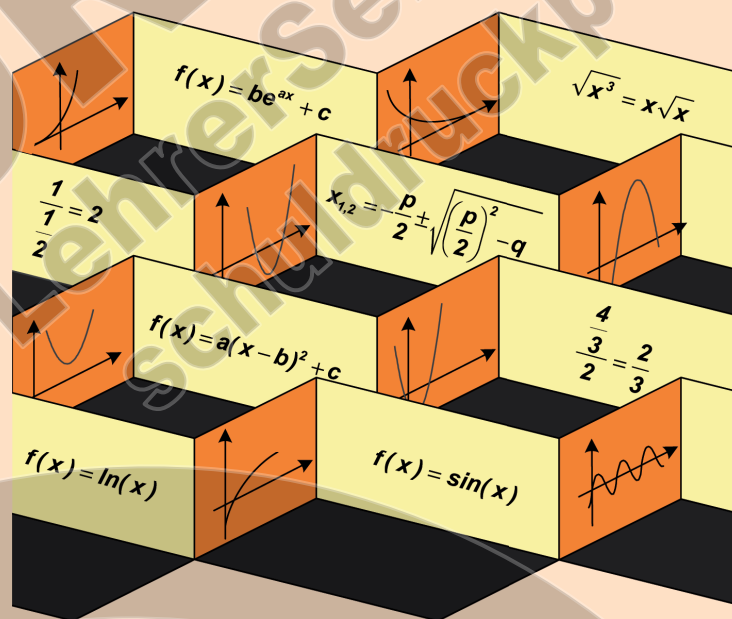


Grundlegendes zu Algebra und Funktionen

selbstorganisiert erlernen



Ursula PirkI



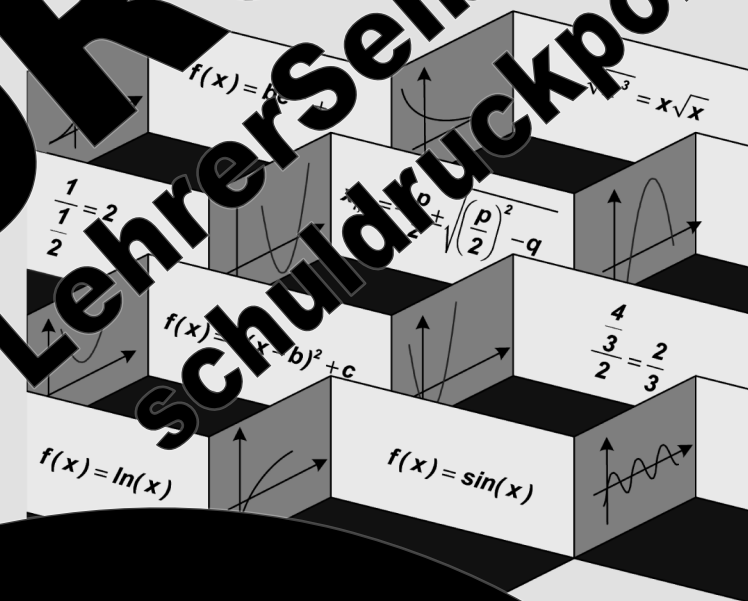
LEHRER
SELBST
VERLAG

Umschlag Vorderseite (Innen) (unbedruckt)

Hier können Sie noch Vorlagen einfügen

Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Grundlegende zu Algebra und Funktionen selbstorganisiert erlernen



Kapitel

Brüche, Potenzen, Wurzeln
und Binome

Kapitel 1	
Brüche, Potenzen, Wurzeln und Binome	9
Kapitel 2	
Grundlegendes zu Gleichungen	59
Kapitel 3	
Lineare Funktionen	63
Kapitel 4	
Quadratische und biquadratische Gleichungen und Ungleichungen	77
Kapitel 5	
Ganzrationale Funktion 2. Grades	87
Kapitel 6	
Gleichungen 3. und höherer Grades	104
Kapitel 7	
Ganzrationale Funktionen 2. und höherer Grades	115
Kapitel 8	
Die Hyperbelfunktion	127
Kapitel 9	
Trigonometrische Funktionen	135
Kapitel 10	
Exponential- und Logarithmusfunktionen	145
Kapitel 11	
Vertiefende Betrachtung von Betragsungleichungen	169

Gesamtwortmarkenrecht zu Algebra und Funktionen organisiert erlernen
(Bestandteil des Lehrplans Mathematik)
Sonderdruck aus dem Buch: „Algebra und Funktionen“
Copyright © 2019. Alle Rechte vorbehalten. All rights reserved.
Dieses Werk, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.
LehrerSelbstVerlag
LehrerSelbstVerlag GmbH, Koblenz (Germany)
www.lehrerSelbstVerlag.de
www.f-druck.de

Oberstudienrätin Ursula F. H.

Grundlegendes

zu Algebra

und Funktionen

selbst organisiert erlernen

Mathematik

Bestellnummer 02-033-279



VORSCHAU
LehrerselbstVerlag
schuldruckportal.de

Stand: 01.09.2015

Alle Rechte vorbehalten. All rights reserved.
Nachdruck, Vervielfältigung und Verbreitung,
die sich nicht auf den eigentlichen Verleger beziehen,
ist ohne schriftliche Genehmigung des Verlegers nicht gestattet.

LehrerselbstVerlag
LehrerselbstVerlag GmbH, Koblenz (Germany) 2014
schuldruckportal.de

www.f-druck.de

Vorwort	7
Kapitel 1 Brüche, Potenzen, Wurzeln und Binome	
Aufgabe 1.1 Arbeiten mit Brüchen	9
Aufgabe 1.2 Potenzgesetze	19
Aufgabe 1.3 Multiplizieren und Faktorisieren von Summen	36
Aufgabe 1.4 Binomische Formeln	41
Aufgabe 1.5 Quadratische Ergänzung	48
Aufgabe 1.6 Ergänzende Betrachtungen zu höheren Gleichungen	55
Kapitel 2 Grundlegende zu Gleichungen	
Aufgabe 2.1 Zurückföhren in Normalform und Gleichungen, die sich in lineare Gleichungen föhren	59
Aufgabe 2.2 Symmetrisierte Gleichungen	59
Aufgabe 2.3 Ergänzendes Vertiefungsthema: Bruchgleichungen	60
Kapitel 3: Lineare Funktionen	
Aufgabe 3.1 Grundlegende zu linearen Funktionen	63
Aufgabe 3.2 Beziehungen zwischen Geraden	66
Aufgabe 3.3 Schnittpunkte von Geraden	67
Aufgabe 3.4 Nullstellen bei Geraden	68
Aufgabe 3.5 Rechnung der Steigung einer Geraden	69
Aufgabe 3.6 Ergänzendes Vertiefungsthema: Tangenten	72

Kapitel 4:
Quadratische und biquadratische Gleichungen und Ungleichungen

Aufgabe 4.1
Lösungsverfahren für quadratische und biquadratische Gleichungen 77

Aufgabe 4.1.1
Quadratische Gleichungen der Form $ax^2 + c = 0$ 77

Aufgabe 4.1.2
Quadratische Gleichungen der Form $ax^2 + bx = 0$ 79

Aufgabe 4.1.3
Anwenden der pq-Formel bei quadratischen
Gleichungen der Form $ax^2 + bx + c = 0$ 80

Aufgabe 4.1.4
Lösen einer biquadratischen Gleichung der Form $ax^4 + c = 0$ 81

Aufgabe 4.1.5
Lösen einer quadratischen Gleichung in faktorisierter Form 82

Aufgabe 4.2
Erweiternde Betrachtung von Ungleichungen 84

Aufgabe 4.3
Erweiternde Betrachtungen: Quadratische Ungleichungen
und lineare Gleichungen 85

Kapitel 5:
Ganzrationale Funktionen 2. Grades

Aufgabe 5.1
Die Normalparabel $f(x) = x^2$ zeichnen 87

Aufgabe 5.2
Verschieben von Normalparabeln im Koordinatensystem 88

Aufgabe 5.2.1
a) Verschieben von Parabeln nach unten 88
b) Nullstellen 89
c) Darstellung in Scheitelpunktform und faktorisierter Form 89

Aufgabe 5.2.2
Verschieben von Parabeln nach links und rechts 90
Scheitelpunktbetrachtung bei den verschobenen Parabeln 91
Darstellung der Funktionsterme in Scheitelpunktform, polynomialer Form 92

Aufgabe 5.2.3
Verschieben von Parabeln in x- und y-Richtung 92

Aufgabe 5.2.4
Parabeln strecken und stauchen 95

Aufgabe 5.3
Lagebestimmung 100

Kapitel 6:
Gleichungen 3. und höheren Grades

Aufgabe 6.1
Lösen einer Gleichung höheren Grades, die in faktorisierter Form vorliegt 104

Aufgabe 6.2
Lösen einer Gleichung, bei der man x^n ausklammern kann 105

Aufgabe 6.3
Lösen einer Gleichung mit der Polynomdivision 106

Kapitel 7:
Ganzrationale Funktionen 3. und höheren Grades

Aufgabe 7.1
Verlauf von Ganzrationale Funktionen 3. Grades 115

Aufgabe 7.2
Symmetriebetrachtung bei ganzrationalen Funktionen 122

Aufgabe 7.3
Rechnerischer Nachweis der Symmetrie bei Funktionen 123

Kapitel 8:
Umkehrfunktionen

Aufgabe 8.1
Grundlegende Umkehrfunktionen 127

Aufgabe 8.2
Zusammenhang zwischen einer Funktion und ihrer Umkehrfunktion 127

Aufgabe 8.3
Zusammenhang zwischen den Graphen von Funktion und Umkehrfunktion 129

Aufgabe 8.4
Umkehrbarkeit von Funktionen 131

Aufgabe 8.5
Rechnerischer Nachweis der Umkehrfunktion 131

Kapitel 9:
Trigonometrische Funktionen

Aufgabe 9.1
Winkel und Seitenlängen im rechtwinkligen Dreieck 135

Aufgabe 9.2
Bogenlänge, Grad- und Bogenmaß 137

Aufgabe 9.3
Die Sinusfunktion 138

Aufgabe 9.4
Anwendung der Sinusfunktion 139

Aufgabe 9.5
Periodizität der Sinusfunktion 142

Aufgabe 9.6
Lösen von trigonometrischen Gleichungen 142

Inhaltsverzeichnis	
Kapitel 10:	
Exponential- und Logarithmusfunktionen	
Aufgabe 10.1	
Exponentielles Wachstum	145
Aufgabe 10.2	
Exponentielle Abnahme – Zerfallsprozesse	146
Aufgabe 10.3	
Vergleich von linearem, quadratischem und exponentiellem	147
Aufgabe 10.4	
Exponentialfunktionen und ihre Umkehrfunktion	149
Aufgabe 10.6	
Umrechnen einer Exponentialfunktion in eine Exponentialfunktion zur Basis e oder einer Logarithmusfunktion zur Basis a in einen Logarithmus zur Basis e	151
Aufgabe 10.7	
Lösen von Exponentialgleichungen zur Basis e	154
Aufgabe 10.8	
Lösen von Logarithmengleichungen	157
Aufgabe 10.9	
Verschieben, Strecken, Stauchen und Spiegeln der e -Funktion	161
Aufgabe 11.1	
Verschieben, Strecken, Stauchen und Spiegeln der Funktion $y = \ln(x)$	165
Kapitel 11:	
Lineare Betrachtung von Betragsgleichungen	
Aufgabe 11.1	
Lineare Betragsgleichungen, in denen ein Betrag auftritt	169
Aufgabe 11.2	
Betragsungleichungen mit mehreren Beträgen	172
Stichwortverzeichnis	175

Vorwort

Grundlegende Kenntnisse zur Algebra und zu Funktionen sind Voraussetzung für das Verständnis der Mathematik an weiterführenden Schulformen und an Hochschulen und damit der Schlüssel zum Erfolg auf einem eingeschlagenen Bildungsweg. Erfahrungen an Schule und Hochschule zeigen allerdings, dass gerade hinsichtlich dieser Thematik häufig Kenntnisse fehlen oder verschüttet sind und Lernende das Verständnis neuer mathematischer Zusammenhänge nicht gelingen kann, da sie an elementaren Umformungen, die beispielsweise Brüche, Potenzen und Binome enthalten, scheitern.

Das Ziel des vorliegenden Arbeitsbuchs ist es, das bestehende Grundkenntnis aufzufrischen und zu ergänzen. Dabei werden die zentralen Zusammenhänge schrittweise und unter Verzicht auf unnötige Formalismen erklärt und an Beispielen verdeutlicht. Die Beispiele und Übungsaufgaben sind so gewählt, dass möglichst schnell ein Verständnis für das Verständnis der Mathematik als Hilfsmittel in den Schulen (sowie auch Hochschulen) zu beschaffen ist. Dieser nicht nur ein Anforderungsprofil der Sekundarstufe I. So werden Informationen, die bei der Berechnung des Differentialquotienten beim Ableiten von Funktionen und bei der Integration auftreten, losgelöst von diesen Themen als rein algebraischer Sachverhalt behandelt.

Ziele, Aufgaben und Hinweise zur Handhabung des Arbeitsbuchs

Die einzelnen Themen des Arbeitsbuchs bauen aufeinander auf, so dass eine systematische Bearbeitung der einzelnen Kapitel in der vorgegebenen Reihenfolge sinnvoll ist. Die Lernenden werden zu einer systematischen, organisierten Lernweise angeregt. Die Lernenden werden zu einer systematischen, organisierten Lernweise angeregt. Die Lernenden werden zu einer systematischen, organisierten Lernweise angeregt.

Texte ausfüllen und bereichern. Sie können bzw. ergänzen oder beschreiben. Da diese Lernform bzw. Curricula eine Behandlung von wiederkehrenden Themen in weiterführenden Schulformen üblicherweise nicht vorsehen und Schulbücher diese Themen ebenfalls nicht beinhalten, ist diese Lernform hervorragend dazu geeignet, das Interesse der Schülerinnen anhand des Arbeitsauftrags zu wecken und den Stoff selbstständig bewältigen zu lassen. Der Erfolg selbst kontrolliert und bewertet. Die Arbeitsaufträge in Form einer Kartei ermöglicht eine flexible Nutzung. Dass dieses Konzept auch für die Arbeit mit einer Schülerin:

...sicherten Zugangsvoraussetzungen zu Hochschule neben der Erlangung der Fachhochschulreife.“

Hochschulreife nicht berufliche Ausbildung einschließen, führt zwangsweise zum Problem, dass für angehende Studierende die Schulzeit oft längere Zeit zurückliegt, bzw. thematische Bereiche, die in der Hochschule ausgesetzt werden, gänzlich unbekannt sind. Das vorliegende Leitbuch bildet für diese Zielgruppe eine Brücke, auf der sie sich den Anforderungen der Hochschulmathematik nähern können. Erste Erfahrungen im Erlernen eines Vorkurses in Mathematik an einer Hochschule scheinen diese Vermutung zu bestätigen. In der Feedbackrunde des Vorkurses wurden durchweg positive Bewertungen für das Arbeiten mit dem Buch abgegeben:

„Gute Lernmöglichkeiten für Langzeit-Mathe-Abwesenzer“
 „Durch Buch gute Problemlösung und Auffüllung von Lücken“
 „Für Ex-Schüler mit Mathe Leistungskurs gute Wiederholung“
 „Gute Gruppenarbeit“
 „Besser nur zuhören.“

Kapitel 1

Die Themen in diesem Kapitel beziehen sich auf die Themen Bruchrechnung, Potenzen und binomische Formeln und sind damit Grundlage für die folgenden Kapitel.

Kapitel 2

Da das Lösen linearer Gleichungen den Lernenden in der Regel keine größeren Probleme bereitet, ist dieses Kapitel knapp gehalten. Die Gleichungen sind unter folgenden Gesichtspunkten ausgewählt worden:

- Anwenden und Wiederholen von Bruchrechnung und binomischen Formeln.
- Thematisieren von parametrisierten Gleichungen.
- Ergänzende Betrachtungen von Bruchgleichungen.
- Lineare Gleichungen und Ungleichungen wird im Zusammenhang mit dem Lösen von quadratischen Ungleichungen.

Kap

Da viele Schüler nicht in der Lage sind, ohne Taschenrechner und Graphenplotter also alleine aus den Informationen zum y-Achsenabschnitt und zur Steigung Geraden zu zeichnen, werden diese im Folgenden ausführlich behandelt. Zudem werden hier auch Ansätze für alle Funktionsklassen gültige Ansätze, zum Beispiel von Achsenabschnitten und Schnittpunkten

Kapitel 4

Quadratische Gleichungen und deren Lösung mithilfe der Mitternachtsformel sind in der Regel kein Problem. Allerdings ist die Anwendung alternativer Lösungsverfahren oft noch weitgehend Neuland, was rein rechnerische Aufgabenstellungen bei der Anwendung der Mitternachtsformel bereitet oft erhebliche Probleme. Eine klein-

schrittige Erläuterung der Lösungsmöglichkeiten in Abhängigkeit von der Form der Gleichung und umfangreiche Übungen dazu stehen hier im Mittelpunkt. Das Lösen von Wurzelgleichungen und quadratischen Ungleichungen wird erweiternd betrachtet.

Kapitel 5

Für die Kenntnisse rund um Parabeln gilt Ähnliches wie für die quadratischen Gleichungen. Grundlagen sind meist vorhanden, jedoch treten häufig schon beim Zeichnen einer verschobenen Normalparabel ohne Erstellung einer Wertetabelle Schwierigkeiten auf. Die hier notwendigen Techniken und die Gesetzmäßigkeiten hinsichtlich des Verschiebens, Streckens, Stauchens und Spiegels von Parabeln werden an Beispielen vermittelt. Ergänzt dazu wird die Darstellung des Funktionsterms in Scheitelpunktform, polynomialer und faktorieller Form, die Bedeutung und das Umrechnen von Normalform in eine andere Form. Die Bedeutung der Diskriminanten bei der Berechnung von Nullstellen und bei Schnittpunktproblemen sowie die pq-Formel werden ebenfalls behandelt.

Kapitel 6 und 7

In diesen beiden Kapiteln findet der Übergang zu den Themen, die während der Schulformensuche, während in Kapitel 6 die Gleichungen 3. und 4. Grades vorgeführt und geübt werden, findet in Kapitel 7 der Einstieg in die Untersuchung von ganzrationalen Funktionen 3. und 4. Grades statt, wobei auch hier der Zusammenhang mit der Bestimmung von Funktionsgleichungen in polynomialer und faktorieller Form thematisiert wird.

Kapitel 8 bis 11

Vertiefend werden die Zusammenhänge zwischen Funktionen und ihren zugehörigen Umkehrfunktionen sowie die erweiterten Regeln hinsichtlich des Verschiebens, Streckens, Stauchens und Spiegels, bilden einen Schwerpunkt dieses Kapitels. Die Betrachtungen beziehen sich auf ganzrationale und trigonometrische Funktionen, sowie Exponential- und Logarithmusfunktionen und die Lösung von Gleichungen, die bei diesen Funktionsklassen auftreten können. Diese hier erworbenen Kenntnisse sind Voraussetzung für die Untersuchung komplexer Funktionen im Rahmen der Differenzial- und Integralrechnung in der Qualifizierungsphase der gymnasialen Oberstufe und, kann in dieser Phase auf das Nachschubuch zurückgegriffen werden. Der Aufbau und die Struktur ermöglichen hierbei einen Einsatz im Grund- und im Leistungskurs.

Dank

Für Anregungen zur inhaltlichen und formalen Gestaltung danke ich meinem Mann, Dipl.-Ing. Gerold Pirkl und Professor Dr. Thorsten-Karl Stempel von der Hochschule Darmstadt.

Kapitel 1: Brüche, Potenzen, Wurzeln und Binome

Sie haben in der Sekundarstufe I bereits die Gesetze zum Umgang mit Brüchen, Potenzen, Wurzeln und binomischen Formeln kennen gelernt. Allerdings zeigt es sich häufig, dass gerade die Anwendung dieser elementaren algebraischen Zusammenhänge immer wieder Schwierigkeiten bereitet. Daher soll in diesem Kapitel die Möglichkeit gegeben werden, die wesentlichen Punkte noch einmal zu wiederholen.

Aufgabe 1.1

Arbeiten mit Brüchen

Im Rahmen dieser Aufgabe sollen grundlegende Umformungen bei Brüchen, die in späteren Aufgaben und Kapiteln zurückgegriffen werden, wiederholt werden. Es wird hier besonderer Wert darauf gelegt, die einzelnen Rechnungen in Teilschritten zu zeigen, die bei einem Umgang mit Brüchen automatisiert im Kopf ablaufen. Die einzelnen Rechenschritte werden hier aufgelistet und überwiegend in den Sprechblasen verdeutlicht. Arbeiten Sie die gegebenen Informationen durch und wenden Sie die Verfahren jeweils auf die Übungen an.

a) Definition

echter Bruch:

Der Zähler ist kleiner als der Nenner.

Bsp.: $\frac{8}{9}$

Die Zahl oberhalb des Bruchstrichs wird als **Zähler** bezeichnet.

Die Zahl unterhalb des Bruchstrichs wird als **Nenner** bezeichnet.

unechter Bruch:

Der Zähler ist größer oder gleich dem Nenner.

Bsp.: $\frac{16}{9}$

Man kann eine ganze Zahl in einen unechten Bruch überführen, indem man die ganze Zahl mit dem Nenner 1 versieht.

Bsp.: $4 = \frac{4}{1}$

Man kann einen unechten Bruch in eine ganze Zahl und einen gebrochenen Teil zerlegen. Ein unechter Bruch.

Bsp.: $2\frac{4}{9}$

Achtung!

Bei gemischten Zahlen steht die ganze Zahl, hier 2, und dem Bruch ein unsichtbares Pluszeichen (+) und kein Multiplikationszeichen (·). $2\frac{4}{9} = 2 + \frac{4}{9} \neq 2 \cdot \frac{4}{9}$

Man erhält den Kehrwert eines Bruches, indem man den Bruch „umdreht“.

Bsp.: Der Kehrwert des Bruchs $\frac{5}{4}$ ist der Bruch $\frac{4}{5}$.

b) Unechte Brüche und gemischte Zahlen umwandeln

Umwandeln einer gemischten Zahl in einen unechten Bruch

Schritte:

1. Den Nenner des Bruchs mit der ganzen Zahl vor dem Bruch multiplizieren.
 2. Das Produkt zum vorhandenen Zähler des Bruchs addieren.
 3. Der Nenner bleibt gleich.

Beispiel:

$$4\frac{4}{5} = \frac{5 \cdot 4 + 4}{5} = \frac{15 + 4}{5} = \frac{19}{5}$$

Umwandeln eines unechten Bruchs in eine gemischte Zahl

Schritte:

1. Zähler durch den Nenner teilen.
 2. Den ganzzahligen Teil ablesen.
 3. Den Rest als Bruch darstellen. Dabei kommt der Rest als Zähler; der Nenner bleibt gleich.
 4. Wenn kein Rest entsteht, ist es eine ganze Zahl.

Beispiel:

$$\frac{29}{6} = 4\frac{5}{6}$$

Im K.O.F.: $29 : 6 = 4 \text{ Rest } 5$

Übung zu 1.1.a:
Wandeln Sie den unechten Bruch in eine gemischte Zahl, bzw. die gemischte Zahl in einen unechten

(1) $3\frac{1}{2} = \frac{\quad}{\quad}$

(2) $\frac{9}{4} = 2\frac{\quad}{\quad}$

(3) $4\frac{2}{3} = \frac{\quad}{\quad}$

(4) $5\frac{3}{4} = \frac{\quad}{\quad}$

(5) $\frac{17}{12} = 1\frac{\quad}{\quad}$

c) Erweitern eines Bruchs auf einen vorgegebenen Nenner

Schritte:

1. Wie oft passt der gegebene Nenner in den neuen vorgegebenen Nenner?
 2. Zähler und Nenner mit der gefundenen Zahl multiplizieren.

Beispiel:

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{15}{20}$$

Wie oft passt 4 in 20, also 5-mal in 20.

Übung zu 1.1.c:
Erweitern Sie auf den angegebenen Nenner.

