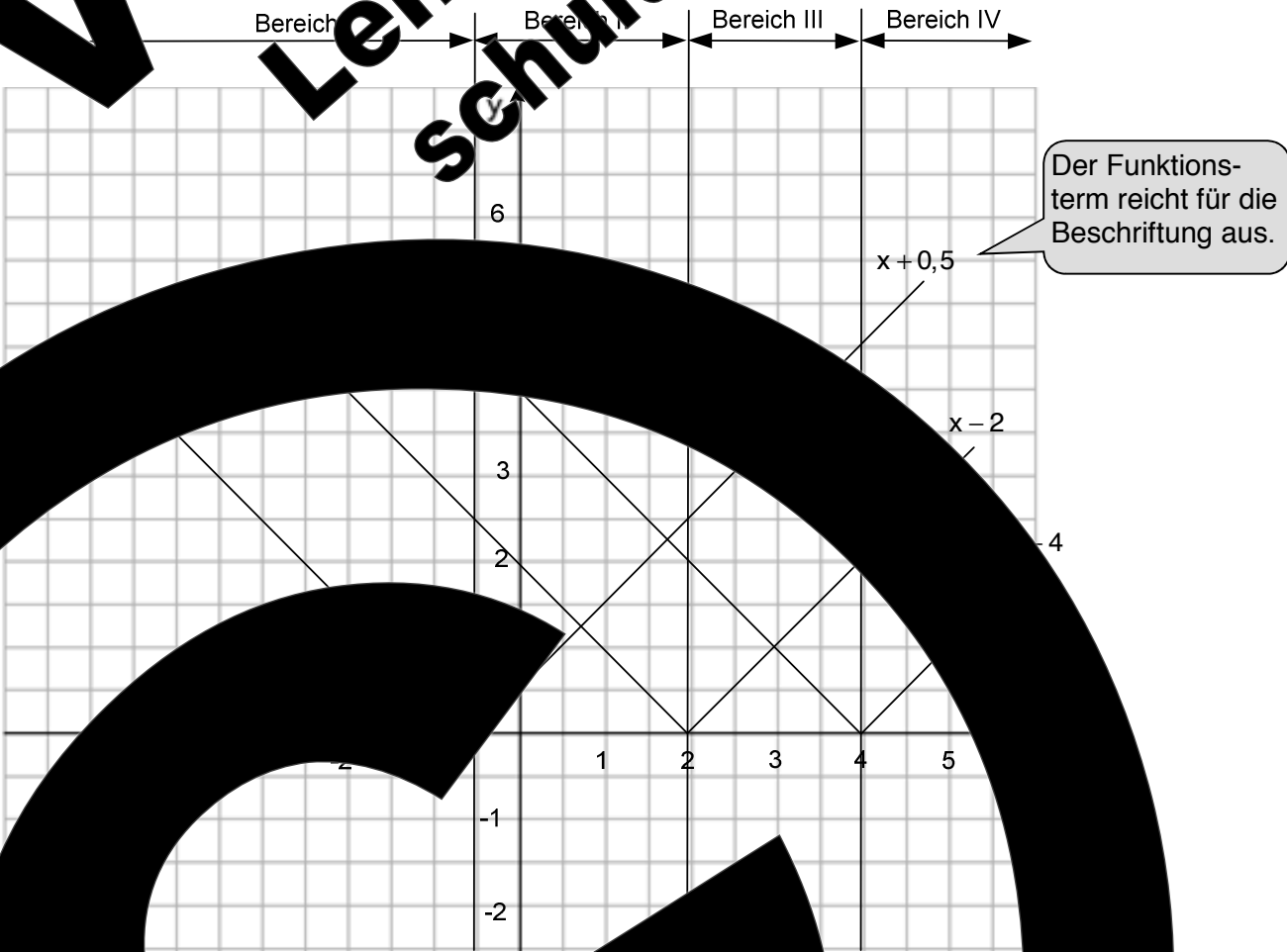
Beispiel: $|x + 0,5| + |x - 2| - |x - 4| \leq 2$

1. Schritt:

Entsprechend zu Aufgabe 11.1 werden die Beträge aus der Betragsungleichung jeweils linearen Funktionen zugeordnet. Im 1. und 2. Coefficienten vorgegeben. Diese Funktionen werden in einem geeigneten Koordinatensystem eingezeichnet und mit den zugehörigen Funktionstermen beschriftet.