- (1) $\frac{5}{6}$ und $\frac{3}{4}$ auf den Nenner 12
- (2) $\frac{5}{12}$ und $\frac{3}{8}$ auf den Nenner 48
- (3) $5\frac{1}{8}$ auf den Nenner 16:

Beispiel:
Wie oft passt 8 in 16, also 2-mal in 16.
Daher: $\frac{5}{8} = \frac{5 \cdot 2}{8 \cdot 2} = \frac{10}{16}$
oder auch als $\frac{5}{1}$ darstellen kann.

d) Kürzen von Brüchen

i) Methode des gemeinsamen Teilers kürzen

Ziel:

1. Zähler und Nenner solange jeweils durch die gleiche Zahl dividieren bis es keinen gemeinsamen Teiler mehr gibt.

Beispiel:

$$\frac{12}{18} = \frac{12 : 6}{18 : 6} = \frac{2}{3}$$

oder auch kürzen auf 3: $\frac{12 : 3}{18 : 3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Beispiel:
Wie oft passt 3 in 12, also 4-mal in 12.
Daher: $\frac{12}{36} = \frac{12 : 3}{36 : 3} = \frac{4}{12}$
oder auch kürzen auf 6: $\frac{12 : 6}{36 : 6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

ii) Methode 2: Zähler und Nenner in Primfaktoren zerlegen

Schritte Methode 2:

- Die Zahlen im Zähler und Nenner in Primfaktoren zerlegen.

Bsp.: $24:2=12$
 $12:2=6$
 $6:2=3$

Beispiel:

Primfaktoren sind die Zahlen, die nur durch sich selbst und 1 teilbar sind, also 2, 3, 5, 7, 11, ...

- Die einzelnen Faktoren paarweise im Zähler und Nenner streichen (kürzen).

$$\frac{24}{36} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{2}{3}$$

iii) Methode 3: Den größten gemeinsamen Teiler (ggT) verwenden

Schritte Methode 3:

- Den größten gemeinsamen Teiler (ggT) von Zähler und Nenner bestimmen (s. Aufgabenteil e).
- Zähler und Nenner durch diesen ggT teilen.

Bsp.: 12 ist der ggT von 24 und 36.
 $24:12=2$
 $36:12=3$

Man darf auch schreiben: $\frac{24}{36} = \frac{2}{3}$

iv) Kürzen

- Brüche mit Methode 1, 2 oder 3 kürzen.

- Gleiche Variable im Zähler und Nenner paarweise kürzen. Wenn Potenzen auftreten, ggf. Potenzgesetze (s. Anhang) anwenden.

Übung

Kürze die gegebenen Brüche so weit wie möglich.

(2) $\frac{22}{11}$

(3) $\frac{20ab}{48ac} =$

(4) $\frac{45xy}{75xyz} =$

(5) $\frac{405xy}{1080x} =$

(6) $\frac{144}{720y} =$

(7) $\frac{112uv}{210vw} =$

(8) $\frac{120}{30} =$

e) Hauptnenner ermitteln

Der Hauptnenner (kurz HN) ist das kleinste gemeinsame Vielfache – kgV – bezeichnet. Es gibt wie beim Kürzen beim Ermitteln des Hauptnenners bzw. kgV verschiedene Methoden. An dieser Stelle werden zwei Möglichkeiten vorgestellt. Die Ermittlung über die Zerlegung in Primfaktoren ist dabei als erste und einfachere Möglichkeit gedacht, die meist nur angewandt wird, wenn es sich um große Zahlen handelt, bei denen die Methode über das Kopfrechnen aufwendig wird.

Methode 1: Hauptnenner durch Kopfrechnung ermitteln

Bei kleinen Zahlen kann man das kgV bzw. den Hauptnenner ohne viel Aufwand im Kopf ermitteln.

Schritte:

- Den Nenner mit der größten Zahl auswählen.
- Die Reihe dieser Zahl (hier 8er-Reihe) im Kopf hochzählen, bis eine Zahl erreicht ist, die kleiner oder gleich dem anderen Nenner ist.

Hauptnenner von $\frac{7}{8}$ und $\frac{5}{6}$

Im Kopf:
 8-ter Reihe: 8, 16, 24, ...
 6 passt nicht in 8
 6 passt nicht in 16
 6 passt 4-mal in 24
 8 passt 3-mal in 24
 Hauptnenner der Brüche ist 24

- Merke dir die Vielfachen des Bruchnenners hat.

$\frac{7}{8} = \frac{7 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{21}{24}$

$\frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 4}{6 \cdot 4} = \frac{20}{24}$

Im Kopf:
 $\frac{7 \cdot 3}{8 \cdot 3}$

Im Kopf:
 $\frac{5 \cdot 4}{6 \cdot 4}$

Methode 2: Ermitteln des Hauptnenners über die Zerlegung in Primfaktoren

Schritte:

1. Alle Brüche, sofern es geht, so weit wie möglich kürzen.
2. Alle Nenner in Primfaktoren zerlegen. Dabei mit dem kleinstmöglichen Primfaktor beginnen. Wenn vorhanden, gleiche Primfaktoren in Spalten untereinander schreiben.
3. Aus jeder Spalte den Primfaktor einmal übernehmen und das Produkt dieser Zahlen bilden.
4. Jeden Bruch so erweitern, dass der kgV bzw. dem Hauptnenner entspricht.

Beispiel:

Hauptnenner von $\frac{1}{6}$ und $\frac{1}{12}$

Schritt 1 und 2

Primfaktoren von 6: $6 = 2 \cdot 3$
Primfaktoren von 12: $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$

Hauptnenner: $HN = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$

Schritt 3

$\frac{1}{6} = \frac{2}{12}$
 $\frac{1}{12} = \frac{1}{12}$

Hinweise:

Wenn sich im Nenner eine Variable befindet, so muss man diese Variable im kgV berücksichtigen.

Bsp.: $\frac{1}{4a} + \frac{1}{6}$ auf den H.N. bringen. Das kgV ist $12a$ und damit ergibt sich: $\frac{3}{12a} + \frac{2a}{12a}$

Übung zu 1.1.e

Bringen Sie die folgenden Brüche auf den H.N. 12a.

(1) $\frac{3}{6}, \frac{2}{4}, \frac{1}{9}$

(3) $\frac{4}{5}, 1\frac{2}{3}, \frac{9}{10}$

(4) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$

(5) $\frac{25}{42}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$

f) Brüche addieren oder subtrahieren

Auch wenn die Addition und Subtraktion von Brüchen beim Einsatz eines Taschenrechners kaum Probleme bereitet, ist es unbedingt notwendig, die entsprechenden Rechenregeln zu kennen und anwenden zu können, da der Taschenrechner spätestens beim Addieren von Brüchen im Nenner keine allzu große Hilfe mehr darstellt. Im Rahmen dieser Aufgabe werden mögliche Vorgehensweisen beim Addieren und Subtrahieren von Bruchtermen exemplarisch dargestellt.

Beispiel 1: Addition bei Bruchtermen

Man kann alle ganzen Zahlen und alle Brüche getrennt voneinander addieren, da bei gemischten Brüchen die ganze Zahl und der Bruch ein unabhängiges Pluszeichen (+) steht.

Schritte:

1. Alle ganzen Zahlen addieren bzw. subtrahieren.
2. Den Hauptnenner HN suchen und die Brüche zum HN erweitern.
3. Die Zähler der Brüche addieren. Der Nenner bleibt gleich.
4. Ergebnis vereinfachen.

Beispiel 2: Subtraktion bei Bruchtermen

Hier ist es günstig, unechte Brüche zu verwenden, vor allem, wenn der Bruch mit negativem Vorzeichen größer ist als der positive Bruch.

1. Hauptnenner HN suchen und die Brüche zum HN erweitern.
2. Die Summe bzw. Differenz der Zähler bilden. Der Nenner bleibt gleich.
3. Ergebnis, wenn möglich, noch kürzen bzw., wenn es die Aufgabenstellung erfordert, in eine gemischte Zahl umwandeln.

Schritte:

1. Falls möglich, Brüche in unechte umwandeln.
2. Den Hauptnenner HN suchen und die Brüche zum HN erweitern.
3. Die Summe im Zähler bilden. Der Nenner bleibt gleich.
4. Ergebnis, wenn möglich, kürzen bzw., wenn es die Aufgabenstellung erfordert, in eine gemischte Zahl umwandeln.

Achtung! Hier darf man **10** nicht wie das **x** auf den Zähler eine Summe und kein Produkt annehmen.

Übung zu 1.1.f

Berechnen Sie die angegebenen Summen zunächst ohne Verwendung des Taschenrechners und stellen Sie das Ergebnis, so weit wie möglich, gekürzt dar. Überprüfen Sie Ihre Rechnung, wenn möglich, mit dem Taschenrechner.

(1) $\frac{3}{4} + \frac{5}{6} - \frac{1}{3} =$ _____

(2) $1\frac{1}{2} + 2\frac{2}{7} - 1\frac{1}{14} =$ _____

(3) $\frac{4}{5a} + \frac{7}{15} + \frac{7}{10} =$ _____

(4) $\frac{2}{3b} - \frac{1}{2b} - \frac{1}{4b} =$ _____

(5) $\frac{3}{8x} - \frac{5}{6y} + \frac{1}{12z} =$ _____

g) Brüche multiplizieren

Beispiel 1: Bruchterme, die Variable enthalten, multiplizieren

Gemischte Zahlen in unechte Brüche umwandeln.

Ganze Zahlen als Bruch mit Nenner 1 darstellen.

Schritte:

- Alle gemischten und ganzen Zahlen als unechte Brüche darstellen.
- Alle Zähler und alle Nenner auf einen gemeinsamen Nenner bringen.
- Vor dem Multiplizieren so weit wie möglich kürzen.
- Alle Zahlen im Zähler multiplizieren.
- Alle Zahlen im Nenner multiplizieren
- Ergebnis, wenn möglich, bzw., wenn gefordert, in eine gemischte Zahl umwandeln

$$1\frac{1}{3} \cdot 2\frac{5}{8} \cdot 3 = \frac{4}{3} \cdot \frac{21}{8} \cdot \frac{3}{1} = \frac{4 \cdot 21 \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot 8 \cdot 1} = \frac{21}{2} = 10\frac{1}{2}$$

plizieren
erst kürzen

Übung:

$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} =$ _____

$\frac{3}{7} \cdot \frac{7}{9} =$ _____

Beispiel 2: Bruchterme, die Variablen enthalten, multiplizieren

6a kann man als $\frac{6a}{1}$ schreiben. Dann lässt man dann unter dem gemeinsamen Nenner den Bruchstrich weg.

Schritte:

- Alle gemischten und ganzen Zahlen als unechte Brüche darstellen.
- Alle Zähler und alle Nenner auf einen gemeinsamen Nenner bringen.
- Vor dem Multiplizieren so weit wie möglich kürzen
- Alle verbleibenden Zahlen und Variablen im Zähler multiplizieren. Alle Zahlen und Variablen im Nenner multiplizieren.
- Ergebnis, wenn möglich, bzw., wenn gefordert, in eine gemischte Zahl umwandeln

Vor dem Multiplizieren immer erst kürzen!

Übung:

Berechnen Sie die folgenden Produkte und kürzen Sie so weit wie möglich.

$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} =$ _____

$\frac{3z}{4y} \cdot \frac{2y}{3z} =$ _____

(3) $\frac{2x}{3} \cdot \frac{15}{14x} \cdot 7 =$ _____

h) Brüche dividieren

Beispiel 1: Brüche dividieren

$$\frac{4}{1} : \frac{14}{3} = \frac{4}{1} \cdot \frac{3}{14} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}$$

- Alle gemischten und ganzen Zahlen als unechte Brüche darstellen.
- Dividieren bedeutet, mit dem Kehrwert des Bruches, der hinter dem Divisionszeichen steht, zu multiplizieren.
- Weiter vereinfachen.

Kehrwert:
Aus $(:)$ wird $(\cdot)$
Aus $\frac{14}{3}$ wird $\frac{3}{14}$

Merke: Man dividiert eine ganze Zahl oder einen Bruch durch einen Bruch, indem man mit dem Kehrwert des Bruches, der hinter dem Divisionszeichen steht, multipliziert.

Beispiel 2: Bruchterme, die Variablen enthalten, dividieren

- Schritte:**
1. Alle gemischten und ganzen Zahlen als unechte Brüche darstellen.
 2. Dividieren bedeutet, mit dem Kehrwert des Bruches, der hinter dem Divisionszeichen steht, zu multiplizieren.
 3. Weiter mit 2. Schritt beim Multiplizieren.

$$4a : \frac{2a}{3} = \frac{4a}{1} : \frac{2a}{3}$$

$$= \frac{4a}{1} \cdot \frac{3}{2a}$$

$$= \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot \frac{a}{a}$$

$$= 6 \cdot 1$$

$$= 6$$

Beispiel 3: Bruchterme mit Doppelbrüchen

$$(1) \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 \cdot \frac{2}{1} = 1 \cdot 2 = 2$$

$$(2) \frac{2}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{2}{1} = 2 \cdot 2 = 4$$

$$(3) \frac{\frac{2x}{3}}{\frac{x}{9}} = \frac{2x}{3} : \frac{x}{9} = \frac{2x}{3} \cdot \frac{9}{x} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Übung 1.1.h:

Berechnen Sie die folgenden Quotienten und stellen Sie das Ergebnis so weit wie möglich gekürzt dar.

$$(1) \frac{10}{\frac{1}{2}} =$$

$$(2) 3\frac{1}{4} : 2\frac{1}{8} =$$

$$(4) \frac{6}{\frac{15}{24}} =$$

$$(5) 9y : \frac{3y}{2} =$$

$$(6) \frac{5m}{\frac{1}{1}} =$$

Aufgabe 1.2

Potenzgesetze

Information: Definition des Begriffs Potenz

Bei der Addition von Summanden ist Ihnen mit Sicherheit bekannt, dass man die Summanden zur Abkürzung mit Hilfe eines Vorfaktors zusammenfassen kann. Beispiel: $4 + 4 + 4 = 3 \cdot 4$. Bei der Multiplikation gibt es einen ähnlichen Zusammenhang. So kann man ein Produkt aus gleichen Faktoren wie folgt zusammenfassen: $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$. Allgemein lautet die Definition:

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$
 a heißt die Basis, n die Anzahl der n -Faktoren.

a wird als Basis bezeichnet.
 n wird als Exponent bezeichnet.

Der Exponent n gibt an, wie oft die Basis a mit sich selbst multipliziert wird, d. h. potenziert wird.

Vor einem Exponenten einer Zahl, welche potenziert wird, können sich Vorfaktoren oder auch Minuszeichen befinden.

Auf einen Vorfaktor (vor der Basis a) hat der Exponent n keinen Einfluss. Ein Minuszeichen kann als Vorfaktor betrachtet werden und bleibt nach dem Potenzieren ebenfalls unverändert erhalten.

Bsp.: $-2^2 = -2 \cdot 2 = -4$
 $-2^3 = -2 \cdot 2 \cdot 2 = -8$

$u \cdot a^n = u \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a$
 $-a^n = -a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a$

Für die Division von Potenzen gilt die gleiche Regel wie bei der Multiplikation.

$1 \cdot a = a$
 $a^1 = a$

Der Exponent 1 wird nicht angegeben.

Übung zur Definition des Begriffs Potenz

Verdeutlichen Sie das Vorgehen Sie analog dazu.

Beispiel: $-24 = -2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$

$$-24 = -2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = -2^4 \cdot 3$$

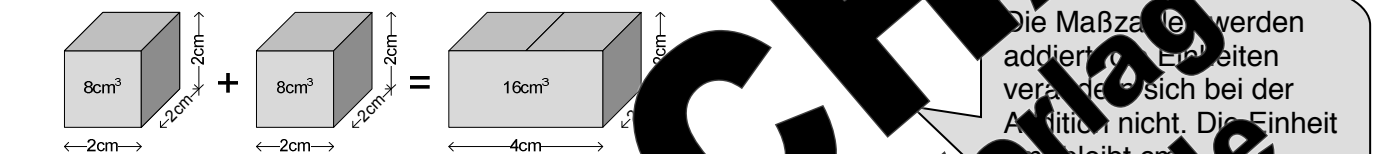
$$-4^4 = -4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = -256$$

$$-2^4 a = -2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot a = -16a$$

a) Addition von Ausdrücken mit Potenzen

Anhand der Berechnung von Einheiten (Dimensionen) lassen sich die Potenzgesetze hinsichtlich der Addition anschaulich darstellen. Größen kann man nur addieren oder subtrahieren, wenn sie die gleiche Einheit haben, bzw. wenn die Einheit die gleiche Potenz besitzt. Beispielsweise können Flächen und Längen oder Flächen und Volumina weder addiert noch subtrahiert werden.

Beispiel 1:



Beispiel 2:



Beispiel 3:

$$8 \text{ m}^2 + 8 \text{ cm}^2 = 80.000 \text{ cm}^2 + 8 \text{ cm}^2 = 80.008 \text{ cm}^2$$

Ergänzen Sie:
Man kann Potenzen nur addieren, wenn die Basis und der Exponent _____ sind. Im Einheitensystem* muss man dazu ggf. die _____ vorher _____..
wird der Exponent _____.

Allgemein kann man die Addition bzw. Subtraktion von Potenzen wie folgt darstellen:

$$u \cdot a^n \pm v \cdot a^n = (u \pm v) \cdot a^n$$

*SI-System: Internationales Einheitensystem (frz. **S**ystème international d'unités). Basiseinheiten sind: Meter, Kilogramm, Sekunde, Kelvin, Ampere, Candela.

Übungen zur Addition von Ausdrücken mit Potenzen

Verdeutlichen Sie sich jeweils die Beispiele und verfahren Sie entsprechend bei den Übungen.

Beispiel 1: $2^3 + 2^3 = 8 + 8 = 2 \cdot 8 = 2 \cdot 2^3 = 16$
 $a^3 + a^3 = 2a^3$

Achtung:
 $3 + 3^2 \neq 3^4 = 81$

- $3^2 + 3^2 = ___ + ___ = ___ \cdot ___ = ___ \cdot ___ = ___$
- $5^3 + 5^3 = ___ + ___ = ___ \cdot ___ = ___ \cdot ___ = ___$
- $4^2 + 4^2 + 4^2 = ___ + ___ + ___ = ___ \cdot ___ = ___ \cdot ___ = ___$
- $x^2 + x^2 = ___$
- $b^2 + b^2 + b^2 = ___$

Achtung:
 $x^2 + x^2 \neq x^4$

Beispiel 2:

$$4x^2 + 2x^2 + x = 6x^2 + x$$

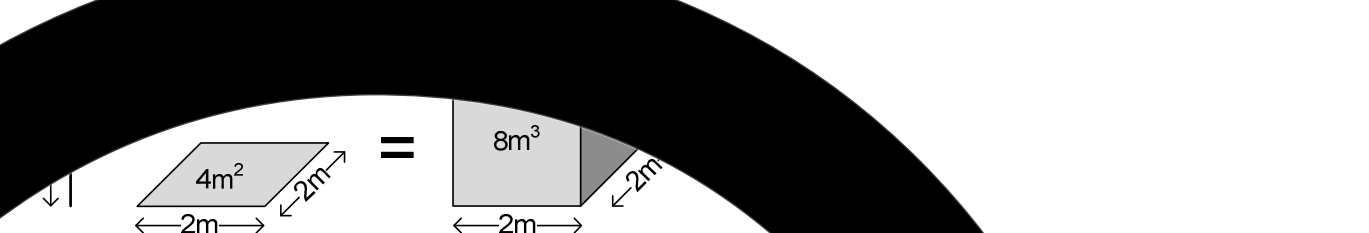
$$(1) \quad 3x^3 - x^3 - 10x^2 + 7x = ___$$

$$(2) \quad 2x^2 + 5x^2 - 3x - 10x^2 - x^2 = ___$$

Produkte bei Potenzen gleicher Basis

Wie bei der Addition kann man auch die Multiplikation von Potenzen anhand der Berechnung von Flächen und Volumen anschaulich darstellen.

Beispiel 1:



Rechnung: $4 \text{ m}^2 \cdot 2 \text{ m} = 8 \text{ m}^3$

Ergänzen Sie:
 Die Zahlenwerte der _____ werden _____.
 Die Exponenten der _____ werden _____, wenn _____.
 Die Einheiten werden _____ sind.

Beispiel 2:

$3\text{m} \cdot 50\text{cm} = 3\text{m} \cdot 0,5\text{m} = 3\text{m}^1 \cdot 0,5\text{m}^1 = 1,5\text{m}^2$

Einheiten müssen ggf. umgerechnet werden.

In verallgemeinerter Form lässt sich die Regel zur Multiplikation von Potenzen wie folgt veranschaulichen.

$a^3 \cdot a^4 = \underbrace{a \cdot a \cdot a}_{a^3} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a}_{a^4} = a^7$

Ergänzen Sie den folgenden Merksatz:

Bei der Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis werden die Basis multipliziert, indem man die Exponenten addiert.
 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Angewandte Produkte bei Potenzen gleicher Basis

Verfassen Sie die Terme so weit wie möglich, indem Sie Potenzen mit gleicher Basis zusammenfassen.

(1) $x^3 \cdot x^5 =$ _____ (2) $2z^2 \cdot 6z^3 \cdot 3z^5 \cdot 4z =$ _____

(3) $3a^2 \cdot 4b^3 \cdot 2b^5 =$ _____ (4) $7v^{5a} \cdot v^{4a} =$ _____

(5) $v^{3a+1} \cdot v^{4a+2} =$ _____

(6) $5\text{cm}^2 \cdot 2\text{mm} =$ _____ (10) $30\text{cm}^2 \cdot 5\text{cm} =$ _____

In Aufgabenstellungen ist oft auch der umgekehrte Rechenweg wichtig. Formulieren Sie die Terme so, dass keine Summen in den Exponenten auftreten.

(11) $x^{a+b} =$ _____ (12) $z^{a+3b} =$ _____

(13) $z^{2a+b} =$ _____ (14) $x^{5a+b+c} =$ _____

(15) $2x^{2a+b} \cdot 3x^{a+2b} =$ _____ (16) $2x^{2a+b} \cdot 3x^{a+2b} =$ _____

c) Potenzen, Brüche und negative Exponenten

In Aufgabe 1.1 haben Sie gelernt, wie man Variablen in Brüchen kürzen kann. Diese Kenntnisse sollen im folgenden Beispiel verwendet werden, um zu begründen, warum negative Exponenten sinnvoll sind. Verdeutlichen Sie sich die Überlegungen.

Anwenden der Definition von Potenzen auf y^5 und y^3 und paarweises Kürzen von y liefert y^2

Darstellung des Ergebnisses als y^{5-3} darstellen.

$\frac{y^5}{y^3} = \frac{\overbrace{y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y}^1}{\underbrace{y \cdot y \cdot y}_1} = y^2$

$y^2 = y^{5-3}$
 $y^2 = y^5 \cdot y^{-3}$

Den Exponenten kann man zur Summe umformen und dann die Regel für die Multiplikation von Potenzen anwenden.

Man erhält nun die Ausgangsausdrucksstellung mit dem

Ergebnis, so ergibt sich: $\frac{y^5}{y^3} = y^5 \cdot y^{-3}$
oder entsprechend: $\frac{1}{y^3} = y^{-3}$

Man erkennt aus diesem Beispiel, dass negative Exponenten eine neue Schreibweise für Brüche beinhalten, und man kann die folgende Regel formulieren.

Ergänzung: Dieser Zusammenhang wird auch beim Exponenten 1 angewandt. Es gilt: $\frac{1}{a} = a^{-1}$

Ergänzung zu negativen Exponenten

Mit Hilfe der Potenzgesetze kann man Brüche so darstellen, dass der Nenner als Bruchstrich mehr

$\frac{a^m}{a^n} = a^m \cdot a^{-n} = a^{m-n}$

Übungen zu Potenzen, Brüchen und negativen Exponenten

Beispiel 1: $\frac{x^4}{x^3} = x^4 \cdot x^{-3} = x^{4-3} = x$ bzw. $\frac{3x^4}{x^6} = 3x^4 \cdot x^{-6} = 3x^{4-6} = 3x^{-2} = \frac{3}{x^2}$

Zusatzinfo:

Man kann die Potenzgesetze auch verkehrt anwenden:

$$\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$$

Kürzen Sie die angegebenen Brüche. Sie dürfen die Potenzgesetze anwenden und schreiben Sie das Ergebnis ggf. ohne negativen Exponenten.

(1) $\frac{z^5}{z^3} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$ (2) $\frac{u^2}{u^3} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

(3) $\frac{2c^5}{c^4} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$ (4) $\frac{a^2}{a^3} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

Beispiel 2: $x^{-2v} = \frac{x^u}{x^{u+2v}}$ bzw. $3x^{u-2v} \cdot 2x^{v-u} = 3 \cdot 2 \cdot x^{u-2v+v-u} = 6x^{-v} = \frac{6}{x^v}$

Formulieren Sie Bruchterme (Aufg. 6) entsprechend der Beispiele so um, dass keine negativen Exponenten und keine Summen in den Exponenten auftreten.

(1) $x^{-2} \cdot y^5 = \underline{\hspace{2cm}}$ (2) $b^{3a-1} = \underline{\hspace{2cm}}$

(3) $\frac{1}{x^{a-b}} = \underline{\hspace{2cm}}$ (4) $3 \cdot y^{a+2} = \underline{\hspace{2cm}}$

(5) $x^{a+b} = \underline{\hspace{2cm}}$

Prüfen Sie, unter Angabe des Fehlers, warum die Umformung falsch ist.

(1) $\frac{1}{x^{v-w}} = x^{-v-w}$ Die Umformung ist falsch, weil $\underline{\hspace{2cm}}$

Die richtige Umformung lautet: $\frac{1}{x^{v-w}} = x^{\underline{\hspace{2cm}}}$

d) Der Exponent 0

Warum irgendetwas hoch Null immer die Zahl 1 ergibt, ist eine häufig gestellte Frage. Verdeutlichen Sie sich den Zusammenhang anhand der folgenden Darstellung.

Aus der Bruchrechnung ist bekannt, dass gilt:

$$\frac{a}{a} = \frac{a^1}{a^1} = \frac{1}{1} = 1$$

also: $\frac{a}{a} = 1$

Aus der Potenzrechnung ist bekannt, dass gilt:

$$\frac{a}{a} = \frac{a^1}{a^{1-1}} = a^0$$

$$\frac{a}{a} = a^0$$

Ergänzung:

Damit dieser Zusammenhang für alle reellen Zahlen gültig ist, wird festgelegt, dass auch gilt:

$$a^0 = 1$$

e) Punkte bei Potenzen mit ungleicher Basis und gleichem Exponenten

Formulieren Sie für den folgenden Zusammenhang einen Merksatz, indem Sie den Text ergänzen.

Ausklammern von Exponenten

$$a^n \cdot b^n$$

... unterschiedliche Basis, jedoch den gleichen Exponenten, ... ausgeklammert werden.

Beispiele: $2^6 \cdot 5^6 = (2 \cdot 5)^6 = 10^6 = 1.000.000$

Bei der Anwendung dieser Regel lassen sich oft Rechenvorteile nutzen.

Information:

... muss man Klammern setzen denn es gilt: $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$ und nicht $\frac{2}{3^2} = \frac{2}{9}$

Diese Regel ist vor allem auch dann wichtig, wenn es um Potenzen mit negativen Vorzeichen geht. Verdeutlichen Sie sich dazu die beiden folgenden Beispiele.

Zur Erinnerung:

Ein negatives Vorzeichen kann man immer als Multiplikation mit dem Vorfaktor (-1) interpretieren. Das Quadrat wirkt dann nur auf das a und nicht auf (-1) .

(1) $-a^2 = (-1) \cdot a^2 = -a^2$

(2) $(-a)^2 = (-1 \cdot a)^2 = (-1)^2 \cdot a^2 = (+1) \cdot a^2 = a^2$

Nur wenn das Vorzeichen in einer Klammer steht, wird der Ausdruck quadriert, da das Quadrat hinter der Klammer an die a's in der Klammer wirkt.

(3) Begründen Sie anhand einer ausführlichen Formel, entsprechend zu (1) bzw. (2), dass mit $(-a)^3 = -a^3$

$(-a)^3 =$ _____

Ergänzen Sie die folgende verallgemeinerte Merkregel

Vorzeichen beim Potenzieren

Wenn n eine _____ Zahl ist gilt: $(-a)^n = a^n$

Wenn n eine _____ Zahl ist gilt: $(-a)^n = -a^n$

Beispiel: $(-2)^4 = 2^4 = 16$ und $(-2)^5 = -2^5 = -32$

Übungen zum Produkt bei Potenzen mit ungleicher Basis und unterschiedlichen Exponenten

Vereinfachen Sie die Terme, ohne Verwendung des Taschenrechners, wenn möglich. Stellen Sie dabei alle auftretenden Exponenten dar.

(1) $\frac{48^2}{144^2}$

(2) _____

(4) $\frac{(-3)^4}{-3^4} =$ _____

(5) $\frac{(-5)^3}{-5^3} =$ _____

(6) $(-2)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} =$ _____

f) Potenzieren von Potenzen

Verdeutlichen Sie sich anhand der folgenden Beispiele, welche Regeln zu beachten sind, wenn eine Potenz potenziert wird. Ergänzen Sie die folgende Merkregel.

$(2^2)^2 = (4)^2 = 16$ und $2^2 \cdot 2^2 = 2^4 = 2^2$

$(2^3)^2 = (8)^2 = 64$ und $2^3 \cdot 2^3 = 2^6 = 2^{3 \cdot 2}$

$(2^2)^3 = (4)^3 = 64$ und $2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 = 2^6 = 2^{2 \cdot 3}$

$(2^5)^2 = 32^2 = 1024$ und $2^5 \cdot 2^5 = 2^{10} = 2^{5 \cdot 2}$

$(2^2)^5 = 4^5 = 1024$ und $2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 = 2^{10} = 2^{2 \cdot 5}$

$(2^2)^5 = (4)^5 = 1024$ und $2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 = 2^{10} = 2^{2 \cdot 5}$

Merkmale beim Potenzieren einer Potenz

Eine Potenz wird potenziert, indem man die Exponenten _____.

Die Reihenfolge, in der potenziert wird, spielt dabei _____ Rolle. Es gilt:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} = a^{n \cdot m} = (a^n)^m$$

Achtung: Das Potenzieren einer Potenz ist nicht mit dem Potenzieren des Exponenten gleichzusetzen. Der Zusammenhang wird durch das folgende Beispiel

$(a^2)^3 \neq a^{2^3}$, denn $a^{2^3} = a^8$ und $(a^2)^3 = a^6$ (denn $a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a^6$)

$(a^3)^2 \neq a^{3^2}$, denn $a^{3^2} = a^9$ und $(a^3)^2 = a^6$ (denn $a^3 \cdot a^3 = a^6$)

Übungen zum Potenzieren von Potenzen

a) Berechnen Sie

b) Kreuzen Sie an:

- (1) $x^4 + x^3 = x^7$ richtig ☐ falsch ☐
- (2) $x^4 \cdot x^3 = x^7$ richtig ☐ falsch ☐
- (3) $(x^4)^3 = \begin{cases} x^7 & \text{richtig} \quad \text{falsch} \\ x^{12} & \text{richtig} \quad \text{falsch} \\ x^{64} & \text{richtig} \quad \text{falsch} \end{cases}$
- (4) $(x^{-3})^4 = \begin{cases} x^7 & \text{richtig} \quad \text{falsch} \\ x^{12} & \text{richtig} \quad \text{falsch} \\ x^{64} & \text{richtig} \quad \text{falsch} \end{cases}$
- (5) $-x^2 \cdot x^{-2} = \begin{cases} 0 & \text{richtig} \quad \text{falsch} \\ -1 & \text{richtig} \quad \text{falsch} \\ 1 & \text{richtig} \quad \text{falsch} \end{cases}$
- (6) $-4x^3 = \begin{cases} 7x^6 & \text{richtig} \quad \text{falsch} \\ 7x^3 & \text{richtig} \quad \text{falsch} \\ 7x^9 & \text{richtig} \quad \text{falsch} \end{cases}$
- (7) $x^2 \cdot x^{-2} = \begin{cases} 1 & \text{richtig} \quad \text{falsch} \\ 0 & \text{richtig} \quad \text{falsch} \end{cases}$
- (8) $x^2 = \begin{cases} x^{12} & \text{richtig} \quad \text{falsch} \\ x^{81} & \text{richtig} \quad \text{falsch} \end{cases}$
- (9) $x^4 = (x^{-2})^{-2}$ richtig ☐ falsch ☐
- $-x^2 = \begin{cases} x^2 & \text{richtig} \quad \text{falsch} \\ -x^2 & \text{richtig} \quad \text{falsch} \end{cases}$

g) Potenzen mit rationalen Exponenten

Sie haben in Ihrem bisherigen Unterricht bereits Erfahrungen mit Wurzeln gesammelt. So wissen Sie, dass zum Beispiel

$\sqrt{4} = 2$
 $\sqrt{25} = 5$
 $\sqrt[3]{27} = 3$

Es soll nun erarbeitet werden, dass die Wurzelzeichen auch mit Hilfe von Potenzen dargestellt werden können. Um die Zusammenhänge zu verdeutlichen, werden auch hier wieder Zahlenbeispiele herangezogen.

Ist $\sqrt[3]{8} = 2$ und auch $2 = 8^{\frac{1}{3}}$ gilt, so gilt auch $\sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}}$.
D.h. die Exponenten haben die Bedeutung wie die bisher verwendeten.
Potenzgesetz potenzieren

und $2 = 2^1 = 2^{\frac{1}{3} \cdot 3} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}}$

$1 = 3 \cdot \frac{1}{3}$

Ergänzen Sie die Quadratwurzeln die folgende Vereinbarung wurde:

Bei der Quadratwurzel wird die 2 nicht notiert, bzw., wenn über der Wurzel nichts steht, handelt es sich um eine Quadratwurzel.

$\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$

Der Zusammenhang zwischen gebrochenem Exponent und Wurzelzeichen soll nun an weiteren Beispielen überprüft werden. Ergänzen Sie fehlende Angaben.

$\sqrt[4]{625} = 5$ und $625^{\frac{1}{4}} = (\quad)^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{4 \cdot 1}{4}} = 5^{\square} = 5$

$\sqrt[5]{32} = \quad$ und $(32)^{\frac{1}{5}} = (2^{\square})^{\frac{1}{5}} = 2^{\square \cdot \frac{1}{5}} = 2^1 = \quad$

$\frac{1}{\sqrt{49}} = \frac{1}{\square}$ und $49^{-\frac{1}{2}} = (7^2)^{-\frac{1}{2}} = 7^{\square \cdot (-\frac{1}{2})} = 7^{-1} = \frac{1}{\square}$

Zusammenhang zwischen Wurzel und rationalen Potenzen:

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ bzw. $\frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^n}$

h) Potenzieren von rationalen Exponenten bzw. Potenzieren von Wurzeln

Für das Potenzieren von Termen mit gebrochenen Potenzen oder Wurzeln benötigt man im Prinzip keine neuen Potenzgesetze und auch die notwendigen Regeln für auftretende Brüche sind aus Aufgabe 1.1 bekannt. Verdeutlichen Sie sich die folgenden Umformungen bzw. Umformungsschritte, und geben Sie an, welche der aufgelisteten Potenzgesetze und Regeln für die Bruchrechnung jeweils verwendet wurden. Ordnen Sie jedem Umformungsschritt die passende Nummer zu.

$(a^n)^m = (a^n)^m$ ① $(a^n)^m = a^{m \cdot n}$ ② $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ ③ $a^{m \cdot n} = a^{n \cdot m}$ ④ $m \cdot \frac{1}{n} = \frac{m}{n}$ ⑤ $\frac{1}{n} \cdot m = \frac{m}{n}$ ⑥

$(\sqrt[n]{a})^m = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{1}{n} \cdot m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{m \cdot \frac{1}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Verdeutlichen Sie den folgenden Zusammenhang, den man sich

Potenzieren von Wurzeln:

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$

Verdeutlichen Sie die häufig auftretende Aufgabensituationen und geben Sie die folgenden Beispiele und die entsprechenden Rechnungen analog dazu.

Beispiel 1: Sonderfall $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a$

Zur Erinnerung:
 $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$

$$\begin{aligned} (1) \quad \sqrt{a^2} &= (a^2)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{2}} = a^1 = a \\ (\sqrt{a})^2 &= \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a^{\frac{1}{2} \cdot 2} = a^1 = a \\ (\sqrt{a})^2 &= \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = a^1 = a \end{aligned}$$

$$\sqrt{a^2} = (\sqrt{a})^2 = a$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \sqrt[3]{a^3} &= (a^3)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{3}{3}} = a^1 = a \\ (\sqrt[3]{a})^3 &= \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 = a^{\frac{1}{3} \cdot 3} = a^1 = a \\ (\sqrt[3]{a})^3 &= \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = a^1 = a \end{aligned}$$

$$\sqrt[3]{a^3} = (\sqrt[3]{a})^3 = a$$

Beispiel 2: Partielles Wurzelziehen

$$\begin{aligned} \sqrt{a^3} &= (a^3)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{2}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^1 \cdot a^{\frac{1}{2}} = a \cdot \sqrt{a} \\ \sqrt{a^3} &= \sqrt{a^{2+1}} = \sqrt{a^2 \cdot a} = (a^2 \cdot a)^{\frac{1}{2}} = (a^2)^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a^2} \sqrt{a} = a \sqrt{a} \end{aligned}$$

zum Merken.

Merke: „Zerschneiden“ von Wurzeltermen bzw. partielles Wurzelziehen

Wenn in einem Wurzelterm mehrere Faktoren auftreten, darf man sie voneinander mit einem eigenen Wurzelzeichen versehen und die Wurzeln voneinander ziehen. Das kann auch als **partielles Wurzelziehen** bezeichnet werden. Es gilt:

$$\sqrt{a^m \cdot a^n} = \sqrt{a^m} \sqrt{a^n}$$

Die kurze Version des partiellen Wurzelziehens in folgenden Beispielen, indem Sie die Lücken vervollständigen.

$$\sqrt{a^4 \cdot a} = \sqrt{a^4} \sqrt{a} = a^2 \sqrt{a}$$

$$(2) \quad \sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = \sqrt{36} \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

$$(3) \quad \sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

$$(4) \quad \sqrt{8x} = \sqrt{4 \cdot 2x} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2x} = 2\sqrt{2x}$$

$$(5) \quad \sqrt{288x} = \sqrt{144 \cdot 2x} = \sqrt{144} \sqrt{2x} = 12\sqrt{2x}$$

$$(6) \quad \sqrt{125x^3} = \sqrt{25x^2 \cdot 5x} = 5x \sqrt{5x}$$

$$(7) \quad \sqrt{98z^3} = 7z \sqrt{2z}$$

$$(8) \quad \sqrt{128x^5} = 8x^2 \sqrt{2x}$$

Treten unter der Wurzel Zahlen auf, so kann eine partielle Wurzel gezogen werden, wenn die Zahl in Faktoren zerlegt werden kann, bei denen als Faktoren Quadratzahlen auftreten. Es ist günstig, den quadratischen Faktor, die größtmögliche Quadratzahl zu wählen. Können Sie die Aufgabe (2) auch so lösen:
 $\sqrt{72} = \sqrt{8 \cdot 9} = \sqrt{8} \cdot \sqrt{9} = \sqrt{4 \cdot 2} \cdot 3 = 2\sqrt{2} \cdot 3 = 6\sqrt{2}$
Das ist jedoch aufwändiger.

Achtung!

Aus einer **Summe** oder **Differenz** kann man keine partielle Wurzel ziehen.

$$\sqrt{x^2 + y^2} \neq x + y$$

Verdeutlichen Sie sich das am folgenden Zahlenbeispiel:

$$\text{richtig: } \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$\text{falsch: } \sqrt{9 + 16} \neq \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$$

Beispiel

$$\sqrt{a^2} = a \quad \text{denn } \sqrt{a^2} = (a^2)^{\frac{1}{2}} = a^1 = a$$

Verfahren Sie wie im Beispiel:

$$(1) \quad \sqrt[4]{a^4} = \sqrt[4]{a^4} = a \quad \text{denn } \sqrt[4]{a^4} = (a^4)^{\frac{1}{4}} = a^1 = a$$

$$(2) \quad \sqrt{a^4} = a^2 \quad \text{denn } \sqrt{a^4} = (a^4)^{\frac{1}{2}} = a^2$$

$$\sqrt{a^4} = a^2, \quad \text{denn } \sqrt{a^4} = (a^4)^{\frac{1}{2}} = a^2$$

$$\sqrt{32a^5} = \sqrt{16a^4 \cdot 2a} = 4a \sqrt{2a}, \quad \text{denn } \sqrt{32a^5} = \sqrt{16a^4 \cdot 2a} = 4a \sqrt{2a}$$

Mehrfache Wurzeln entsprechen dem Potenzieren mit demselben Exponenten.
Beispiel: $\sqrt[3]{a^6} = a^2$ entspricht $a^{\frac{6}{3}} = a^2$.

Beispiel 4: Rationalmachen des Nenners

Treten in Brüchen Wurzeln auf, so wird ein Bruch in der Regel so angegeben, dass der Nenner keine Wurzel erscheint. Dies ist auch bei den gängigen Modellen der Taschenrechner der Fall.

Wenn man im Taschenrechner beispielsweise den Term $\frac{3}{\sqrt{2}}$ eingibt und die $\sqrt{}$ -Taste betätigt,

erhält man $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Verdeutlichen Sie sich diesen Zusammenhang und den zugehörigen Vermutungssatz und machen Sie anschließend die Nenner der gegebenen Brüche in (1) und (2) rational. (vgl. ergänzende und vertiefende Übungen zu Kapitel 1)

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} \cdot \frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

$$(1) \quad \frac{5}{\sqrt{3}} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

(2) $\frac{6}{\sqrt{2}} =$ _____

$$(3) \quad \frac{3a}{\sqrt{2a}} = \frac{3\sqrt{2}a}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}a$$

(4) a

Bemerkungen hinsichtlich der Darstellung von Ergebnissen bei Rechnungen

Kommen bei Rechnungen, beispielsweise bei der Lösung von Gleichungen, Wurzeln vor, lassen sich die Ergebnisse nicht exakt mit dem Taschenrechner darstellen, sondern man erhält immer ein auf die Anzahl der Stellen des Taschenrechners gerundetes Ergebnis.

Beispiel: $2\sqrt{2} \approx 2,8284... \approx 2.83$

Entsprechendes gilt für die Darstellung von Brüchen als Dezimalbrüchen, wie

$\frac{1}{6} \approx 0.16$ und $\frac{1}{3} \approx 0.33$ und der Eulerschen Zahl $e \approx 2.718$

Das Ergebnis für nachfolgende Rechnungen ist es ungünstig, mit dem gerundeten Zahlenwert weiterzurechnen. Hier kann der Aufwandsfaktor am Taschenrechner geringfügig werden und es können sich Eingabefehler einschleichen. Aus diesen gerundeten Zwischenergebnissen ungenaue Endergebnisse auftreten. In der Praxis spielt der gerundete Zahlenwert zudem häufig keine Rolle.

Aus diesen Gründen sollte die Normalisierung in einer „möglichst vereinfachten und analysierten“ Form, ohne weitere Schritte explizit auszurechnen, wobei das Kriterium darin besteht, dass das Ergebnis am Ende gut lesbar ist bzw. die Normalisierungs-Übungs- oder Klausuraufgabe das Normalisieren muss daher keine eindeutige Darstellung eines Ergebnisses liefern und bedeutet:

- Brüche so weit wie möglich kürzen und als unechte Brüche darstellen.
- Brüche von Brüchen möglichst ohne Wurzeln darstellen.
- Ausdrücke mit Zahlen und Variablen oder Konstanten (falls zugeordnet) werden, beginnen mit einem Minuszeichen, wenn es erforderlich ist, und sortiert.

reuten komplexer Zahlen soll im Nenner ihre Einheit auftreten

Überblick Gesetze und Definitionen bei der Potenzrechnung

Grundlegende Zusammenhänge			
Der Exponent Null		Der Exponent Eins	Der Exponent $\frac{1}{n}$
$a^0 = 1$	$0^0 = 1$	$a^1 = a$	$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$
Potenzen mit gleichem Exponenten			
Addition und Subtraktion		Multiplikation und Division	
$u \cdot a^n \pm v \cdot a^n = (u \pm v) \cdot a^n$		$a^m \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ $\frac{a^m}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	
Potenzen mit negativen Exponenten			
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$		$a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$	
Multiplikation und Division von Potenzen mit gleicher Basis			
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$		$\frac{a^m}{a^n} = a^m \cdot a^{-n} = a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}}$	
Potenzieren von Potenzen			
ganzzahlige Exponenten	rationale Exponenten	potenzierte Exponenten	
$(a^m)^n = (a^n)^m = a^{m \cdot n}$	$a^{\frac{m}{n}} = a^{m \cdot \frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{1}{n} \cdot m} = (\sqrt[n]{a})^m$	$a^{m^n} = a^{(m^n)} \neq (a^m)^n$	

Vermischte Übungen

Fassen Sie zusammen oder
Sagen Sie, warum nicht weiter vereinfachen

(1) $8m^2 + 7m^2 =$

(2) $5\text{cm}^2 + 2\text{cm}^2$

(3)

$\rho_{\text{eff}} =$

$$(2 \text{ m})^2 =$$

QUESTION *What is the best way to determine the appropriate sample size for a study?*

b) Notieren Sie jeweils die verwendeten Potenzgesetze, bzw. erläutern Sie die erfassten Termumformungen in Stichworten.

- (1)

$$\frac{\sqrt{18x^3}}{\sqrt{2x}} = \sqrt{\frac{18x^3}{2x}} = \sqrt{9x^2} = 3x$$

Potenzgesetz: _____

Umformungen: _____
- (2)

$$t^4 \cdot t^3 = t^7$$

Potenzgesetz: _____
- (3)

$$z^{1+3a} = z \cdot z^{3a}$$

Potenzgesetz: _____
- (4)

$$u^{2v-1} = u^{2v} \cdot u^{-1} = \frac{u^{2v}}{u}$$

Potenzgesetz: _____
- (5)

$$\sqrt[3]{4x^2} = \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{x^2}$$

Potenzgesetz: _____

Umformung: _____
- (6)

$$c^{2n} \cdot c^{1-n} = c^{2n+1-n} = c^{n+1}$$

Potenzgesetz: _____

Potenzgesetz: _____

Umformung: _____

c) Die Potenzrechnung bildet unter anderem eine Grundlage für Umformungen, die beispielsweise bei der Differenzial- und Integralrechnung notwendig werden. Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben im Hinblick auf später folgende Problemstellungen, indem Sie auch hier wieder Umformungsschritte erläutern bzw. die verwendeten Potenzgesetze angeben.

- (1)

$$\frac{1}{\sqrt{x}}$$

Potenzgesetz: _____

Potenzgesetz: _____
- (2)

$$\frac{3}{2}(3x+1)^{\frac{1}{2}}$$

Umformung: _____

Potenzgesetz: _____

Potenzgesetz: _____

- (3)

$$\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

Umformung: _____

Potenzgesetz: _____

Umformung: _____

Potenzgesetz: _____

Ergänzen Sie die fehlenden Exponenten bei der Variable x:

- (4)

$$2x^{\frac{1}{2}+1} = 2x^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{x^{\frac{3}{2}}} = 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = 2x\sqrt{x}$$

Formen Sie entsprechend zu _____
- (5)

$$4x^{\frac{1}{2}-1} =$$

- (6)

$$x^{\frac{1}{2}-1} =$$

d) Vereinfachen Sie soweit wie möglich, indem Sie partielle Wurzeln ziehen, Nenner rational machen und die Exponenten der Terme ohne Summen darstellen.

- (1)

$$\sqrt{288x^3} =$$

- (2)

$$\sqrt[3]{6x^3} =$$

- (4)

$$\frac{5x}{\sqrt{x}} =$$

- (5)

$$x^{\frac{1}{2}-1} =$$

Die Übungen: _____

Aufgabe 1.3

Multiplizieren und Faktorisieren von Summen

Information 1.3.1

Multiplizieren von Summen – Distributivgesetz

Distributivgesetz

$$a(b+c)=ab+ac$$

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

Multiplikation einer Summe mit einem Faktor

Jeden Summanden der Klammer mit dem Faktor multiplizieren.

Multiplikation einer Summe mit einer Summe

Jeden Summanden in der ersten mit jedem Summanden der zweiten Klammer multiplizieren.

Bestimmen Sie bei den folgenden Beispielen die Umformungen.