2. Schritt:

An den Stellen, an denen die eingezeichneten Geraden Nullstellen besitzen, mit Hilfe von vertikalen Geraden das Koordinatensystem in Bereiche einteilen.



3. Schritt

Eine Tabelle erstellen, in der für jeden Bereich angegeben wird, welcher Funktionsterm gültig ist.

Betragsterm	Operation	I	II	III	IV
$ x + 0,5 $	+	$-x - 0,5$	$x - 0,5$	$x + 0,5$	$x + 0,5$
$ x - 2 $	+	$-x + 2$	$-x + 2$	$x - 2$	$x - 2$
$ x - 4 $	-	$-x + 4$	$-x + 4$	$-x + 4$	$-x + 4$
	Summe:	$-x - 1,5$	$3x - 5,5$	$x + 2,5$	$x + 2,5$

Eintragen der Betragsterme aus der Betragsungleichung

Eintragen, ob Betrags-terme addiert oder subtrahiert werden.

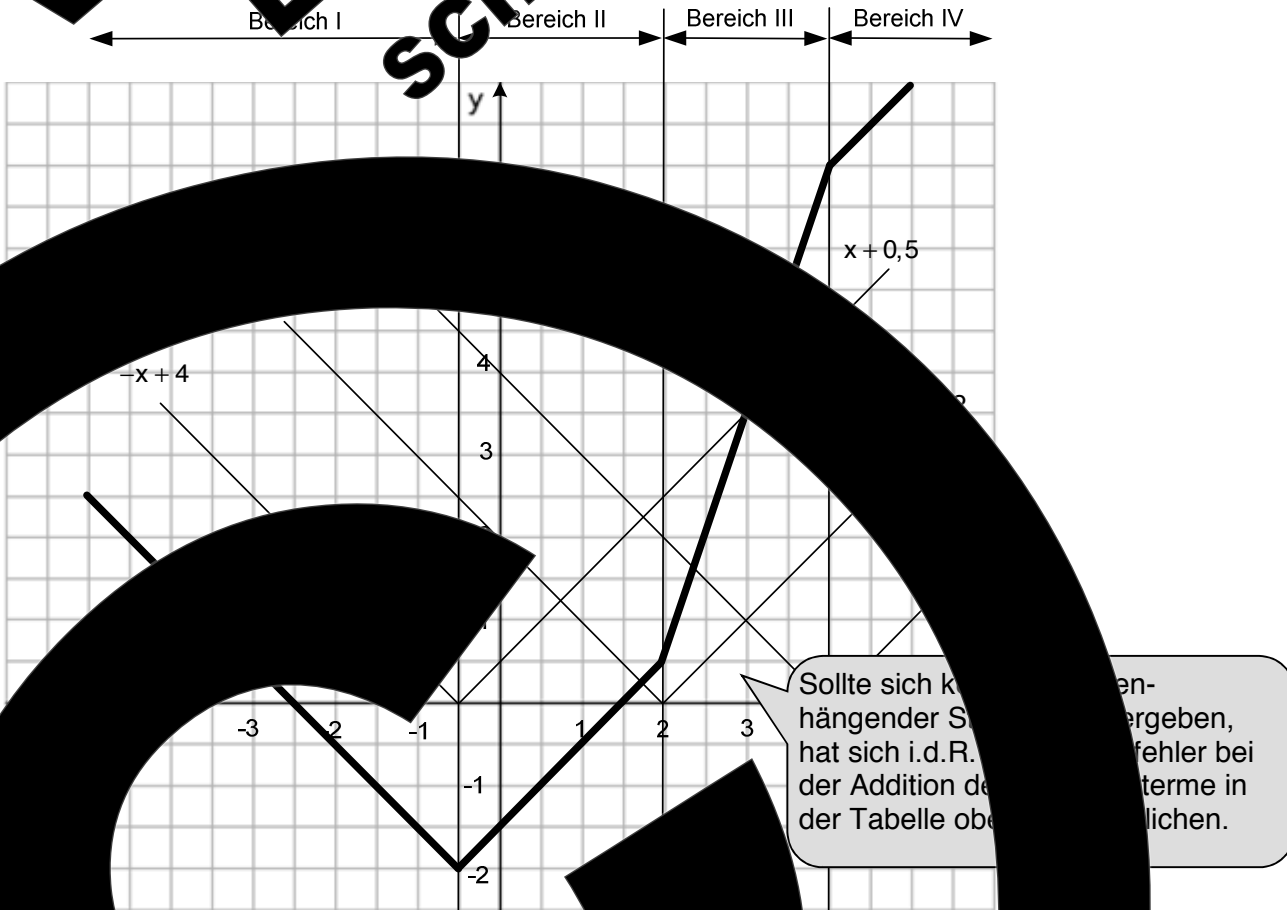
Eintragen, welcher Funktions-term der einzelnen Beträge in den Bereichen I, II, III und IV gültig ist.