Beispiel 1:

(1) $2\sqrt{3}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{y}{\sqrt{12}}+\frac{z}{\sqrt{27}}\right)$

(2) $=\frac{2\sqrt{3}x}{\sqrt{3}}-\frac{2\sqrt{3}y}{\sqrt{12}}+\frac{2\sqrt{3}z}{\sqrt{27}}$

(3) $=2x-2\sqrt{3}\frac{y}{2\sqrt{3}}+2\sqrt{3}\frac{z}{3\sqrt{3}}$

Beispiel 2:

(1) $(\sqrt{2}x+\sqrt{3}y)(\sqrt{2}x-\sqrt{3}y)$

(2) $=\sqrt{2}\sqrt{2}x^2-\sqrt{2}\sqrt{3}xy+\sqrt{3}\sqrt{2}xy-\sqrt{3}\sqrt{3}y^2$

(3) $=2x^2-3xy+2xy-3y^2$

Beispiel 3:

(1) → (2)

(2) → (3)

(1) $(2x+1)(3x+2)(x-2)$

(2) $= (6x^2+4x+3x+2)(x-2)$

(3) $= (6x^2+7x+2)(x-2)$

(4) $= 6x^3-12x^2+7x^2-14x+2x-4$

(5) $= 6x^3-5x^2-12x-4$

Merkmale beim Multiplizieren von drei Klammern

1. Schritt: Man multipliziert zuerst zwei Klammern miteinander, schreibt das Ergebnis in Klammern und die noch verwendete dritte Klammer dazu.

2. Schritt: Man fasst, wenn möglich, das Ergebnis der Multiplikation aus dem ersten Schritt zusammen.

3. Schritt: Man multipliziert jeden Summanden der ersten Klammer mit jedem Summanden der zweiten Klammer. Für das Beispiel oben gilt:

$$(a+b+c)(d+e)=ad+ae+bd+be+cd+ce$$

4. Schritt: Man fasst die Summanden zusammen.

Zusatzinformation:

Dieses Verfahren lässt sich auch auf Summanden in einer Klammer erweitern.

Beispiel 4:

Ergänzen

(2) $(6x^5-12x^4+x^3-10x^2+2x+1)(x-2)$

$$= 6x^5-12x^4+x^3-10x^2+2x+1$$

Übungen zu 1.3.1

Lösen Sie die Klammern auf und fassen Sie, soweit wie möglich, zusammen.

- a) $3z(5x + 3y + 7z + 1) =$
- b) $(2u + 3v)(a + 2b) =$
- c) $2\sqrt{2}\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{8}} + \frac{z}{\sqrt{18}}\right) =$
- d) $(\sqrt{5x} + \sqrt{10y})(\sqrt{2x} + \sqrt{5y}) =$
- e) $(3x - 5z)(2x^2 - 3xy - 2y^2) =$
- f) $(x^2 + 2x + 1)(x^2 - 2x + 1) =$

- $a^{2x} - a^{2x}) =$
- h) $b^{-2x}(b^x + 1 - b^{2x}) =$
- i) $\frac{2}{e^x}(e^{2x} - e^x) =$

Information 1.3.2

Faktorisieren von Summen

Summen, bei denen in jedem Summanden gleiche Faktoren vorkommen, kann man **Ausklammern** dieser Faktoren zu einem Produkt aus den ausgeklammerten Faktoren und einer Summe umformen. Dieses Verfahren, das auch als **Faktorisieren** bezeichnet werden kann, ist die Umkehrung der Multiplikation einer Summe mit einem Faktor.

Ausklammern bedeutet, dass man in Gedanken jeden Summanden durch die ausgeklammerten Faktoren, hier nur a, dividiert.

$$a\left(\frac{a}{a} + \frac{ab}{a} + \frac{ac}{a}\right)$$

Ausklammern von Faktoren

$$ac = a(1 + c)$$

Wenn ein Faktor, der ausgeklammert werden soll, nicht steht, muss man in Gedanken eine unsichtbare 1 vor den Summanden sehen.
$$1 \cdot a + ab + ac$$

Diese 1 bleibt beim Ausklammern erhalten.

Beispiel 1: $x + 3xz + xy = x(1 + 3z + y)$

Auf die 1 achten.

Beispiel

Schritt 1:
Die einzelnen Summanden in Gedanken in gleiche Faktoren zerlegen.
$$2 \cdot 2x^3x + 2 \cdot 4x^2x - 2xx + 2 \cdot 6x$$

Schritt 2:
Gleiche Faktoren in Gedanken markieren.
$$2 \cdot 2x^3x + 2 \cdot 4x^2x - 2x \cdot x + 2 \cdot 6x$$

... und vor die Klammern schreiben.

Schritt 3:
Nicht markierte Faktoren verbleiben in der Klammer. Auf eine 1 achten.

$$12x^2 + \sqrt{24}x^2 + \sqrt{27}x^3 = 2\sqrt{3}x + 2\sqrt{2}\sqrt{3}x \cdot x + 3\sqrt{3}x \cdot x^2 = \sqrt{3}x(2 + 2\sqrt{2}x + 3x^2)$$

Partielle Wurzeln ziehen.

Im Summand tritt $\sqrt{3}x$ auf.

Übungen zu 1.3.2

Faktorisieren Sie die Summen so weit wie möglich. Achten Sie beim Ausklammern darauf, dass im Endergebnis in der Klammer keine Brüche bzw. negative Exponenten oder Wurzeln vorkommen sind.

- a) $9a + 18ab + 3a^2$ = _____
- b) $yz + 3yz^3 - y^3z$ = _____
- c) $25x^3 - 15x^2 + 5x$ = _____
- d) $\sqrt{8t^2} + \sqrt{72}t^2 - \sqrt{32}t^3$ = _____
- e) $\frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{8}r + \frac{1}{8}$ = _____
- f) $c^x + 1 + \frac{1}{c^x}$ = _____
- g) $e^{-2x} + e^{2x} - 2$ = _____

Klammern Sie so aus, dass in der Klammer kein Bruch bzw. kein negativer Exponent vorhanden ist.

- f) $c^x + 1 + \frac{1}{c^x}$ = _____
- g) $e^{-2x} + e^{2x} - 2$ = _____

Ergebnisse: _____

Aufgabe 1.4
Binomische Formeln

Eine besondere Bedeutung beim Multiplizieren und Faktorisieren von Ausdrücken können die binomischen Formeln zu. Die Anwendung dieser Formeln zieht sich durch alle Gebiete der Mathematik. Daher sind eingehende Kenntnisse im Umgang mit diesen Formeln unerlässlich. Wenn Sie wissen, ob Ihnen diese Formeln geläufig sind, sollten Sie zumindest die Übungsaufgaben zu diesem Thema bearbeiten. Fehlende Kenntnisse können Sie dann ggf. anhand der gegebenen Informationen aufarbeiten.

Information 1.4

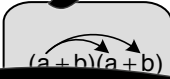
1. binomische Formel	2. binomische Formel	3. binomische Formel
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Diese Darstellung ist Ihnen mit Sicherheit bekannt. Nun soll die Entstehung dieser Formeln wiederholt und gleichzeitig begründet werden, inwiefern ihre Anwendung sinnvoll ist.

Aufgabe

- a) Im Folgenden wird die Entstehung der binomischen Formeln dargestellt. Erläutern Sie die Entwicklungsschritte in (1), (2) und (3). Versuchen Sie dabei, so weit wie möglich, Ausdrücke der Mathematik in Ihrer Muttersprache zu verwenden.

- Rechnungen
- Erläuterungen
- (1) $(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$
- (1) _____

- 
- (3) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- (3) _____

- b) Führen Sie die folgenden Berechnungen bzw. Rechenschritte mit der 2. binomischen Formel durch:

- (1) _____
- = _____
- = _____

c) Führen Sie nun die entsprechenden Berechnungen bzw. Rechenschritte für die binomische Formel durch.

(1) $(a + b)(a - b) =$ _____

(2) _____

Aufgabe 1.4.2

Ausmultiplizieren von Summen mit Hilfe der binomischen Formeln

Binomische Formeln treten bei Aufgaben auf, die nicht nur der Form $(a + b)^2$, $(a - b)^2$ und $(a + b)(a - b)$ auf, sondern es erscheinen andere Variablen und zusätzliche Zahlenwerte. Sie sollen nun lernen, wie man die binomischen Formeln anwenden kann, um die Klammern nicht jedes Mal erneut zeitaufwändig schrittweise ausmultiplizieren zu müssen. D.h., die binomischen Formeln werden verwendet, um effektiv und sicher zu arbeiten.

a) Anwenden der binomischen Formel

Verdeutlichen Sie sich die schrittweise Berechnung von: $(2x + 3y)^2$ am folgenden Beispiel. Wenn man mit dem Umgang der binomischen Formeln vertraut ist, kann die in den Sprechblasen aufgelisteten Schritte im Kopf abgelesen werden.

1. Schritt

Man wählt die richtigen binomischen Formeln und damit festlegen von Vorzeichen. Hier: 1. binomische Formel

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

2. Schritt

Man ordnet im Kopf den Werten aus der Aufgabe, **ohne auf Vorzeichen zu achten**, die Variablen a und b zu.

$$a := 2x^*$$

$$b := 3y$$

3. Schritt

Im Kopf den ersten Summanden einschließlich Vorfaktor quadrieren und Ergebnis notieren.

$$\text{Hier: } a^2 := (2x)^2 = 4x^2$$

4. Schritt

Im Kopf $2ab$ berechnen und Ergebnis notieren.

$$2ab := 2 \cdot 2x \cdot 3y = 12xy$$

5. Schritt

Im Kopf den zweiten Summanden einschließlich Vorfaktor quadrieren und Ergebnis notieren.

$$b^2 := (3y)^2 = 9y^2$$

*Hinweis zur Schreibweise: „a:=“ bedeutet, dass man der Variablen a den Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen steht.

b) Anwenden der 2. binomischen Formel

Berechnen Sie den Term $(5u - 7v)^2$ wie in Aufgabenteil a). Achten Sie darauf, dass bei der zweiten binomischen Formel der mittlere Summand $2ab$ ein negatives Vorzeichen hat. Achten Sie die Schritte, die im Kopf durchgeführt werden zunächst noch ausführlich in den vorgeschriebenen Stellen.

$$(5u - 7v)^2 =$$

Schritte im Kopf

1. Schritt: Man wählt die richtigen binomische Formel

2. Schritt: a := _____ b := _____

3. Schritt: a^2 := _____

4. Schritt: 2ab := _____

5. Schritt: b^2 := _____

c) Anwenden der 3. binomischen Formel

Verdeutlichen Sie sich anhand des Terms $(4r + s)(4r - s)$ die Anwendung der 3. binomischen Formel.

1. Schritt

Man wählt im Kopf die richtige Formel. Hier: 3. binomische Formel

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

2. Schritt

Man ordnet im Kopf den Werten aus der Aufgabe die Variablen a und b zu

$$a := 4r$$

$$b := s$$

$$(4r + s)(4r - s) = 16r^2 - s^2$$

3. Schritt

Im Kopf den ersten Summanden einschließlich Vorfaktor quadrieren und Ergebnis notieren

$$\text{Hier: } a^2 := (4r)^2 = 16r^2$$

4. Schritt

Im Kopf den zweiten Summanden einschließlich Vorfaktor quadrieren und Ergebnis notieren

$$\text{Hier: } b^2 := s^2$$

Berechnen Sie den Term $(0,5x + 2y)^2$ wie im Beispiel:

$$(0,5x + 2y)^2 =$$

Schritte im Kopf

1. Schritt: _____ Formel

2. Schritt: a := _____ b := _____

3. Schritt: a^2 := _____

4. Schritt: b^2 := _____

Übung zu 1.4.2

Lösen Sie die Klammern auf. Notieren Sie bei den Binomen direkt das Endergebnis. Wenn Sie Zwischenschritte im Kopf berechnen.

- a) $(a - 3b)^2$ = _____
- b) $(a + 1)^2$ = _____
- c) $(3x + 2y)(3x - 2y)$ = _____
- d) $(u + 1)(1 - u)$ = _____
- e) $(\frac{1}{3}w + v)^2$ = _____
- f) $(\frac{3}{5}x - 5y)^2$ = _____
- g) $(3s + \frac{1}{6}s - \frac{1}{6}s)^2$ = _____
- h) $(a + 3b)(a - 3b)$ = _____
- i) $(\frac{1}{2}r + \frac{1}{2}s)^2$ = _____
- j) $(\frac{4}{9}r + \frac{3}{4}s)^2$ = _____
- k) $(\frac{1}{5}a - \frac{3}{5}b)(\frac{1}{5}a + \frac{3}{5}b)$ = _____
- l) $(\sqrt{2}a + \sqrt{2}b)^2$ = _____
- m) $(\sqrt{10}a + \sqrt{5}b)^2$ = _____
- n) $(\sqrt{3}x - \sqrt{3}y)^2$ = _____
- o) $(\sqrt{7}x - \sqrt{3}y)^2$ = _____
- p) $(\sqrt{7}x - \sqrt{3}y)^2$ = _____
- q) $(\sqrt{3}t + \sqrt{2}s)(\sqrt{3}t + \sqrt{2}s)$ = _____
- r) $(a - b)^2$ = _____

Aufgabe 1.4.3

Faktorisieren von Summen mit Hilfe der binomischen Formeln

Genau wie beim Ausmultiplizieren von binomischen Formeln kann man auch bei der Umkehrung dieser Rechnung, nämlich aus einer Summe auf eine binomische Formel zurückzuschließen, schrittweise vorgehen. Man sollte dazu die binomischen Formeln auswendig im Kopf haben. Vorgehen soll hier ebenfalls anhand von Beispielen gezeigt werden.

a) Faktorisieren mit der 1. binomischen Formel

Zu Faktorisieren ist die Summe $25u^2 + 20uw + 4w^2$

1. Schritt
Man ordnet im Kopf anhand der Anzahl der Summanden und deren Vorzeichen eine mögliche binomische Formel zu.
Hier: $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

2. Schritt
Man zieht im Kopf die Wurzel aus dem ersten Summanden und ordnet das Ergebnis der Variable a zu.
Hier: $a := \sqrt{25u^2} = 5u$

3. Schritt
Man zieht im Kopf die Wurzel aus dem dritten Summanden und ordnet das Ergebnis der Variablen b zu.
Hier: $b := \sqrt{4w^2} = 2w$

4. Schritt
Man prüft im Kopf, ob das Produkt $2ab$ dem Summanden in der Mitte entspricht.
Hier: $2ab := 2 \cdot 5u \cdot 2w = 20uw$

Falls das nicht geht, kann die Summe nicht zum Binom umgeformt werden und Schritt 5.

5. Schritt
Man notiert, wenn möglich, das Ergebnis.
Hier: $(5u + 2w)^2$

$4x^2 - 4x + 1 =$ _____

- Schritt 1:** Welche binomische Formel ist möglich
1. Schritt: _____
2. Schritt: $a := \sqrt{\quad}$
3. Schritt: $b := \sqrt{\quad}$
4. Schritt: $2ab := \quad$
5. Binom notieren

c) Faktorisieren mit der 3. binomischen Formel

$$x^2 - 2 = x^2 - (\sqrt{2})^2 = (\quad)(\quad)$$

Wenn man 2 als $(\sqrt{2})^2$ auffasst, ist das ein drittes Binom.

Schritte im Kopf

- Schritt: $\quad$ binomische Formel
- Schritt: $a := \quad = x$
- Schritt: $b := \sqrt{\quad} = \sqrt{2}$
- Schritt: Ergebnis notieren.

d) Faktorisieren mit der 3. binomischen Formel und vorherigem Ausklammern

$$12x^2 - 3z^2 = 3(4x^2 - z^2) = 3(\quad)(\quad)$$

Das sieht zunächst nach einer binomischen Formel aus, da es keine quadratischen Summanden gibt. Man kann hier aber die 3 ausklammern und erhält:
 $12x^2 - 3z^2 = 3(4x^2 - z^2)$

Schritte im Kopf

- Schritt: $\quad$ binomische Formel
- Schritt: $a := \sqrt{\quad} = 2x$
- Schritt: $b := \sqrt{\quad} = z$
- Schritt: Ergebnis notieren.

e) Faktorisieren mit der zweiten binomischen Formel und vorherigem Ausklammern

Faktorisieren Sie die Summe $18a^2 - 12a + 2$, indem Sie schrittweise die fehlenden Angaben ausfüllen:

$$18a^2 - 12a + 2 = 2(\quad)$$

- Schritt: $\quad$ binomische Formel ist möglich
- Schritt: $a := \quad$
- Schritt: $b := \quad$
- Schritt: $2ab := \quad$
- Schritt: Ergebnis notieren.

Übung zu 1.4.3

Faktorisieren Sie die folgenden Summen so weit wie möglich, indem Sie Ausklammern und/oder die binomischen Formeln anwenden. Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.
Hinweis: Bei einer Aufgabe gibt es kein Ergebnis, da keine binomische Formel vollständig und nicht ausgeklammert werden kann.

a) $2ax + 2ay - 4az = \quad$

b) $6a^2b + 12ab^2 - 18 ab = \quad$

c) $4a^2 + 40ab + 25b^2 = \quad$

d) $49x^2 - 42xy^2 + 9y^4 = \quad$

e) $k^4 - 2k^2 + 1 = \quad$

f) $1 - \quad = \quad$

g) $6x^2 - \quad + 5 = \quad$

h) $\quad^6 - 8v^2 = \quad$

i) $12g^3 - 36g^2h + 27gh^2 = \quad$

j) $\frac{3}{4}ax + \frac{3}{4}bx - \frac{3}{4}x = \quad$

k) $\quad + \sqrt{12a} = \quad$

l) $\frac{1}{25}x^2 + \frac{2}{15}xy + \frac{1}{9}y^2 = \quad$

m) $\frac{4}{9}u^2 - 1 = \quad$

n) $\frac{1}{\quad} = \quad$

o) $\quad^2 = \quad$

Aufgabe 1.5

Quadratische Ergänzung

Aufgabenstellungen, wie beispielsweise die Ermittlung der Scheitelpunkte von Parabeln oder Lösungsverfahren bei quadratischen Ungleichungen, erfordern oft einen quadratischen Term zu einem Binom umzuformen. Man bezeichnet dieses Verfahren als **quadratische Ergänzung**. Die schrittweise Vorgehensweise bei der quadratischen Ergänzung wird wieder an einem Beispiel dargestellt. Die einzelnen Schritte können auch hier bei ein wenig Übung im Kopf ablaufen. Tragen Sie Schritt für Schritt jeweils die Zwischenergebnisse aus den Sprechblasen an die passenden Stellen ein.

In diesem Beispiel soll aus dem Term $16x^2 + 48xy + \dots$ ein Binom entstehen.

1. Schritt
Zuordnen einer passenden binomischen Formel. Anhand der $+ 48xy$ erkennt man die 1. binomische Formel.

$16x^2 + 48xy + \dots = (\dots)^2$

2. Schritt
Dem gegebenen quadratischen ersten Summanden a^2 durch Wurzelziehen den Wert von a entnehmen. Den Wert in der Klammer rechts vom Gleichheitszeichen eintragen.

Hier: $a = \sqrt{16x^2} = 4x$

Zwischenergebnis: $16x^2 + 48xy + \dots = (4x + \dots)^2$

3. Schritt
Mit Hilfe des zweiten Summanden, der aus $2ab$ besteht, auf den Wert von b schließen. Man dividiert dazu den mittleren Summanden durch $2a$.

Ergebnis in der Klammer rechts vom Gleichheitszeichen eintragen.

4. Schritt
Aus dem Ergebnis von Schritt 3 durch Quadrieren b^2 ermitteln und das Ergebnis notieren.

Hier: $b^2 := 36y^2$

Übung 1.5.1

Ergänzen Sie zum Binom: $x^2 - x + \dots$. Notieren Sie als Hilfestellung zunächst die einzelnen Rechenschritte, die im Kopf ablaufen, in der Sprechblase. (Kontrollergebnis: $(x - \frac{1}{2})^2$)

$x^2 - x + \dots = (\dots)^2$

Schritt 1 Kopf

1. Schritt: Binomische Formel

2. Schritt: $a := \sqrt{\dots} = \dots$

3. Schritt: $b = \frac{2ab}{2a} = \dots$

4. Schritt: $b^2 := \dots$

Übung 1.5.2

Ergänzen Sie zum Binom $\dots$ versuchen Sie dabei die Schritte 1 bis 4 im Kopf durchzuführen.

- a) $f^2 + \dots = \dots$
- b) $p^2 + q + \dots = \dots$
- c) $\dots - 4 \dots = \dots$
- d) $\dots + 8x + \dots = \dots$
- e) $9p^2 + 6p + \dots = \dots$
- f) $x^2 - 6x + \dots = \dots$
- g) $z^2 + z + \dots = \dots$
- h) $\dots + \dots = \dots$
- i) $\dots + az + \dots = \dots$
- k) $4x^2 - 4xy + \dots = \dots$
- l) $16a^2 - 32av + \dots = \dots$
- m) $16x^2 + \dots = \dots$
- n) $\dots + \dots = \dots$
- o) $\dots - 40vw + \dots = \dots$

Ergänzende und vertiefende Übungen

Um die Regeln zur Potenzrechnung und den Umgang mit Binomen zu festigen und zu vertiefen können Sie die folgenden ergänzenden Übungen bearbeiten. Dies ist besonders für diejenigen sinnvoll, die im Leistungskurs in Mathematik belegen wollen oder ein Studienfach wählen, in dem Vorlesungen in Mathematik obligatorisch sind.

Übung 1.6

Formen Sie die Brüche so um, dass im Nenner keine Wurzeln vorkommen. Vereinfachen Sie die Terme dabei so weit wie möglich. (Vergl. Aufgabe 1.5, Beispiel 1)

- a) $\frac{10b}{\sqrt{b}}$ = _____
- b) $\frac{3x}{\sqrt{27x}}$ = _____
- c) $\frac{z}{\sqrt{z+1}}$ = _____
- d) $\frac{x}{1-\sqrt{x}}$ = _____
- e) $\frac{\sqrt{y}-1}{\sqrt{y}+1}$ = _____

Übung 1.7
Vereinfachen Sie soweit wie möglich.

- a) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\frac{a}{b}}}$ = _____
- b) $\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{\frac{a}{b}}}$ = _____

- d) $\frac{\sqrt{\frac{a}{b}}}{\sqrt{\frac{b}{a}}}$ = _____
- e) $\frac{\sqrt{\frac{a}{b}}}{\sqrt{\frac{b}{a}}}$ = _____

Übung 1.8

Kürzen Sie den Bruch so weit wie möglich.

- a) $\frac{(x^n + x^{n+1})^2}{x^{2n}}$ = _____
- b) $\frac{x^{2n+1} - x^{2n+3}}{x^{n+1} + x^{n+2}}$ = _____

Übung 1.9

Faktorisieren Sie unter Anwenden des Binomischen Formelgesetzes und mit Hilfe der binomischen Formeln.

- a) $\sqrt{x^{2n} - 2x^{n+m} + x^{2m}}$ = _____
- b) $\sqrt{4x^{4n} + 4x^{2n+2} + 4y^2}$ = _____

Übung 1.10

Formen Sie jeden Term durch Ausklammern in ein geeignetes Faktors so um, dass in der Klammer keine negativen Potenzen bzw. keine Brüche auftreten.

- a) $a^x + 2$ = _____
- b) $b^{2x} + 4 - b^{-2x}$ = _____

Übung 1.11

Die Aufgabenstellung ist so formuliert, dass Missverständnisse entstehen. Die Aufgabenstellung dort ist so formuliert, dass Missverständnisse entstehen. Sie können sicherlich, dass das jedoch zu Missverständnissen führt, da für $x=0$ der Nenner Null erscheint, wodurch eine Division nicht möglich ist. Man muss diese Terme daher so umformen, dass der Nenner vollständig ausgekürzt werden kann oder im Nenner ein Ausdruck steht, der nie gleich Null wird. Erläutern Sie anhand der Beispiele die Rechenschritte, und wenden Sie dies dann auf die anderen Aufgaben an.

Beispiel 1

Rechnen Sie die folgenden Umformungen:

- $\frac{2xh + h^2 - x^2}{h} =$ (1) $\rightarrow$ (2) _____
- $\frac{2xh + h^2 - x^2}{h} =$ (2) $\rightarrow$ (3) _____

(3) $\frac{2xh + h^2}{h} =$

(3) → (4) _____

(4) $\frac{h(2x + h)}{h} =$

(4) → (5) _____

(5) $2x + h$

Für $h = 0$ ergibt sich der Term $2x$

Beispiel 2

Rechenschritte

Erläutern der Umformungen:

(1) $\frac{(x + h)^2 - (x + h) - (x^2 - x)}{h} =$

→ (2) _____

(2) $\frac{x^2 + 2xh + h^2 - x - h - x^2 + x}{h} =$

(2) → (3) _____

(3) $\frac{2xh + h^2 - h}{h} =$

(4) _____

(4) $\frac{h(2x + h - 1)}{h} =$

(4) → (5) _____

(5) $2x + h - 1$

Für $h = 0$ ergibt sich der Term $2x - 1$.

Beispiel 3

Rechenschritte

Erläutern der Umformungen:

(1) $\frac{1}{x + h} - \frac{1}{x} =$

(1) → (2) _____

(2) $\frac{x - (x + h)}{x(x + h)} =$

(3) → (4) _____

(4) $\frac{-h}{x(x + h)} =$

(4) → (5) _____

(5) $\frac{-h}{hx(x + h)} =$

(5) → (6) _____

(6) $\frac{-1}{x(x + h)}$

Für $h = 0$ ergibt sich der Term $-\frac{1}{x^2}$.

Beispiel 4

Rechenschritte

Erläutern der Umformungen:

(1) _____ =

(1) → (2) _____

(2) $\frac{(\sqrt{x + h} - \sqrt{x})(\sqrt{x + h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x + h} + \sqrt{x})} =$

(2) → (3) _____

(3) $\frac{(\sqrt{x + h})^2 - (\sqrt{x})^2}{h(\sqrt{x + h} + \sqrt{x})} =$

(3) → (4) _____

(4) $\frac{x + h - x}{h(\sqrt{x + h} + \sqrt{x})} =$

(4) → (5) _____

(5) $\frac{h}{h(\sqrt{x + h} + \sqrt{x})} =$

(5) → (6) _____

(6) $\frac{1}{(\sqrt{x + h} + \sqrt{x})}$

Für $h = 0$ ergibt sich der Term $\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Formen Sie mit Hilfe der Binomischen Formeln die folgenden Terme um.

a) $\frac{2(x + h)^2 - 1}{h}$

b) $\frac{(x + h)^3 - x^3}{h}$

c) $\frac{1}{x + h} - \frac{1}{x}$

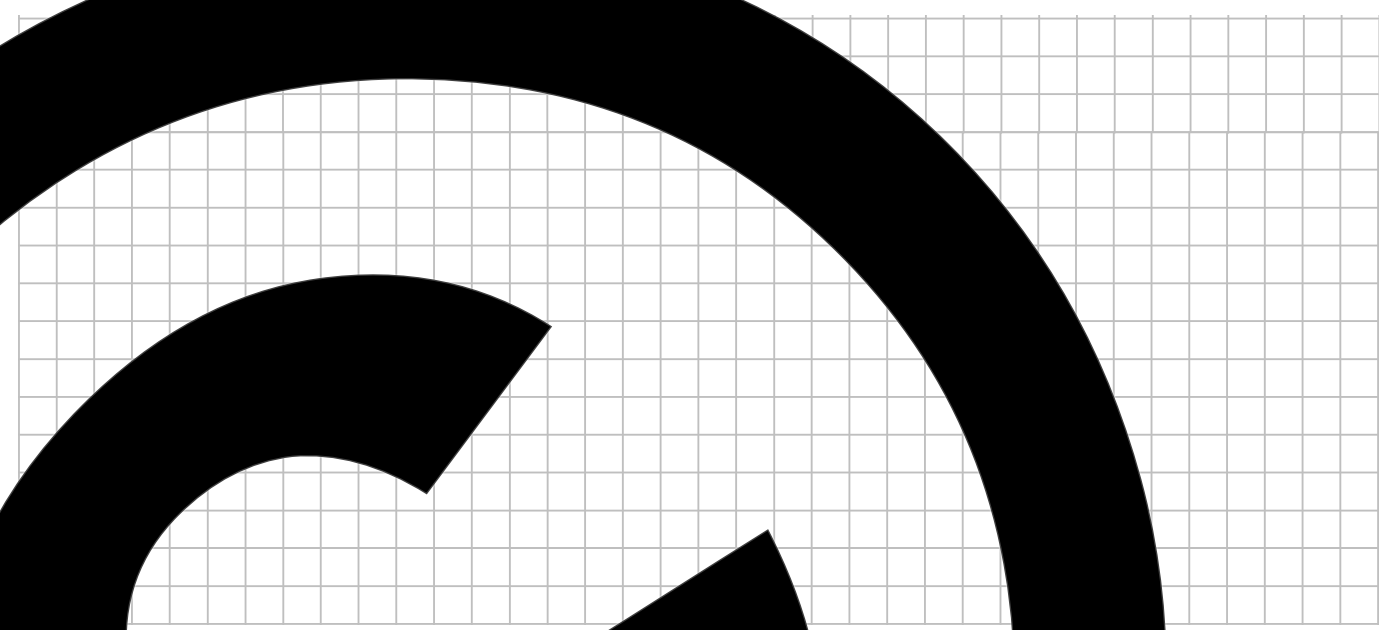
d) $\frac{1}{x + h + 1} - \frac{1}{x + 1}$

e) $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}$

f) $\frac{1}{\sqrt{x + h}} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

Lösungen nach Einsetzen von $h = 0$ in unsortierter Reihenfolge:

$3x^2; -\frac{1}{(x + 1)^2}; \frac{1}{2\sqrt{x + 3}}; 4x; -\frac{2}{x^3}; -\frac{\sqrt{x}}{2x^2}$





Aufgabe 1.6

Ergänzende Betrachtungen zu Binomen höherer Ordnung

- a) Multiplizieren Sie den Term $(2x + 3)^4$, ohne Verwendung von Hilfstexten, auf Fuß aus. Wenn Sie alles richtig umgeformt haben, erhalten Sie als Ergebnis $16x^4 + 96x^3 + 216x^2 + 216x + 81$.



- b) Berechnen Sie die Produkte durch Ausmultiplizieren der Klammern.

$(a + b)^0 = \underline{\hspace{2cm}}$

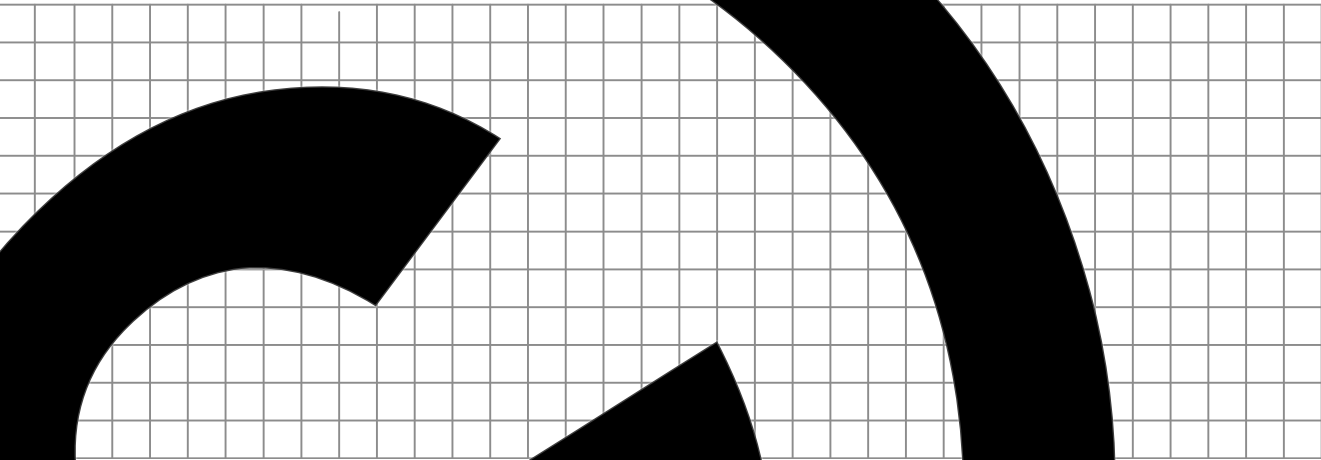
$(a + b)^1 = \underline{\hspace{2cm}}$

$(a + b)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$

$(a + b)^3 = \underline{\hspace{2cm}}$

$(a + b)^4 = \underline{\hspace{2cm}}$

Rechnungen.



- c) Ergänzen Sie die Tabelle, indem Sie das für $(a + b)^0$, $(a + b)^1$ und $(a + b)^2$ begonnene Schema anhand Ihrer Ergebnisse aus b) fortsetzen.

$(a + b)^0 =$ 1
 $(a + b)^1 =$ a + b
 $(a + b)^2 =$ a² + 2ab + b²
 $(a + b)^3 =$ a³ + 3a²b + 3ab² + b³
 $(a + b)^4 =$ a⁴ + 4a³b + 6a²b² + 4ab³ + b⁴
 $(a + b)^5 =$ a⁵ + 5a⁴b + 10a³b² + 10a²b³ + 5ab⁴ + b⁵

Geben Sie an, wie sich die Potenzen, gelesen von links nach rechts, verhalten.

(1) Potenzen von a: _____

(2) Potenzen von b: _____

Die Koeffizienten a_n für $n \geq 5$ ergeben folgendes Dreieck. Vervollständigen Sie das Dreieck, indem Sie die fehlenden Angaben auf die Zahlenwerte ab $n = 6$ schließen.

n = 0	1	1	1	1	1	1	1	1
n = 1		2		1				
n = 2			3		3		1	
n = 3				4		6		4
n = 4					10		10	
n = 5						5		1
n = 6								
n = 7								

Man nennt dieses Dreieck das "**Pascalsche Dreieck**" und die Zahlen **Binomialkoeffizienten** bezeichnet. Die Zahlenwerte des Dreiecks können zu einer Summenbildung ermittelt werden, indem man mit dem Taschenrechner $\binom{n}{r}$ berechnet.

Beispiel Eingabe: $\binom{9}{5} = 9 \text{ nCr } 5 = 126$

Tastenbezeichnung nCr stammt von der Bedeutung des Binomialkoeffizienten in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, vgl. [https://de.wikipedia.org/wiki/Binomialkoeffizient](#).

- d) Bestimmen Sie mit Hilfe der Kenntnis über die Koeffizienten und Potenz bei den Binomien folgendes Produkt.

$(a + b)^{10} =$ _____

Information 1.5

Berechnet man den Ausdruck $(a + b)^n$, erhält man die sog. **Binomialsche.**

Algemeine Formulierung Binomial

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Die meisten kennen Sie wahrscheinlich aus dem

Tabellenkalkulationsprogramm Excel. Dieses Zeichen wird dort zum **Verfassen** von Zelleninhalten verwendet. Entsprechend zur Bedeutung in Excel wird das Summenzeichen in der Mathematik als **Abkürzende** Schreibweise für Summen verwendet.

- c) In folgenden Beispielen werden die Kenntnisse über die Binomialreihe auf die Anfangsaufgabe $(2 + 3x)^4$ angewendet. Sie sehen, dass dieser Weg wesentlich kürzer ist als der Weg von Teilaufgabe a). Nutzen Sie sich das Beispiel und berechnen Sie anschließend mit dieser Methode ebenfalls den Term $(2x + \frac{1}{2})^5$.

$$(2+3x)^4 = \binom{4}{0}2^4 + \binom{4}{1}2^3 \cdot 3x + \binom{4}{2}2^2 \cdot (3x)^2 + \binom{4}{3}2 \cdot (3x)^3 + \binom{4}{4}(3x)^4$$

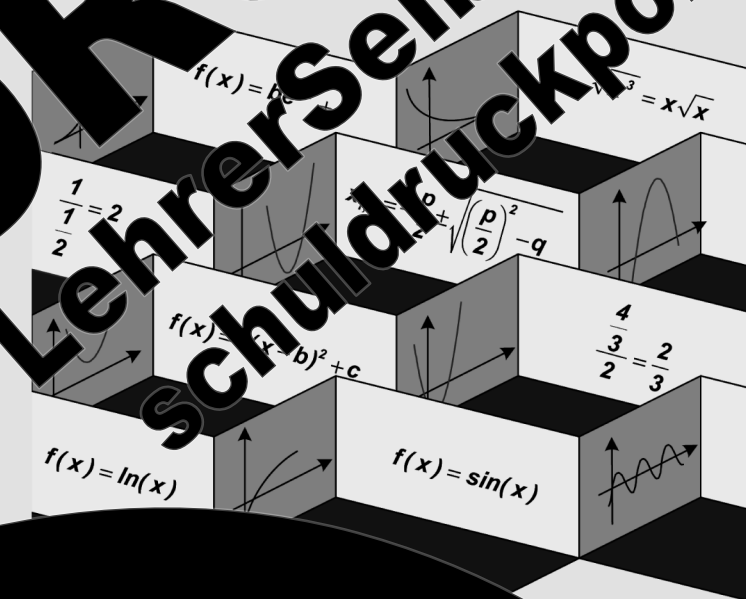
$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 =$$

Raum für Notizen



Oberstudienrätin Ursula PirkI

Grundlegendes zu Algebra und Funktionen selbstorganisiert erlernen



Kapitel 1

Grundlegendes zu Gleichungen



Kapitel 2: Grundlegendes zu Gleichungen**Aufgabe 2.1****Lösen linearer Gleichungen und Gleichungen, die auf lineare Gleichungen führen**

Das Lösen linearer Gleichungen und Gleichungen, die auf lineare Gleichungen führen, haben Sie bereits in der Sekundarstufe I gelernt. Hier wenden Sie nun die Ihnen bereits bekannten Verfahren an. Die Aufgabe ist gleichzeitig eine Übung zur Wiederholung der Binomischen Formeln und der binomischen Formeln. Versuchen Sie bei der Lösung vollständig auf den Einsatz der Binomischen Formeln zu verzichten. Zur Kontrolle ist die Lösungsmenge jeweils angegeben.

- a) $2x = x$ $\{0\}$
 b) $(x+1)^2 = (x-1)^2$ $\{0\}$
 c) $(x-1)^2 = x^2 - 1$ $\{1\}$
 d) $\frac{x}{3} + 9 = 1$ $\{-24\}$
 e) $\frac{3}{4}y - 2 = 1$ $\{-9\}$
 f) $x + (x+1) + (x+2)^2 = 6$ $\{-9\}$
 g) $2x + (9-x)^2 - 1 - (12-x)^2 + 2x = 0$ $\{6\}$
 h) $\frac{x}{2} + 6 - \frac{x}{3} = \frac{x}{2} + 5 + \frac{x}{3}$ $\{-3\}$
 i) $2(4\frac{1}{2}x + 2\frac{3}{4}) = 10x + 5$ $\{\frac{7}{2}\}$
 j) $10x + 5 - 2x = 2(1\frac{1}{2}x - \frac{3}{4})$ $\{\frac{1}{5}\}$
 k) $(1,5x - 2)^2 - 38,08 = 0$ $\{-2\}$
 l) $(x - \frac{1}{3})^2 - (x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2}) = \frac{2}{3}x$ $\{ \}$

Aufgabe 2.2**Parameterisierte Gleichungen**

Bei den folgenden Gleichungen sind, neben der Lösungsvariablen x weitere Variablen, sog. Parameter, enthalten. D.h., in den meisten Fällen besteht die Lösung nicht nur aus einer Zahl, sondern enthält auch noch den Parameter. Lösen Sie die Gleichungen wie gewohnt jeweils nach x auf. Decken Sie dabei das Beispiel unten ab, und versuchen Sie die Gleichungen zunächst ohne diese Hilfe zu bearbeiten. Die Lösungen sind jeweils als Kontrollergebnis gegeben.

- a) $3x + 7 = 6a$ $x = a+b$
 b) $6x - 2a = 2x + 2a + 4b$ $x = 5$
 c) $3m + 5b = 5a + xb$ $x = -\frac{t}{3}$
 d) $3sx - 7rt = 3sx - 7rt$ $x = -\frac{t}{3}$

Beispiel: a) Löse die Gleichung zu c) bis f):

Alle Summanden mit x auf die linke Seite bringen.

Kommt x in mehreren Summanden vor, dann muss man sie zusammenfassen.

$$3s + sx = rx + 3r$$

$$sx - rx = 3r - 3s$$

$$x(s - r) = 3(r - s)$$

$$x = \frac{3(r - s)}{(s - r)}$$

$$x = \frac{-3(s - r)}{(s - r)}$$

$$x = -3 \quad \text{mit } r \neq s$$

Wenn man die Klammern auflöst, müssen alle Summanden gleich sein. Das bedeutet, dass man im Nenner -1 hat.

Man muss die Klammern auflösen und dann wird es einfacher.

Man kann beim Kürzen den Zähler und Nenner durch die Klammer $(s - r)$ dividieren, darf die Klammer nicht Null sein, also dürfen r und s nicht den gleichen Wert annehmen.

Kapitel 1	
Brüche, Potenzen, Wurzeln und Binome	9
Kapitel 2	
Grundlegendes zu Gleichungen	59
Kapitel 3	
Lineare Funktionen	63
Kapitel 4	
Quadratische und biquadratische Gleichungen und Ungleichungen	77
Kapitel 5	
Ganzrationale Funktion 2. Grades	87
Kapitel 6	
Gleichungen 3. und höherer Grades	104
Kapitel 7	
Ganzrationale Funktionen 2. und höherer Grades	115
Kapitel 8	
Die Hyperbelfunktion	127
Kapitel 9	
Trigonometrische Funktionen	135
Kapitel 10	
Exponential- und Logarithmusfunktionen	145
Kapitel 11	
Vertiefende Betrachtung von Betragsungleichungen	169

Gesamtwortzahl: 1.200 Wörter zu Algebra und Funktionen. Dieses Buch ist urheberrechtlich geschützt und darf nicht ohne Erlaubnis des Verlegers reproduziert werden.

(Bestandteile des Buches sind urheberrechtlich geschützt und dürfen nicht ohne Erlaubnis des Verlegers reproduziert werden.)

Alle Rechte vorbehalten. All rights reserved.

Das Buch ist urheberrechtlich geschützt und darf nicht ohne Erlaubnis des Verlegers reproduziert werden.

Das Buch ist urheberrechtlich geschützt und darf nicht ohne Erlaubnis des Verlegers reproduziert werden.

Das Buch ist urheberrechtlich geschützt und darf nicht ohne Erlaubnis des Verlegers reproduziert werden.

Das Buch ist urheberrechtlich geschützt und darf nicht ohne Erlaubnis des Verlegers reproduziert werden.

Das Buch ist urheberrechtlich geschützt und darf nicht ohne Erlaubnis des Verlegers reproduziert werden.

Das Buch ist urheberrechtlich geschützt und darf nicht ohne Erlaubnis des Verlegers reproduziert werden.

Das Buch ist urheberrechtlich geschützt und darf nicht ohne Erlaubnis des Verlegers reproduziert werden.

Das Buch ist urheberrechtlich geschützt und darf nicht ohne Erlaubnis des Verlegers reproduziert werden.

Das Buch ist urheberrechtlich geschützt und darf nicht ohne Erlaubnis des Verlegers reproduziert werden.

Das Buch ist urheberrechtlich geschützt und darf nicht ohne Erlaubnis des Verlegers reproduziert werden.

Aufgabe 2.3

Ergänzendes Vertiefungsthema Bruchgleichungen

In dieser Aufgabe werden Bruchgleichungen, die auf lineare Gleichungen übergehen, behandelt. Arbeiten Sie sich anhand des Beispiels die prinzipielle Vorgehensweise bei diesem Gleichungstyp und erläutern Sie anschließend den Lösungsweg im Beispiel auf der folgenden Seite.

Information 2.1: Beispielaufgabe zu Bruchgleichungen

Rechnung	Bemerkungen zur Rechnung
(1) $\frac{5-2x}{5-x} - 1 = \frac{10}{2x-10}$	(1) → (2) Nenner so weit wie möglich faktorisieren.
(2) $\frac{5-2x}{5-x} - 1 = \frac{10}{2(x-5)}$	(3) Wenn möglich, Brüche kürzen.
(3) $\frac{5-2x}{5-x} - 1 = \frac{2}{x-5}$	(2) → (4) Alle Brüche auf den Hauptnenner bringen.
(4) $\frac{5-2x}{5-x} \cdot \frac{5-x}{5-x} - 1 \cdot \frac{5-x}{5-x} = \frac{2}{x-5} \cdot \frac{5-x}{5-x}$	(4) → (5) Gleichung mit dem HN multiplizieren. Achtung: Bei Minus im Bruch → Klammer setzen
(5) $\frac{5-2x}{5-x} \cdot \frac{5-x}{5-x} - 1 \cdot \frac{5-x}{5-x} = \frac{2}{x-5} \cdot \frac{5-x}{5-x}$	(5) → (6) Klammern auflösen.
(6) $\frac{5-2x}{5-x} \cdot \frac{5-x}{5-x} - 1 \cdot \frac{5-x}{5-x} = \frac{2}{x-5} \cdot \frac{5-x}{5-x}$	(6) → (8) Gleichung nach x auflösen.
(8) $x = 5$	Achtung: x = 5 darf als Lösung nicht in die Ausgangsgleichung eingesetzt werden, da sich Null im Nenner ergibt. Daher muss ein Definitionsbereich angegeben werden.

Definitionsbereich: $x \neq 5$ (Nullsetzung durch Nullsetzen des Nenners).

Die Lösungsmenge ist die Menge aller x, die die Gleichung erfüllen. Da die Lösungsmenge die Lösung überschneiden sich.

$\Rightarrow L = \{ \}$ Es existiert keine Lösung!

Zusammenfassen der Schritte bei der Lösung von Bruchgleichungen

1. Die Summen in den Brüchen so weit wie möglich faktorisieren und gegebenenfalls kürzen.

2. Den Hauptnenner bestimmen und alle Summanden auf den Hauptnenner bringen.

3. Die Gleichung mit dem Hauptnenner multiplizieren.

4. Die resultierende Gleichung nach x auflösen.

5. Den Definitionsbereich bestimmen.

6. Die Lösungsmenge mit dem Ergebnis vergleichen und die Lösungsmenge angeben.

Erläutern Sie jeweils die einzelnen Lösungsschritte:

(1) $\frac{8+x}{15+5x} - \frac{5}{9+3x} = \frac{4}{15}$	
(2) $\frac{8+x}{5(3+x)} - \frac{5}{3(3+x)} = \frac{4}{3 \cdot 5}$	
(3) $\frac{3(8+x)}{15(x+3)} - \frac{5 \cdot 5}{15(x+3)} = \frac{4(x+3)}{15(x+3)}$	
(4) $3(8+x) - 25 = 4(3+x)$	
(5) $24 + 3x - 25 = 12 + 4x$	
(6) $-1 = x$	

Information 2.1

Ermitteln Sie den Definitionsbereich der Bruchgleichungen und bestätigen Sie jeweils die angegebene Lösungsmenge durch Rechnung.

a) $\frac{2}{x-3} = \frac{4}{x-2}$	$L = \{4\}$
b) $\frac{4}{x-3} = \frac{4}{x-2}$	$L = \{ \}$
c) $\frac{x-1}{4-2x} - \frac{x}{3x-6} = \frac{x}{4x-8}$	$L = \{ \}$
e) $\frac{x+2}{x+1} = \frac{2x^2}{x^2-1} - \frac{x-3}{x-1}$	$L = \{-5\}$
f) $\frac{2x+2}{x^2+2} = \frac{2}{x+1}$	$L = \{ \}$
g) $\frac{2x+2}{(x-5)(2x-1)} = \frac{4x+6}{18x+6} + \frac{3x-6}{9x^2-1}$	$L = \{7\}$

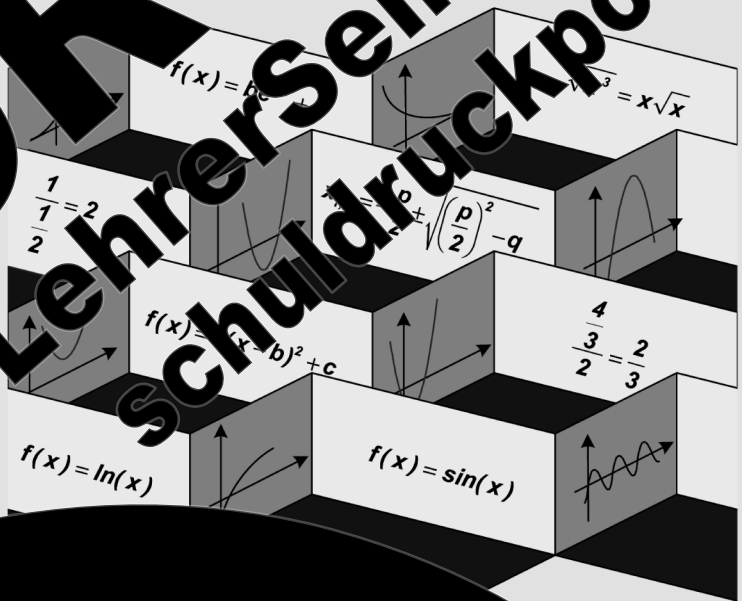
Raum für Notizen



Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Grundlegendes zu Algebra und Funktionen

selbstorganisiert erlernen



Kapitel 1 Lineare Funktionen



Kapitel 3: Lineare Funktionen

Aufgabe 3.1

Verdeutlichen Sie sich die folgenden grundlegenden Informationen zu Funktionen im Koordinatensystem.