Anhand der angegebenen Operationen die Funktionsterme in jeder Spalte addieren bzw. subtrahieren.

In der untersten Zeile erscheinen für jeden Bereich die durch Addition bzw. Subtraktion entstandenen Funktionsterme und die zugehörigen Geraden. Diese Geraden werden im nächsten Schritt abschnittsweise in den jeweiligen Bereichen vorgezeichnet. Es ergibt einen zusammenhängenden Streckenzug, mit dem dann die Lösungsmenge der ursprünglichen Betragsungleichung ermittelt werden kann.

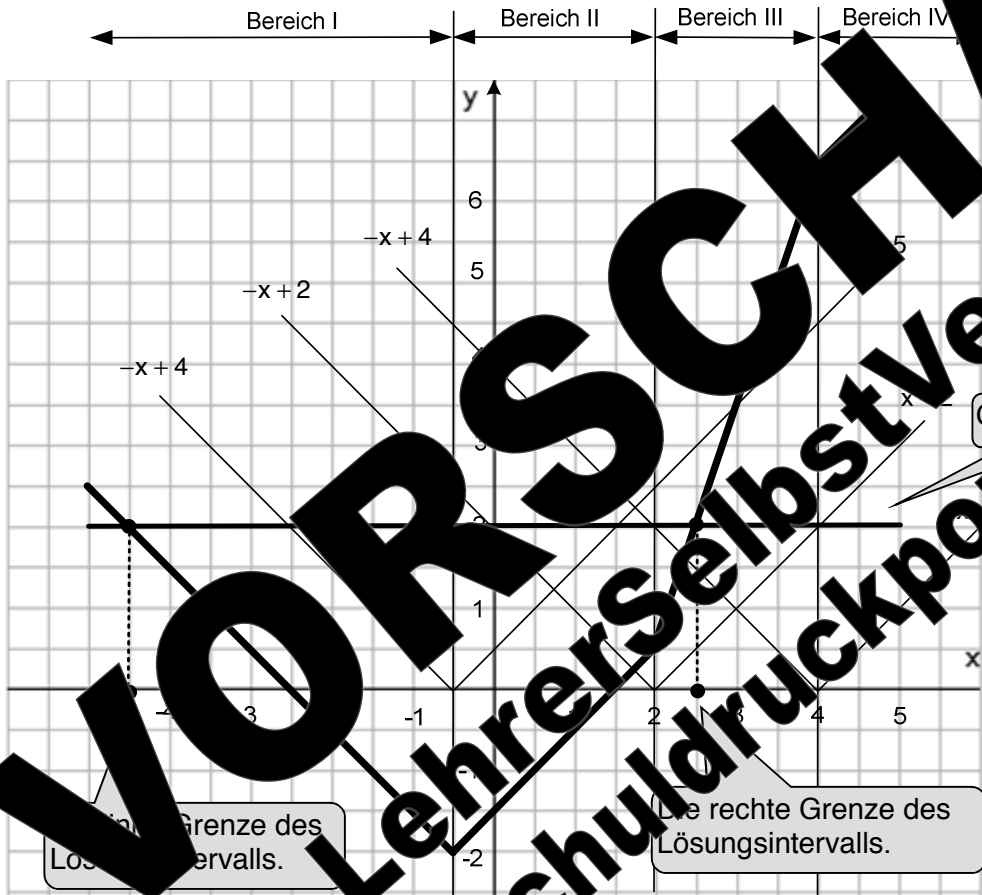
4. Schritt

Zeichnen des Linienzugs anhand der Funktionsterme in der untersten Zeile der Tabelle von Schritt 3.