Funktionsschreibweise

Die y-Werte werden auch als Funktionswerte bezeichnet. Man schreibt daher für y_Q auch $f(x_Q)$ (sprich: f von x_Q) oder für y_P auch $f(x_P)$ (sprich: f von x_P).



Funktionen im Koordinatensystem werden oft mit $f(x)$ bezeichnet (sprich f von x).

Die Δ (Delta) – Schreibweise gibt immer den Abstand bzw. die Differenz zweier Werte an. Δx ist der Abstand der x-Koordinaten der Punkte P und Q.

Bezeichnungen:

Ein Koordinatensystem, bei dem die Achsen senkrecht zueinander verlaufen wird als **kartesisches Koordinatensystem** bezeichnet.

Die **horizontale Achse**, hier die x-Achse, wird auch als **Abzisse** bezeichnet.

Die **vertikale Achse**, hier die y-Achse, wird auch als **Ordinate** bezeichnet. Diese Achse kann auch mit dem Namen der abgebildeten Funktion, hier $f(x)$, bezeichnet werden.

Funktionen, werden in der Regel mit $f(x)$ bezeichnet. Um Funktionen unterscheiden zu können, verwendet man oft $f_1(x)$, $f_2(x)$ usw. Man drückt durch diese Schreibweise aus, dass die Funktion durch Einsetzen eines Wertes für x in die Funktionsgleichung berechnet wird. (Vgl. Sprechblasen oben)

Abstände:

Der Abstand Δx der x-Koordinaten der Punkte P und Q: $\Delta x = x_Q - x_P$

Der Abstand Δy der y-Koordinaten der Punkte P und Q: $\Delta y = y_Q - y_P$

Der Abstand d der Punkte P und Q (Pythagoras): $d^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$

abschnitt c:

Die Stelle c, an der die Gerade die y-Achse schneidet, sind die y-Koordinaten dieses Schnittpunktes sind die y-Achsenabschnitte A(0/c)

Kapitel 1	
Brüche, Potenzen, Wurzeln und Binome	9
Kapitel 2	
Grundlegendes zu Gleichungen	59
Kapitel 3	
Lineare Funktionen	63
Kapitel 4	
Quadratische und biquadratische Gleichungen und Ungleichungen	77
Kapitel 5	
Ganzrationale Funktion 2. Grades	87
Kapitel 6	
Gleichungen 3. und höherer Grades	104
Kapitel 7	
Ganzrationale Funktionen 2. und höherer Grades	115
Kapitel 8	
Die lineare Funktion	127
Kapitel 9	
Trigonometrische Funktionen	135
Kapitel 10	
Exponential- und Logarithmusfunktionen	145
Kapitel 11	
Vertiefende Betrachtungen zu Betragsungleichungen	169

Gesamtwortzahl: 1.200.000 Wörter zu Algebra und Funktionen. Erklärt erlernen

(Bestandteil)

Seit

alle Rechte vorbehalten. All rights reserved.

Druck, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,

aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

SelbstVerlag

tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germany)

Lehrerselbstverlag.de

www.f-druck.de

Steigung m: Die Steigung einer Funktion ist durch das folgende Verhältnis dem

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{f(x_Q) - f(x_P)}{x_Q - x_P}$$

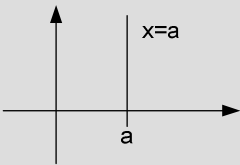
Verdeutlichen Sie sich anhand der Abbildungen auf der folgenden Seite, was man unter einer steigenden und einer fallenden Geraden versteht.

$m > 0$: die Gerade steigt

$m < 0$:

Gerade verläuft
abwärts

Achtung: Geraden der Form $x = a$ gehen an der Stelle a durch die y-Achse und verlaufen senkrecht. Diese Geraden sind **keine Funktionen**.



Funktionsgleichung: Die Funktionsgleichung einer linearen Funktion ist durch die **Steigung m** und den **y-**

$$y = mx + c \text{ oder } f(x) = mx + c$$

(Oft wird anstelle von c auch ein b verwendet.)

Nullstelle N: Die Stelle an der Stelle x_0 von einer Geraden geschnitten, so ist dieser Punkt als **Nullstelle N** (Nullpunkt) bezeichnet. Wenn man die Nullstelle mit dem Ansatz $f(x) = 0$ berechnet werden.

Man sagt auch: „Die Funktion wird Null gesetzt“.

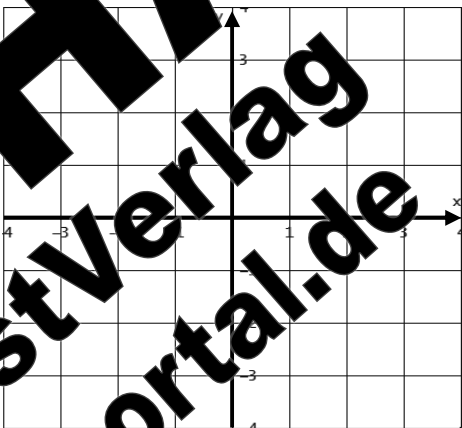
Um die Nullstelle zu erhalten, setzt man in den Ansatz die Nullstelle ein. Die resultierende Gleichung $mx + c = 0$ nach x auflösen.

Zeichnen von Geraden: Um eine Gerade in einem Koordinatensystem zu zeichnen, benötigt man keinen Taschenrechner und auch keine Wertetabelle. Wie man eine Gerade direkt aus der Kenntnis von Achsenabschnitt und Steigung zeichnen kann, wird im Folgenden an zwei Beispielen erläutert. Wenden Sie sich die Vorgehensweise, und wenden Sie die Methode in der Übung 3.1 an.

Beispiel Zeichnen von Geraden

$$f(x) = -2x + 1$$

$$g(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}$$



Schritt 1: Markieren Sie den y-Achsenabschnitt c im Koordinatensystem.

für $f(x)$ gilt $c_f = 1$

für $g(x)$ gilt $c_g = -\frac{1}{2}$

Schritt 2: Stellen Sie den Wert für die Steigung m als Bruch dar. Ein negatives Vorzeichen kann man dann dem Zähler oder Nenner zuordnen. Bedenken Sie dabei, dass man jede Zahl als Bruch mit dem Nenner 1 schreiben kann. Hier gilt:

für $f(x)$ gilt:

$$m_f = -2 = \frac{-2}{1} = \frac{2}{-1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \left(= \frac{\text{Anzahl der Kästchen in y - Richtung}}{\text{Anzahl der Kästchen in x - Richtung}} \right)$$

$$\frac{2}{-1} = \frac{-2}{1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \left(= \frac{\text{Anzahl der Kästchen in y - Richtung}}{\text{Anzahl der Kästchen in x - Richtung}} \right)$$

Schritt 3: Zeichnen Sie die Gerade durch den y-Achsenabschnitt c durch Abzählen der ersten drei Kästchen jeweils das Steigungsdreieck einzeichnen. Sie danach die angegebenen Geraden zeichnen.

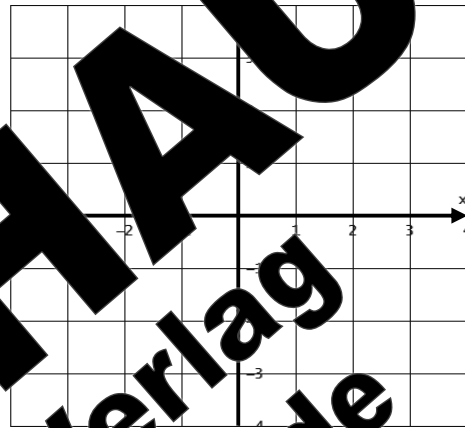
Übung 3.1

a) Zeichnen Sie die Geraden $f(x) = -2x + 1$ und $g(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}$ ohne Taschenrechner oder einer Wertetabelle in einem Koordinatensystem.

Zeichnen Sie die auf der folgenden Seite gegebene Koordinatensystem ein.

b) Zeichnen Sie die Gerade ebenfalls in diesem Koordinatensystem ein. $x = -2$

c) Welche Bedeutung hat, bezogen auf Angaben in einem Koordinatensystem, die Schreibweise Δx ?



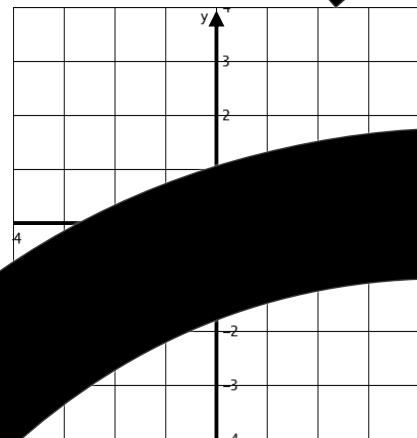
d) Welche Bedeutung hat, bezogen auf Angaben in einem Koordinatensystem, der Quotient $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$?

Aufgabe 3.2

Lagebeziehungen zwischen Geraden

Ergänzen Sie nach dem Lesen der Geraden die Überschriften, und füllen Sie die jeweiligen Lücken im Text aus.

a) _____ Geraden



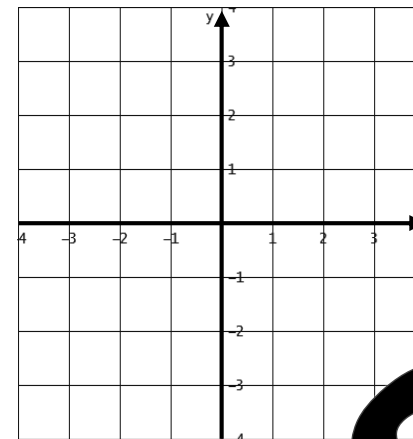
Zeichnen Sie die beiden Geraden g und h in das Koordinatensystem ein, und geben Sie an, wie die Geraden zueinander verlaufen.

$$g(x) = 0,5x + 3$$

$$h(x) = -0,5x + 1$$

Merke: Zwei Geraden $g(x) = m_g x + c_g$ und $h(x) = m_h x + c_h$ sind parallel, wenn für die Steigungen gilt: $m_h = m_g$

b) _____ Geraden



Zeichnen Sie die beiden Geraden g und h in das Koordinatensystem ein, und geben Sie an, wie die Geraden zueinander verlaufen.

$$g(x) = 3x + 3$$

$$h(x) = 0,5x + 1$$

Die Geraden sind _____

Wenn Sie ebenfalls die Geraden g und h mit Steigungen $m_g = 3$ und $m_h = -\frac{1}{3}$, $m_g = -4$ und $m_h = \frac{1}{4}$ oder

$m_g = \frac{2}{5}$ und $m_h = -\frac{5}{2}$ zeichnen, erkennen Sie, dass auch die Geraden jeweils orthogonal sind.

Merke: Zwei Geraden $g(x) = m_g x + c_g$ und $h(x) = m_h x + c_h$ sind

orthogonal (Schreibweise $g \perp h$), wenn gilt: $m_h = -\frac{1}{m_g}$

Aufgabe 3.3

Schnittpunkte von Geraden

Die beiden Geraden g und h (2.2 b) schneiden sich. Lesen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes ab.

Um den Schnittpunkt zu berechnen, verwendet man das Gleichsetzungsverfahren. Man kann auch mit dem Additions- bzw. Einsetzungsverfahren.

Merke: Berechnen Sie den Schnittpunkt zwischen zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ mit $f(x) = g(x)$

Verfolgen Sie die Schritte bei der Berechnung des Schnittpunktes zweier Geraden. Achten Sie auf die Lösung entsprechender Aufgaben im Heft, damit Sie die Dokumentation Ihres Vorgehens stets den Vorgesetzten notieren.

Berechnen des Schnittpunktes:

Schritt 1:
Notieren des Ansatzes.

$$g(x) = h(x)$$
$$-2x + 3 = 0,5x + 1$$

Schritt 2:
Gleichsetzen der Funktionsterme.

$$\underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

Schritt 3:
Auflösen der Gleichung nach x.

ert: $y = -2 \cdot 0,8 + 3 = 1,4$ S(0,8 / 1,4)

Schritt 4:
Berechnen des Wertes der Funktionswerte des Schnittpunkts d. von x in eine der beiden Funktionsgleichungen. (Man verwendet die Funktionsgleichung, in der der Rechenaufwand geringer ist.)

Aufgabe 3.4

Nullstellen kann man als Schnittpunkt der Geraden mit der x-Achse betrachten. Da die x-Achse die Funktionsgleichung $f(x) = 0$ hat, ergibt sich für die Bestimmung der Nullstellen der schon angeführte Ansatz $f(x) = 0$. Berechnen Sie die Nullstellen der Funktionen $g_1(x) = -2x + 3$ und $g_2(x) = 0,5x + 1$, und vergleichen Sie zur Probe die berechneten Werte mit der Zeichnung von Aufgabe 3.2 a).

Gerade $g_1(x)$	Gerade $g_2(x)$
Schritt 1: _____	Schritt 1: _____
Schritt _____	Schritt _____

Nulls _____ / _____) Nullstelle g_2 : N_2 (_____ / _____)

Aufgabe 3.5

Rechnerische Bestimmung der Gleichung einer Geraden aus zwei gegebenen Punkten oder Bedingungen

Beispiel 1:

Gegeben sind die Punkte P(–2 / 3) und Q(2 / 1)

Schritt 1
Die x- und y-Koordinate des gegebenen Punkts notieren, bzw. bei zwei gegebenen Punkten denjenigen mit den einfacheren Zahlen auswählen. (Es spielt das Ergebnis keine Rolle, welchen Punkt man verwendet.)

$x = 2$

Schritt 2
Die Koordinaten von beiden Punkten in die Steigungsformel einsetzen und m berechnen oder den Wert von m aus in der Aufgabenstellung angegebenen Bedingung interpretieren.

Schritt 3
Die allgemeine Geradengleichung $y = mx + c$ nach m und c auflösen. c = mx. Da man die um Schritt 1 und 2 ermittelten Werte für y, m und x einsetzen kann, berechnen

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$
$$= \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q}$$
$$= \frac{3 - 1}{-2 - 2}$$
$$= \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

$$c = y - mx = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2 = 1 - (-1) = 2$$

Schritt 4

Die gesuchte Gleichung ergibt sich, wenn man m und c in die allgemeine Form $y = mx + c$ einsetzt.

Funktion: $g(x) = -\frac{1}{2}x + 2$

Üb

Gegeben sind die Punkte A(3/2) und B(2/4).

$x = \underline{\hspace{2cm}}$

$y = \underline{\hspace{2cm}}$

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\hspace{2cm} - \hspace{2cm}}{\hspace{2cm} - \hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

on: $g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

b) Gegeben ist die Gerade $h(x) = -3x + 5$. Gesucht ist die zu h parallele Gerade g , die durch den Punkt $P(2/2)$.

$x =$ _____

$$y = \underline{\hspace{2cm}}$$
$$m = m_h = \underline{\hspace{2cm}}$$
$$c = y - mx = \underline{\hspace{2cm}}$$

Funktion: $g(x) = -3x + 8$

Hier ist die Information über die Steigung in der Angabe, dass die Gerade g **parallel** zur Geraden h sein soll, versteckt. Daher verwendet man den Ansatz: $m_h = m_g$.

c) Gegeben ist die Gerade $h(x) = -\frac{1}{5}x + 1$. Bestimmen Sie die zu $h(x)$ orthogonale Gerade $g(x)$ durch den Punkt $P(2/3, 5)$.

$x =$ _____

$$y = \underline{\hspace{2cm}}$$
$$m = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

C =

Funktion: $g(x) = \frac{5}{4}x + 1$

Zusatzinfo:

Die zu $h(x)$ orthogonal verlaufende Gerade $g(x)$ wird auch als die **Normale** der Geraden $h(x)$ bezeichnet.

Hier ist die Information über die Steigung in der Angabe, dass die Gerade g **orthogonal** zur Geraden h sein soll, versteckt. Daher verwendet man den

Ansatz: $m_g = -\frac{1}{m_b}$.

d) Gesucht ist die Gerade $g(x)$ durch den Punkt $P(1|1)$.

$$m = -\frac{1}{m_{w1}} = \dots$$
$$C = Y - r$$

Fu =

Halbierende
hat die Gleichung
 $f(x) =$ und damit
die Steig

e) Gesucht ist die zur zweiten Winkelhalbierenden parallel verlaufende Gerade $g(x)$ durch den Punkt $P(-1 / -3)$.

X = _____

$$y = \underline{\hspace{2cm}}$$
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2}$$
$$c = y - mx = \underline{\hspace{2cm}}$$

Funktion: $g(x) =$ _____

Die zweite Wertelhalbierende
hat die Funktionsgleichung
... der $y = -x$ und damit
die Steigung $m_{W2} = -1$

Raum für Notizen

VOR
LehrerSe
schuldruckp

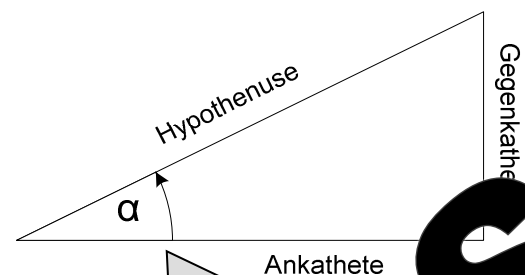
Ergänz

Aufgabe 3.6

Winkel bei Geraden

a) Wiederholung Winkelfunktionen am rechtwinkligen Dreieck

Recherchieren Sie die Definition von sin, cos und tan im rechtwinkligen Dreieck. Füllen Sie die entsprechenden Felder aus.

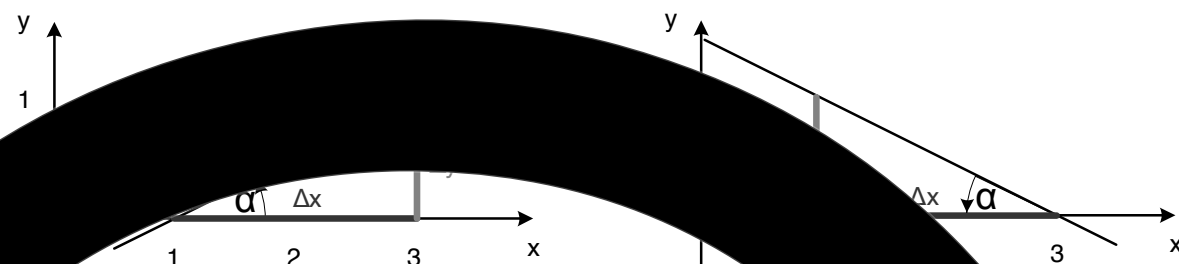


sin α = _____
 cos α = _____
 tan α = _____

Die mathematische Orientierung eines Winkels.
 In der Mathematik hat ein Winkel eine Orientierung. Wird er von der Ankathete gegen den Uhrzeigersinn gemessen, so bezeichnet man diese Orientierung auch als **mathematisch positiv**.

b) Schnittwinkel von Geraden mit der x-Achse

Bei den beiden abgebildeten Geraden $f(x) = 0,5x - 1$ und $h(x) = -0,5x + 1,5$ stellt das eingezeichnete Steigungsdreieck jeweils ein rechtwinkliges Dreieck dar.



Ordnen Sie in den Diagrammen Δx jeweils die Ankathete Δy jeweils die Gegenkathete G_k zu und begründen Sie, warum die Beziehung $\tan(\alpha) = m$ gilt, wenn m die Steigung der Geraden ist.

$$\tan(\alpha) = m$$

Berechnen Sie

Der Zahlenwert von α lässt sich dann mit dem Taschenrechner und der Funktion $\tan^{-1}$ berechnen. (Bei den meisten Taschenrechnern über der tan-Taste mit shift oder inv.) Finden Sie den Winkel α für $m = 0,5$ und $m = -0,5$. (Einstellen des Taschenrechners auf „deg“ einstellen).

Aus der Beziehung oben folgt: $\alpha = \tan^{-1}(m)$

für $h(x)$ gilt dann: $\alpha = \tan^{-1}(0,5) \approx 26,6^\circ$ und $\alpha = \tan^{-1}(-0,5) \approx -26,6^\circ$

Da man die Größe eines Winkels nicht als negativ angeben kann, kann man die Formel für die Berechnung des Schnittwinkels einer Geraden mit der x-Achse auch mit Betrag statt mit m schreiben und den Winkel somit als positiven Wert angeben.

Schnittwinkel einer Geraden mit der x-Achse: $\alpha = |\tan^{-1}(m)|$

Übung 3.3

Gegeben ist die Gerade $f(x) = -3x + 1$.
 a) Berechnen Sie den Schnittwinkel der Geraden $f(x) = -3x + 1$ mit der x-Achse.

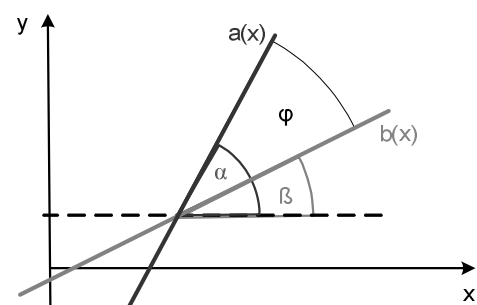
b) Begründen Sie anhand einer Skizze, dass die Gerade, welche die x-Achse unter einem Winkel von 7° schneidet, mit der y-Achse einen Winkel von $18,5^\circ$ einschließt.

Information 3.1

Schnittwinkel

Wenn zwei Geraden sich schneiden, entstehen paarweise zwei Winkel, die sich zu 180° ergänzen. Als Schnittwinkel bezeichnet man den kleineren der beiden Winkel, also den Winkel, der kleiner als 90° bezeichnet. Man kann die Schnittwinkel zwischen den Geraden mit Hilfe der Steigungswinkel berechnen.

a) Beide Geraden steigen oder fallen:



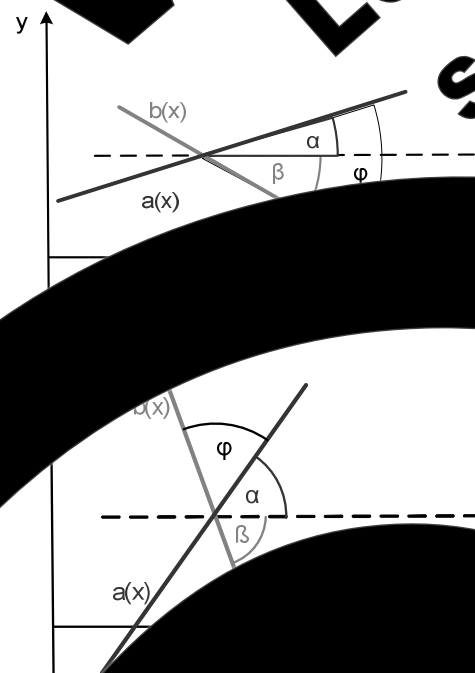
Man berechnet jeweils den Schnittwinkel α und β der beiden Geraden mit der x-Achse.

Der Schnittwinkel φ der beiden Geraden kann dann über die Differenz $\alpha - \beta$ berechnet werden.

Schnittwinkel zwischen $a(x)$ und $b(x)$

$$\varphi = |\alpha - \beta|$$

b) Eine Gerade fällt, die andere steigt



Man berechnet jeweils den Schnittwinkel α und β der beiden Geraden mit der x-Achse. Der Schnittwinkel φ der Geraden kann dann über die Summe der Beträge von α und β berechnet werden.