5. Schritt

Einzeichnen der Geraden, die dem Term auf der rechten Seite der ursprünglichen Ungleichung entspricht, hier also der Geraden $g(x) = 2$.



6. Schritt

Man ermittelt das Lösungsintervall, indem man die Schnittpunkte der Geraden $g(x)$ mit dem Streckenzug im entsprechenden Bereich ermittelt. Die Schnittpunkte des Streckenzugs mit der Geraden x genau auf $g(x)$ im Lösungsintervall auch aus der Zeichnung abgelesen.

Schnittpunkt von $g(x)$ mit der dem Bereich I zugeordneten Funktion $f(x) = -x - 2,5$
 $f(x) < g(x) \Rightarrow x - 2,5 < 2 \Rightarrow x < 4,5$
Rechte Grenze: Schnittpunkt von $g(x)$ mit der dem Bereich II zugeordneten Funktion $f(x) = 3x - 5,5$
 $f(x) < g(x) \Rightarrow 3x - 5,5 < 2 \Rightarrow x < 2,5$

Lösungsintervall:

Übung

Ermittle die Lösungsintervalle der folgenden Betragsungleichungen

- a) $|x + 2| \leq 5$ b) $|x - 2| - |0,5x + 1| < 1$ c) $|x - 3| - |x + 1| \geq 2$

Ergebnisse:

Abzisse	63	Nullstelle	64
Ankathete	135	Ordinate	63
Ausklammern	39	Parabeln strecken, stauchen	95
Binomen höherer Ordnung	55	Parabolisieren	59
Binomialkoeffizienten	56	partielle Wurzelziehen	30
Binomialreihe	57	passende Druck	56
Binomische Formeln	41	Polynomdivision	142
biquadratische Gleichung	60	Polynomdivision	106
Bogenmaß	137	Polynomialer Form	88
Bruchgleichungen	60	Potenz	19
Cosinus	135	Potenzrechnung	33
Cosinusfunktion	138	pq-Formel	80
Distributivgesetz	9	quadratische Ergänzung	48
echter Bruch	9	quadratische Gleichungen	77
erste Winkelhalbierende	70	quadratische Ungleichungen	85
erweitern eines Bruchs	11	Radikal machen des Nenners	32
Exponent 0	25	Rechtwinkliges Dreieck	72
Exponentialfunktion	147	Scheitelform	88
Exponentialgleichung	147	Schnittpunkte	67
Exponentialform	145	Soll-Winkel	72
Exponentielles Wachstum	145	Sinus	135
Factoring	39	Sinusfunktion	138
Faktorisierte Form	88	Steigung einer Funktion	64
Funktion	147	Symmetriebetrachtungen bei ganzrationalen	122
Ganzrationale Funktionen 2. Grades	145	Funktionen	122
Ganzrationale Funktionen höherer Ordnung	145	Tangens	135
Gegensatzkathete	135	trigonometrische Funktionen	135
gerade Zahl	9	trigonometrischen Gleichungen	142
Gleichungen 3. und höheren Grades	104	trigonometrischer Pythagoras	136
Grad- und Bogenmaß	137	Umkehrfunktionen	127
Hypotenuse	135	unechter Bruch	9
kartesisches Koordinatensystem	63	verschieben von Normalparabeln	88
Kehrwert	9	verschieben, Stauchen, Strecken und Spiegeln	161
kleinste gemeinsame Vielfache	9	verschieben, Strecken, Stauchen und Spiegeln	165
Kürzen	9	Wachstumsfunktion $f(x) = \ln(x)$	165
Linearisierung	147	Wachstumsfunktionen	135
Logarithmengesetze	157	Wachstumsfunktionen am rechtwinkligen Dreieck	72
Logarithmengesetze	157	Wachstumsfunktionen	84
Logarithmusfunktion	149	Wachstumsfunktionen	63
Normalparabel	87	Wachstumsfunktionen	71

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

**Umschlag
Rückseite
(Innen)**

(unbedruckt)

Hier können Sie noch Vorlagen einfügen

VORSCHAU

LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