Schnittwinkel zwischen $a(x)$ und $b(x)$

$$\varphi = |\alpha| + |\beta|$$

Schnittwinkel zwischen $a(x)$ und $b(x)$

$$\varphi = 180^\circ - (|\alpha| + |\beta|)$$

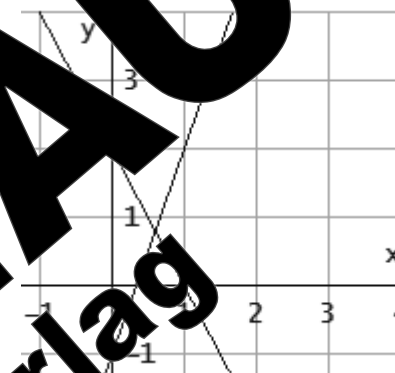
Übung 3.4

Gegeben sind die beiden Geraden

$$a(x) = -2x + 2 \text{ und } b(x) = 3x - 1$$

a) Zeigen Sie durch Rechnung, dass sich die Geraden unter einem Winkel von 45° schneiden.

b) Berechnen Sie, unter welchem Winkel die y-Achse von den beiden Geraden geschnitten wird.



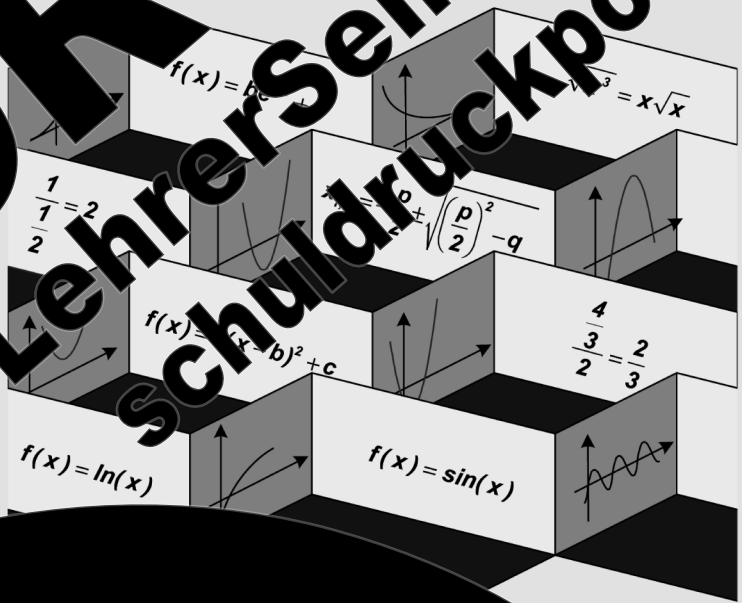
Ende Übungen: _____

Raum für Notizen:



Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Grundlegende
zu Algebra
und Funktionen
selbstorganisiert erlernen



Kapitel

Quadratische und biquadratische
Gleichungen und Ungleichungen



Kapitel 1	
Brüche, Potenzen, Wurzeln und Binome	9
Kapitel 2	
Grundlegendes zu Gleichungen	59
Kapitel 3	
Lineare Funktionen	63
Kapitel 4	
Quadratische und biquadratische Gleichungen und Ungleichungen	77
Kapitel 5	
Ganzrationale Funktion 2. Grades	87
Kapitel 6	
Gleichungen 3. und höherer Grades	104
Kapitel 7	
Ganzrationale Funktionen 2. und höherer Grades	115
Kapitel 8	
Die Hyperbelfunktion	127
Kapitel 9	
Trigonometrische Funktionen	135
Kapitel 10	
Exponential- und Logarithmusfunktionen	145
Kapitel 11	
Vertiefende Betrachtungen zu Betragsungleichungen	169

Kapitel 4: Quadratische und biquadratische Gleichungen und Ungleichungen

In der Sekundarstufe I haben Sie bereits Lösungsverfahren für diese Gleichungen kennen gelernt. Sie wissen sicherlich, dass für die Lösung quadratischer Gleichungen die Formel des abc-Formel und die quadratische Ergänzung angewandt werden kann. Dieser Vorgehensweise ist nicht immer notwendig. Im Folgenden lernen Sie, wie man quadratische Gleichungen auf jeweils einfachsten und damit für Rechenfehler am wenigsten anfälligen Verfahren lösen kann.

Quadratische Gleichungen können in unterschiedlichen Darstellungsformen auftreten.

Allgemeine Form der quadratischen Gleichung in **polynomialer** Darstellung

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Der Begriff **polynomial** bedeutet, dass der Gleichungsterm aus einer Summe besteht, in der verschiedene Potenzen von x auftreten.

Allgemeine Form der quadratischen Gleichung in **faktorieller** Darstellung

$$a(x-b)(x-c) = 0$$

Der Begriff **faktoriell** bedeutet, dass der Gleichungsterm aus einem Produkt unterschiedlicher „Summen“ besteht.

Aufgabe 4.1

In den dieser Aufgabe werden Lösungsverfahren für quadratische und biquadratische Gleichungen in **polynomialer** Form behandelt. Bei einer quadratischen Gleichung können, müssen aber nicht immer, alle drei Summanden vorhanden sein. Der Summand bx und auch der Summand c können fehlen. Das wirkt sich auf das anzuwendende Lösungsverfahren aus. Im Folgenden werden die einzelnen Verfahren vorgestellt.

Aufgabe 4.1.1

Quadratische Gleichungen

Gegeben zu den Beispielen.

4.1.1

Der Summand bx fehlt und es kommt nur ein x^2 vor.

$$ax^2 + c = 0$$

$$ax^2 = -c$$

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Schritt 1: Gleichung auflösen

Schritt 2: Beim Ziehen der Wurzel darauf achten, dass sowohl positive und eine negative Lösung kommen kann.

Ist der Ausdruck unter der Wurzel negativ, gibt es keine Lösung.

Begründung, warum es eine positive und eine negative Wurzel gibt.

$$x^2 = t$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{t}$$

$$\Rightarrow |x| = \sqrt{t}$$

$$\Rightarrow +x_1 = \sqrt{t} \vee -x_1 = \sqrt{t}$$

$$\Rightarrow x_1 = +\sqrt{t} \vee x_1 = -\sqrt{t}$$

$$\text{also } x = \pm\sqrt{t}$$

Wenn man aus der Lösungsvariablen die Wurzel zieht, muss man den Betrag beachten, da gilt: $(+x)^2 = x^2$ und $(-x)^2 = x^2$.

$$+x_1 = \sqrt{t} \vee -x_1 = \sqrt{t}$$

$$\Rightarrow x_1 = +\sqrt{t} \vee x_1 = -\sqrt{t}$$

$$\text{also } x = \pm\sqrt{t}$$

Wenn man die Wurzel zieht, muss man das Vorzeichen berücksichtigen. Wenn man die Wurzel zieht, muss man das Vorzeichen berücksichtigen.

$$\text{Bringt man das Vorzeichen, so erhält man eine positive und eine negative Lösung für die Gleichung.}$$

In den beiden folgenden Beispielen sind die Lösungen der Gleichung angegeben. Bestätigen Sie die angegebenen Lösungen durch die Rechnung.

Beispiel 1: $x^2 - 8 = 0$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{4} \quad L = \{\pm 2\}$$

Beispiel 2: $3x^2 + 6 = 0$

$$L = \{\}$$

Beispiel 3: $1 - (x - 1)^2 = 2x$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad L = \{0\}$$

Aufgabe 4.1.2

Quadratische Gleichungen der Form $ax^2 + bx = 0$

Lesen Sie die Information zum Lösen dieses Gleichungstyps, und wenden Sie den Lösungsweg auf die Aufgabenstellung von Beispiel 2 an.

Information 4.1.2

Der Summand ohne x fehlt.

Ausklammern!

Fallunterscheidung: Ein Produkt ist Null, wenn ein Faktor den Wert Null annimmt. Entweder ist das x vor der Klammer Null oder der Ausdruck in der Klammer ist Null.

$$x^2 + bx = 0$$

$$x(x + b) = 0$$

oder $ax^2 + bx = 0$

$$ax = -b$$

$$x_2 = -\frac{b}{a}$$

Die zweite Lösung x_2 ergibt sich, indem man den Term in der Klammer Null setzt und die Gleichung nach x auflöst.

Beispiel 1: $3x^2 - 9x = 0$ Alles nach links bringen. **Nicht durch x teilen!**

$$3x^2 - 9x = 0$$

$$x(3x - 9) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$3x - 9 = 0$$

$$3x = 9$$

a) Berechnen Sie die Lösungsmenge der Gleichung. (Kontrollerggebnis $x_1 = 0$; $x_2 = 4$)

b) Begründen Sie, warum man bei der Lösung der Gleichung nicht durch x teilen darf.

Aufgabe 4.1.3

Anwenden der pq-Formel bei quadratischen Gleichungen der Form $ax^2 + bx + c = 0$

Lesen Sie die Information, und arbeiten Sie anschließend die Beispiele durch. Ergänzen Sie die dabei fehlende Angaben. Auf die Anwendung der abc-Formel wird im Rahmen dieser Aufgabe verzichtet, da es für das Lösen von quadratischen Gleichung dieser Form ausreicht, eine pq-Formel zu kennen.

Information 4.1.3

Gesamte Gleichung und damit alle Summanden durch a teilen.

Vor dem x steht „nix“

Es ergibt sich aus $\frac{b}{a}$ und $\frac{c}{a}$ die pq-Formel

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Beispiele

a) $x^2 + 6x - 36 = 0$

$x^2 + 6x - 36 = 0$

$$x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 36} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 36} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{144}{4}} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{153}{4}} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{153}}{2}$$

$x_1 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{153}}{2} = 3$ $x_2 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{153}}{2} = -6$

$L = \{3; -6\}$

Anmerkung:

b) $x^2 - 4x + 4 = 0$ Lösungsmenge hier leer ist.

$2x - 4 = x^2$

$-x^2 + 2x - 4 = 0$

$x^2 - 2x + 4 = 0$

$x_{1,2} = \frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 - 4} = 1 \pm \sqrt{1 - 4} = 1 \pm \sqrt{-3}$

$L = \{\}$

Begründung:

c) Bestätigen Sie die Lösung $x = 3$ ergibt, indem sie fehlende Angaben ergänzen.

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-3}{2}\right)^2 - 9}$$

$$x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm 0$$

$$x_{1,2} = 3$$

$L = \{3\}$

Aufgabe 4.1.4

Lösen einer biquadratischen Gleichung der Form $ax^4 + bx^2 + c = 0$

Information 4.1.4

durch a dividieren; $p = \frac{b}{a}$ und $q = \frac{c}{a}$

Substitution: $x^4 = z^2$
 $x^2 = z$

$ax^4 + bx^2 + c = 0$

$z^2 + pz + q = 0$

pq-Formel für z

$z_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Zwei Lösungen für z

Da die Lösung für die Variable x nicht in der Form $x^2 = v$ vorliegt, muss die Substitution rückwärts gehen. $x^2 = v$

Es können bis zu vier Lösungen x_1, x_2, x_3 und x_4 entstehen.

Beispiel:

$2x^4 - 6x^2 + 4 = 0$

durch 2 dividieren

Substitution $x^4 = z^2$
 $x^2 = z$

$z_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-3}{2}\right)^2 - 2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$

$\Rightarrow z_1 = 1 \wedge z_2 = 2$

Formel anwenden

Lösungen für z

$x^2 = 1$

Da die Substitution $z = x^2$ verwendet wurde, muss die Lösung für x berechnet werden

$x_{3,4} = \pm\sqrt{2}$

$\Rightarrow L = \{1, -1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$

$\Rightarrow x_{1,2} = \pm 1$

Aufgabe 4.1.5

Lösen einer quadratischen Gleichung in faktorisierter Form

Lesen Sie die Information, und bearbeiten Sie die Beispiele.

Auf keinen Fall die Klammern ausmultiplizieren!

Wenn die linke Seite einer Gleichung in Klammern x nur mit der Potenz vorkommt, nennt man die Klammern auch **Linearfaktoren**.

Fallunterscheidung:
Ein Produkt ist Null, wenn ein Faktor den Wert Null annimmt. D.h., entweder ist der Ausdruck in der ersten oder zweiten Klammer Null.

Den Inhalt jeder Klammer separat voneinander Null setzen und die entstehende Gleichung lösen. In der Regel braucht man gar nicht zu rechnen, sondern liest die Lösungen direkt aus den **Linearfaktoren** ab.

Beispiel:

a) $12(x + 7) = 0$

direktes Ablesen: $\Rightarrow x_1 = -4; x_2 = -7$

b) $(3x + 6)(2x - 1) = 0$

$3x + 6 = 0 \Rightarrow x_1 = -2$

$2x - 1 = 0 \Rightarrow x_2 = 0,5$

c) $(x - 5)^2 = 0$

$x_{1,2} = 5$

d) $(x - 5)(x - 5) = 0$

$x_{1,2} = 5$

Achtung!

Da man den Term $(x - 5)(x - 5)$ in der Form $(x - 5)(x - 5)$ schreiben kann, nennt man, dass die Lösung doppelt ist.

Achtung!

Hier geht keine Fallunterscheidung, da die rechte Seite des Gleichheitszeichens **keine 0** steht. Man muss die Klammern ausmultiplizieren. Zeigen Sie, dass die Gleichung ist.

Übung 4.1

Bestätigen Sie die angegebenen Lösungen der quadratischen und biquadratischen Gleichungen durch Rechnung.

- | | |
|--|------------------------|
| a) $5 - 3x^2 = 22$ | $L = \{ \}$ |
| b) $x^2 - 7x + 2 = 10$ | $L = \{1; 6\}$ |
| c) $(x + 2)(x - 5) = 0$ | $L = \{-2; 5\}$ |
| d) $(x + 5)(x + 4) = 20$ | $L = \{0; -9\}$ |
| e) $4x^2 + 12x = 0$ | $L = \{0; -3\}$ |
| f) $9x^2 + 12x + 4 = 0$ | $L = \{-2/3\}$ |
| g) $3x^2 = 5x$ | $L = \{0; 5/3\}$ |
| h) $0,5x^4 - x^2 = 0$ | $L = \{0\}$ |
| i) $x(2x + 12) = 0$ | $L = \{0; -6\}$ |
| j) $7x^2 - 5x + 1 = 0$ | $L = \{1/2\}$ |
| k) $13x^2 + 12x + 4 = 0$ | $L = \{\pm 3; \pm 2\}$ |
| l) $x(8x^2 + 12x + 5) = 0$ | $L = \{0, 25; -0,5\}$ |
| m) $(2x + 1)(3x + 1) = 2$ | $L = \{1/6; -1\}$ |
| n) $4a^2 - 3(a^2 + 9) = 3a^2 + 9a$ | $L = \{0\}$ |
| o) $(x + 4)^2(x - 4)^2 = 0$ | $L = \{4; -4\}$ |
| p) $(x + 2)^2(x - 2)^2 = 9$ | $L = \{\pm 7; \pm 1\}$ |
| q) $(x + 5)^2(x - 5)^2 = 0$ | $L = \{ \}$ |
| r) $(x + 5)^2 - c(2c + 3) = c + 1$ | $L = \{-5/6; 1/2\}$ |
| s) $(1 + t)(2 + t)(3 + t) - (t - 1)(t - 2)(t - 3) = 1$ | $L = \{6; 0\}$ |
| t) $(x + 5)^2 - c(2c + 3) = c + 1$ | $L = \{-5/6; -2\}$ |

Quadratische Gleichungen mit einem Parameter, also mit gehobenem Freiheitsgrad.

- | | |
|------------------|---------------------|
| v) $x^2 + 1 = 0$ | $L = \{b\}$ |
| w) $x^2 + 1 = 0$ | $L = \{-1/a; 1/a\}$ |
| x) $x^2 + 1 = 0$ | $L = \{-1; -1/a\}$ |

Aufgabe 4.2

Erweiternde Betrachtungen: Wurzelgleichungen

Gleichung so umformen, dass alle Ausdrücke mit Wurzel auf einer Seite stehen.

$$\sqrt{2x+5} - x = 1$$

$$\sqrt{2x+5} = x + 1$$

$$(\sqrt{2x+5})^2 = (x+1)^2$$

$$2x+5 = x^2 + 2x + 1$$

$$x^2 = 4$$

$$x_1 = +2$$

Beide Seiten der Gleichung quadrieren. Binomisch auflösen!

Gleichung nach x auflösen.

Probe:

$$\sqrt{2 \cdot 2 + 5} - 2 = \sqrt{9} - 2 = 1 - 2 = -1 \neq 1 \Rightarrow x = 2 \text{ ist keine Lösung!}$$

$$\sqrt{2 \cdot (-2) + 5} - (-2) = \sqrt{1} - 2 = -1 - 2 = -3 \neq 1 \Rightarrow x = -2 \text{ ist keine Lösung!}$$

Wichtige Information:

Da Quadrieren eine Äquivalenzumformung ist, muss für Gleichungen, bei denen die Lösungen durch Quadrieren der Lösungsvariablen gefunden wurden, eine Probe durch einsetzen der Ergebnisse in die Ausgangsgleichung, vorgenommen werden. Lösungen der Gleichung sind nur die Ergebnisse, welche zu einer wahren Aussage führen.

Übung 4.2

Lösen Sie die folgenden Wurzelgleichungen in Ihrem Heft.

- a) $\sqrt{3x-2} = 5$

b) $\sqrt{3x-2} = 1$

c) $\sqrt{8x+9} - x = -7$

f) $\sqrt{4(x+3)} = x$

g) $3x + \sqrt{4x-1} = 5$

h) $\sqrt{x+1} = x$
- L = {2}

L = {2;1}

L = {20}

L = {6}

L = {-2}

L = {0;8}

Aufgabe 4.3

Erweiternde Betrachtungen: Quadratische Ungleichungen und lineare Ungleichungen

Bei quadratischen Ungleichungen führt die Anwendung der p,q-Formel häufig zu Fehlern bei der Bestimmung der Lösungsmenge. Daher ist es günstig, wenn man hier die so genannte **quadratische Ergänzung** verwendet (Vgl. Kapitel 3, Aufgabe 4.2). Verdeutlichen Sie sich den Lösungsweg anhand der folgenden Beispiele.

Beispiel 1:

Für die quadratische Ergänzung wird der Teilterm $x^2 + 6x$ als Teil eines Binoms aufgeführt.

$$x^2 + 6x + 9 > 0$$

Schritt 1: Am besten, wenn man die **quadratische Ungleichung** so umformt, dass auf der linken Seite der Teil steht, den man zum Ergänzen möchte. Hier soll man also auf jeder Seite der Gleichung $+9$ addieren.

$$x^2 + 6x + 9 > 0 + 9$$

Schritt 2: In diesem Schritt führt man die quadratische Ergänzung durch. Man erhält auf der linken Seite ein Binom, wenn addiert wird. Dann addiert man hier auf jeder Seite der Gleichung -9 .

$$x^2 + 6x + 9 - 9 > -5 + 9$$

Schritt 3: Nun fasst man die linke Seite als Binom zusammen.

$$(x+3)^2 > 4$$

Schritt 4: Im nächsten Schritt zieht man auf beiden Seiten die Wurzel. Da man allerdings beachten muss, dass die Quadraterm, nämlich dem Quadrieren aus $(x+3)$ und $-(x+3)$ der rechten Seite der Ungleichung zunächst in Betragsstriche. Man erhält so zwei **lineare Ungleichungen**.

Schritt 5: Weglassen der Betragsstriche. Hier gilt in Gleichungen und Ungleichungen gilt folgende Regel.

Man muss bei der Lösung von Gleichungen oder Ungleichungen, die in Betragsstrichen stehen, die Betragsstriche weg, indem man den Ausdruck in den Betragsstrichen in Klammern setzt und dann ein Plus (+) oder ein Minus (-) vor die Klammer schreibt. Man erhält so zwei lineare Ungleichungen.

$$+(x+3) > 2$$

$$-(x+3) > 2$$

Schritt 6: Beide Gleichungen getrennt voneinander lösen.

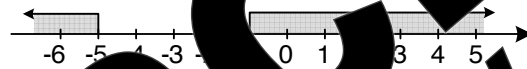
$$x + 3 > 2 \quad \vee \quad -x - 3 > 2$$

$$ -x > 5$$

Lösung

$$x > -1 \quad \vee \quad x < -5$$

Schritt 7: Darstellung der Lösungsmenge einer linearen Ungleichung am Zahlenstrahl.



Beispiel 2:

Beim Wurzelziehen der Betragsstriche und dann auf die positive und negative Lösung achten.

Linke Seite so umformen, dass eine Binom entsteht, indem auf beiden Seiten der Gleichung 2 addiert wird.

Für beide Ungleichungen x getrennt berechnen.

Wichtige Info!
Bei der Multiplikation oder Division mit einer negativen Zahl, wird das Relationszeichen umgedreht.

$$x^2 + 2x - 1 > 2$$

$$x^2 + 2x - 3 > 0$$

$$(x + 1) > 2$$

$$\sqrt{x + 1} > \sqrt{2}$$

$$x + 1 > 2 \quad \vee \quad x + 1 < -2$$

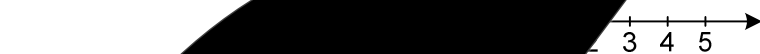
$$x + 1 > 2 \quad \text{oder} \quad -(x + 1) > 2$$

$$x + 1 > 2 \quad \text{oder} \quad -x - 1 > 2$$

$$\phantom{x + 1 > 2 \quad \text{oder} \quad} -x > 3$$

$$x > 1 \quad \text{oder} \quad x < -3$$

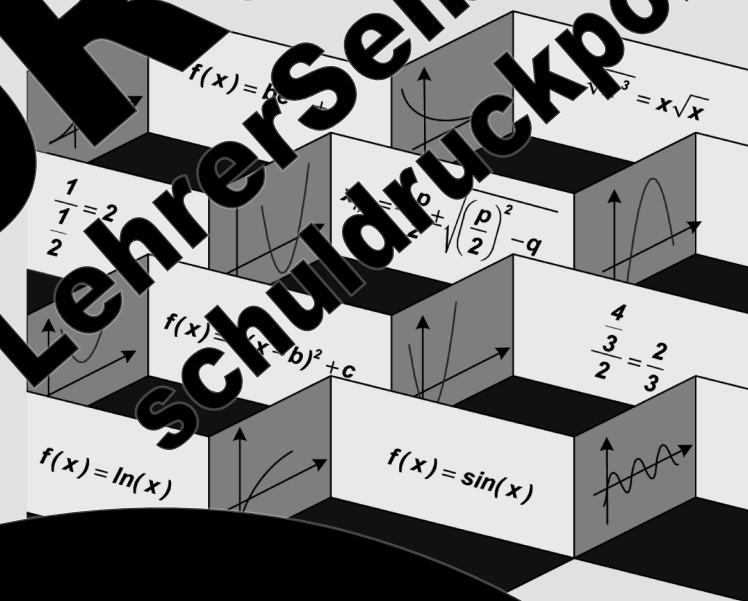
Zeichnen Sie die Lösungsmengen von Beispiel 2 aus Aufgabe 4.3 auf dem Zahlenstrahl dar.



Ergänzen Sie die Lösungsmengen:

Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Grundlegende zu Algebra und Funktionen selbstorganisiert erlernen



Kapitel Ganzrationale Funktion 2

Kapitel 1	
Brüche, Potenzen, Wurzeln und Binome	9
Kapitel 2	
Grundlegendes zu Gleichungen	59
Kapitel 3	
Lineare Funktionen	63
Kapitel 4	
Quadratische und biquadratische Gleichungen und Ungleichungen	77
Kapitel 5	
Ganzrationale Funktion 2. Grades	87
Kapitel 6	
Gleichungen 3. und höherer Grades	104
Kapitel 7	
Ganzrationale Funktionen 2. und höheren Grades	115
Kapitel 8	
Die Hyperbelfunktion	127
Kapitel 9	
Trigonometrische Funktionen	135
Kapitel 10	
Exponential- und Logarithmusfunktionen	145
Kapitel 11	
Vertiefende Betrachtungen zu Betragsungleichungen	169

Gesamtwortmarken zu Algebra und Funktionen ...
 (Bestandteile der ...)
 ... vorbehalten. All rights reserved.
 ... auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
 ... aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.
 ... SelbstVerlag
 ... & Freunde GmbH, Koblenz (Germany)
 ... Lehrerselbstverlag.de
 ... www.f-druck.de

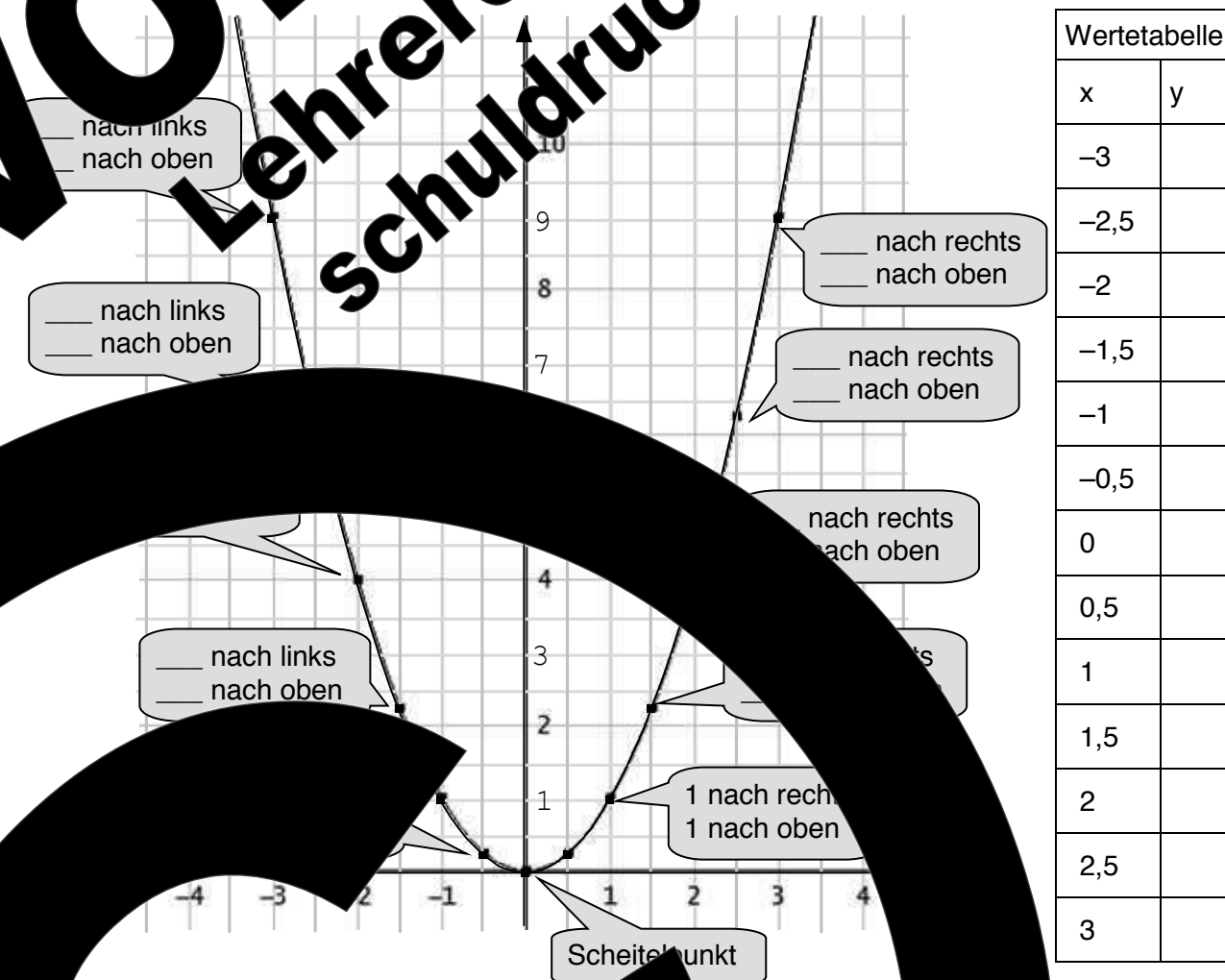
Kapitel 5: Ganzrationale Funktionen 2. Grades

Die wesentlichen Inhalte dieses Kapitels dürften Ihnen schon aus der Sekundarstufe 1 bekannt sein. Im Rahmen dieser Unterlagen sollen diese Kenntnisse wiederholt und vertieft werden. Insbesondere der Eigenschaften von Potenzfunktionen höheren Grades, also Funktionen, deren Potenz von x größer als 2 ist, werden hier erweiternde Zusammenhänge erklärt. Außerdem soll dieses Kapitel daher auch dann durch, wenn Sie der Meinung sind, dass Sie über ausreichende Kenntnisse zum Thema verfügen.

Aufgabe 5.1

Die Normalparabel $f(x) = x^2$

- Die y-Werte der Normalparabel entsprechen den Quadratzahlen. Ergänzen Sie die Wertetabelle ohne Verwendung des Taschenrechners.
- Um eine Normalparabel zu zeichnen benötigt man keine Parabelschablone. Häufig verlangt eine Aufgabenstellung, dass eine einigermaßen genaue Skizze einer Normalparabel erstellt werden muss. Dazu genügt es, wenn man ausgehend vom Scheitelpunkt auf jeder Seite der x-Achse, je nach gefordertem Wertebereich, zwei oder drei weitere Punkte der Parabel in das Koordinatensystem einträgt und die Punkte miteinander verbindet. Man muss sich dann, egal an welcher Stelle der Scheitelpunkt der Parabel liegt, nur vorstellen, wie die Punkte ausgehend vom Scheitelpunkt eingezeichnet werden. Ergänzen Sie die Wertetabelle und füllen Sie die fehlenden Werte in den Sprechblasen.



Aufgabe 5.2

Verschieben von Normalparabeln im Koordinatensystem

Für das Verschieben von Funktionen gibt es, unabhängig um welchen Typ von Funktion es sich handelt, weitgehend einheitliche Regeln. Im Rahmen dieser Aufgabe werden die Zusammenhänge beim Verschieben von Funktionen zunächst nur an der Parabel erläutert. In späteren Kapiteln, bei der Behandlung von Exponentialfunktionen und trigonometrischen Funktionen werden die hier gewonnenen Erkenntnisse zurückgegriffen. Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben vorher, auch wenn Sie schon Vorkenntnisse haben.

Information 5.1

Sie haben im Kapitel 4 gelernt, dass man quadratische Gleichungen sowohl in polynomialer als auch in faktorisierter Form darstellen kann. Dies gilt analog auch für den Funktionsterm von Parabeln. Hier kommt allerdings noch eine dritte Variante, die sogenannte Scheitelfunktform, vor. Allgemein kann man die Funktionsgleichung einer Parabel auf drei verschiedene Arten darstellen:

Darstellung in polynomialer Form: $f(x) = ax^2 + px + q$

Darstellung in faktorisierter Form: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

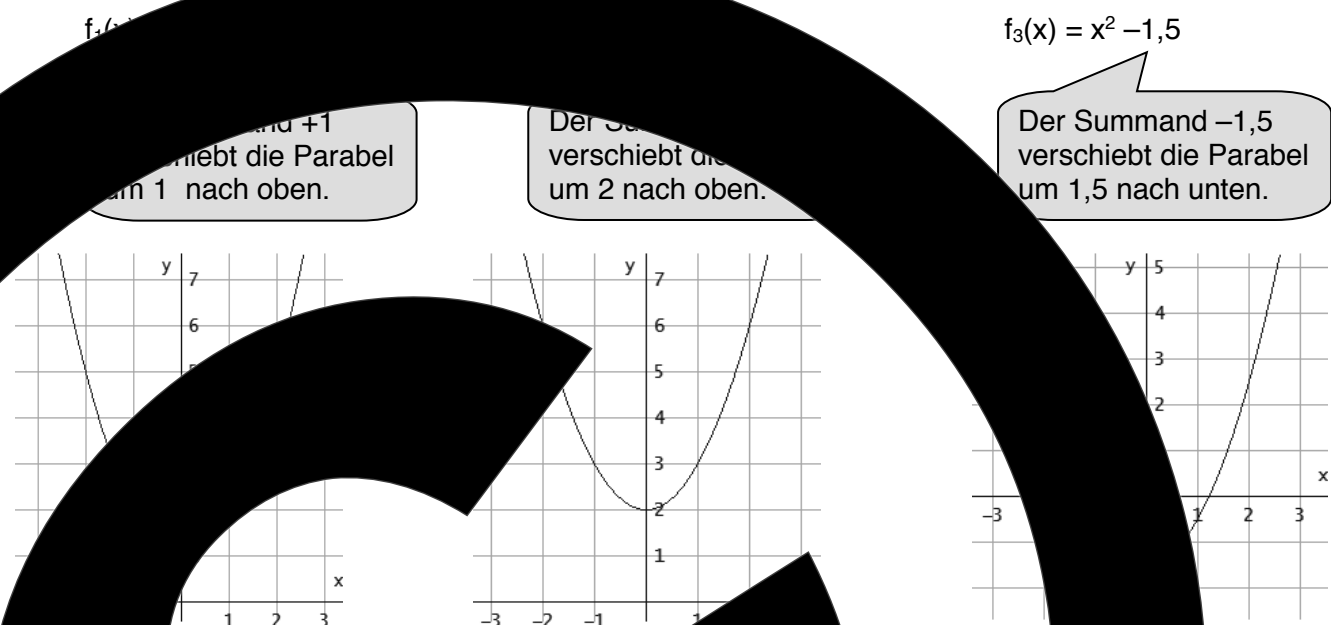
Darstellung in Scheitelfunktform: $f(x) = a(x - b)^2 + c$

Die Parameter a , b und c beeinflussen die Form und die Lage der Parabel im Koordinatensystem. Ihre Bedeutung in den einzelnen Darstellungsformen einer Parabelgleichung ist Gegenstand der nun folgenden Aufgabe 5.2.

Aufgabe 5.2.1

a) Verschieben von Parabeln nach oben und nach unten

Die folgenden Normalparabeln wurden mit Hilfe eines Graphikprogrammes gezeichnet.



Ergänzen Sie den Satz auf der folgenden Seite:

Addiert man zum Funktionsterm der Normalparabel $f(x)$ eine positive Zahl, so wird die Parabel nach _____ verschoben. Addiert man eine negative Zahl, so wird die Parabel nach _____ verschoben. Durch die Verschiebung entsteht eine neue Funktion.

Die verschobene Funktion soll mit $\tilde{f}(x)$ (sprich F-tilde von x) bezeichnet werden. Allgemein gilt:

$$\tilde{f}(x) = f(x) + c \quad \text{mit} \quad \begin{cases} c > 0: \text{ Verschiebung in positiver Richtung nach oben} \\ c < 0: \text{ Verschiebung in negativer Richtung nach unten} \end{cases}$$

b) Nullstellenberechnung für verschobene Normalparabeln

Im Kapitel 4 haben Sie gelernt, dass Nullstellen von Geraden mit Hilfe des Ansatzes $f(x) = 0$ berechnet werden. Dies gilt allgemein für alle Funktionstypen, also auch für Parabeln. Weisen Sie durch Rechnung nach, dass sich für die oben gezeichneten Funktionen folgende Nullstellen ergeben.

$f_1(x) = x^2 + 1$	$f_2(x) = x^2 + 2$	$f_3(x) = x^2 - 1,5$
$f_1(x) = 0$	$f_2(x) = 0$	$f_3(x) = 0$
$\Rightarrow x^2 + 1 = 0$	$\Rightarrow x^2 + 2 = 0$	$\Rightarrow x^2 - 1,5 = 0$
$\Rightarrow \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$	$\Rightarrow \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$	$\Rightarrow \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$
$\Rightarrow \underline{\hspace{1cm}} = \pm\sqrt{\hspace{1cm}}$	$\Rightarrow \underline{\hspace{1cm}} = \pm\sqrt{\hspace{1cm}}$	$\Rightarrow \underline{\hspace{1cm}} = \pm\sqrt{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$

Nullst. $N_1(1,22/0), N_2(-1,22/0)$

Darstellung der Funktionsterme in polynomialer und Scheitelfunktform

(1) Polynomiale Form

• $f_1(x) = x^2 + 1$

Am Summanden ohne x liest man die y-Koordinate bzw. hier den y-Achsenabschnitt der Parabel ab. Er wird durch Einsetzen von 0 in den Funktionsterm, also mit $f(0)$, berechnet.

(2) **Faktorierte Form**

- $f_1(x)$ lässt sich nicht faktorisieren.
- $f_2(x)$ lässt sich nicht faktorisieren.
- $f_3(x) = (x + \sqrt{1,5})(x - \sqrt{1,5})$ Faktorisieren durch Anwendung der binomischen Formel (Vgl. Kapitel 1 Aufgabe 4.1.5)

Diese Klammer enthält die Nullstelle $x_2 = -\sqrt{1,5} \approx -1,22$

Die Summen $\pm\sqrt{1,5}$ in den Linearfaktoren entsprechen den Nullstellen. D.h., aus der faktorierten Form kann man direkt die Nullstellen einer Funktion ablesen.

Zur Erinnerung:
Der Ansatz $f(x) = 0$ für die Berechnung der Nullstellen liefert die Gleichung $(x + \sqrt{1,5})(x - \sqrt{1,5}) = 0$
mit den Lösungen $x_{1,2} = \pm\sqrt{1,5}$.
(Vgl. Kapitel 1 Aufgabe 4.1.5)

Aufgabe 2.2

a) Verschieben von Parabeln nach links und rechts

$f_1(x) = (x - 1)^2$
oder $f(x) = (x - (+1))^2$

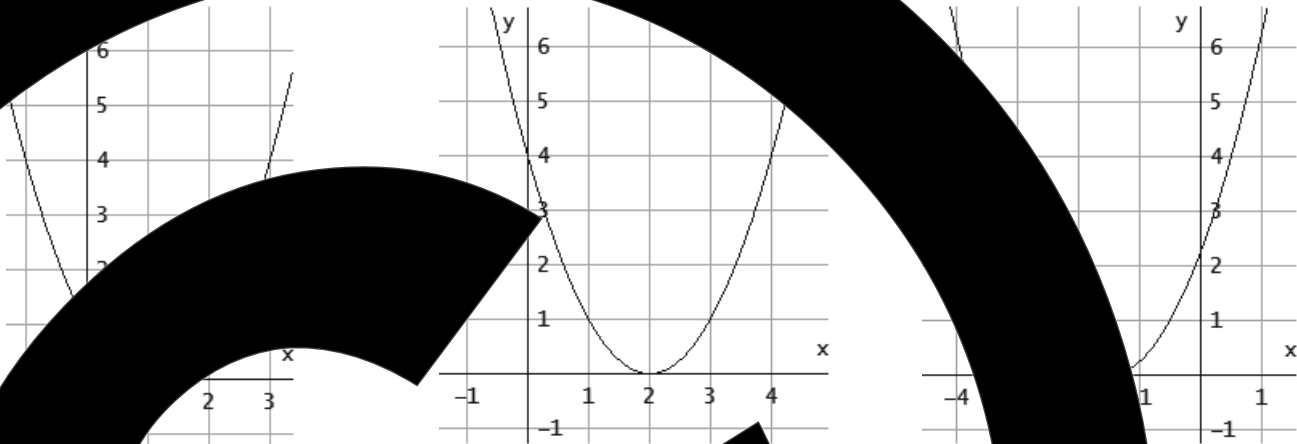
$f_2(x) = (x - 2)^2$
oder $f(x) = (x - (+2))^2$

$f_3(x) = (x + 1,5)^2$
oder $f(x) = (x - (-1,5))^2$

Subtrahiert man von x die Zahl +1, wird die Parabel um 1 nach rechts verschoben.

Subtrahiert man von x die Zahl +2, wird die Parabel um 2 nach rechts verschoben.

Subtrahiert man von x die Zahl (-1,5) wird die Parabel um 1,5 nach links verschoben.



Wie den Satz auf der folgenden Seite

Subtrahiert man vom Argument* x der Normalparabel $f(x)$ eine positive Zahl, so wird die Parabel nach _____ verschoben. Subtrahiert man vom Argument x eine negative Zahl, wird die

Parabel nach _____ verschoben. Durch die Verschiebung entsteht eine neue Funktion.

Die verschobene Funktion soll wieder mit $\tilde{f}(x)$ (sprich: f-tilde) bezeichnet werden.

Allgemein gilt:

$$\tilde{f}(x) = f(x - b)$$

mit

$b > 0$: verschoben in positiver Richtung nach **rechts**
 $b < 0$: verschoben in negativer Richtung nach **links**

***Anmerkung:** der Ausdruck, der bei der Funktionsschreibweise $f(x)$ in der Klammer steht, wird als Argument der Funktion bezeichnet.

b) Nullstellenberechnung bei den verschobenen Parabeln

Wie man bereits gelernt, dass das Verfahren zur Nullstellenbestimmung von Geraden auf nach oben und unten verschobene Parabeln übertragen werden kann. Verdeutlichen Sie sich, dass die Nullstellen bei nach links und rechts verschobenen Parabeln genauso berechnet werden und ergänzen Sie fehlende Angaben.

$f_1(x) = (x-1)^2$

$f_1(x) = 0$

$\Rightarrow (x-1)^2 = 0$

$\Rightarrow x_{1,2} = \dots$

$f_2(x) = (x-2)^2$

$f_2(x) = 0$

$\Rightarrow (x-2)^2 = 0$

$f_3(x) = (x + 1,5)^2$

$f_3(x) = 0$

$\Rightarrow \dots = 0$

$\Rightarrow \dots = \dots$

$N_{1,2}(\dots / \dots)$

Wichtige Info!

Bei der Berechnung der Nullstellen einer Parabel, die den Scheitelpunkt auf der x-Achse hat, erhält man zweimal das gleiche Ergebnis. Spricht man von **doppelten Nullstellen**. Geometrisch bedeutet das, dass der Scheitelpunkt der Parabel auf der x-Achse liegt. Damit ist der gemeinsame Punkt von der Parabel und der x-Achse kein Schnittpunkt, sondern ein **Berührungspunkt**. Wie Sie das sehen, dass dies auch für andere Funktionen gilt.

c) Darstellung der Funktionsterme in polynomialer und faktorisierter Form

(1) Polynomiale Form

- $f_1(x) = (x - 1)^2 = \underline{\hspace{1cm}} - \underline{\hspace{1cm}} + 1$
- $f_2(x) = (x - 2)^2 = \underline{\hspace{1cm}} - \underline{\hspace{1cm}} + 4$
- $f_3(x) = (x + 1,5)^2 = \underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}} + 2,25$

(2) Faktorisierte Form:

- $f_1(x) = (x - 1) (x - 1)$
- $f_2(x) = (x - 2) (x - 2)$
- $f_3(x) = (x + 1,5) (x + 1,5)$

Anhand der polynomialen Darstellung kann man den Scheitelpunkt und den Schnittpunkt der Parabel ablesen.

Wenn man die Nullstellen der Funktion in die faktorisierte Form einsetzt, erkennt man, dass man die Nullstellen der Parabel aus der faktorisierten Form ablesen kann.

Aufgabe 5.2

a) Gleichzeitiges Verschieben einer Parabel nach links bzw. rechts und oben bzw. unten

Sie haben in 5.3.1 und 5.3.2 gelernt, wie man Parabel nach unten und oben sowie links und rechts verschieben kann. In dieser Aufgabe werden diese Erkenntnisse gleichzeitig verwendet, so dass die folgenden Funktionsgleichungen und die abgebildeten Funktionen entstehen. Ergänzen Sie die Sprechbläschen und die Koordinaten der Scheitelpunkte.

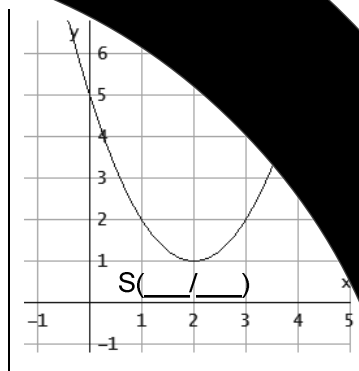
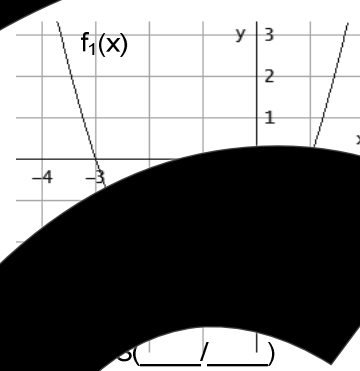
$$f_1(x) = (x + 1)^2 - 4$$

$$f_2(x) = (x - 2)^2 + 1$$

Verschiebung um $\underline{\hspace{1cm}}$ nach $\underline{\hspace{1cm}}$

Verschiebung um 2 nach $\underline{\hspace{1cm}}$

Verschiebung um 1 nach $\underline{\hspace{1cm}}$



Die Koordinaten der Scheitelpunkte erscheinen bereits in der Funktionsgleichung. Man nennt diese Parameter der Funktionsgleichung einer Parabel daher **Scheitelpunkt**.

Verallgemeinerung der Zusammenhänge:

Ergänzen Sie: Für die Verschiebung in $\underline{\hspace{1cm}}$ -Richtung gilt die Beziehung $\tilde{f}(x) = f(x) + c$, wobei der Parameter $\underline{\hspace{1cm}}$ angibt, wie weit die Parabel ausgehend vom Ursprung $\underline{\hspace{1cm}}$ links oder $\underline{\hspace{1cm}}$ verschoben wird.

Aus der x-Koordinate des Scheitelpunkts folgt: Bei $f_1(x)$ ist $\underline{\hspace{1cm}}$, bei $f_2(x)$ ist $b = \underline{\hspace{1cm}}$.

Die Variable c in der Beziehung $\tilde{f}(x) = f(x) + c$ legt die Verschiebung in $\underline{\hspace{1cm}}$ -Richtung fest. Aus der y-Koordinate der Scheitelpunkte folgt: Bei $f_1(x)$ ist $c = \underline{\hspace{1cm}}$ und bei $f_2(x)$ ist $c = \underline{\hspace{1cm}}$.

Allgemein kann man daher den Term einer Normalparabel, die gleichzeitig in x- und y-Richtung verschoben wird in der Scheitelpunktform mit $\tilde{f}(x) = f(x) + c$ angeben.

b) Nullstellenbestimmung

Bestätigen Sie durch Rechnung die Existenz bzw. Lage von Nullstellen bei den abgebildeten Parabeln.

$$f_1(x) = (x + 1)^2 - 4$$

$$f_2(x) = (x - 2)^2 + 1$$

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 0 \\ (x + 1)^2 - 4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(x) &= 0 \\ (x - 2)^2 + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Nullstellen: $N_1(1 / 0)$ und $N_2(-3 / 0)$

c) Vergleich der Funktionen

$$(1) \quad \tilde{f}(x) = f(x) + c$$

$$f_1(x) = (x + 1)^2 - 4$$

$$f_2(x) = (x - 2)^2 + 1$$

Ablezen der Koordinaten des Scheitelpunkts $S(\underline{\hspace{1cm}} / \underline{\hspace{1cm}})$

(2) Polynomiale Form $f(x) = x^2 + px + q$

- $f_1(x) = x^2 + 2x - 3$
- $f_2(x) = x^2 - 4x + 5$

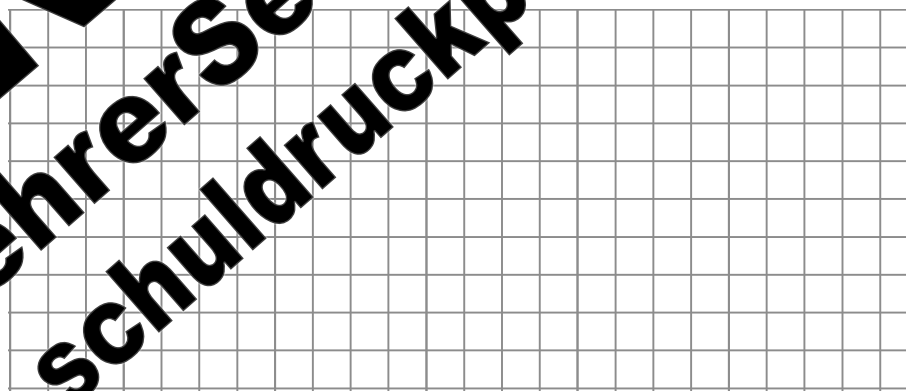
Ablezen des y-Achsenabschnitts.

(2) Faktorierte Form $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)$

- $f_1(x) = (x - 1)(x + 3)$

Erinnerung: Die Linearfaktoren enthalten $x_1 = 1$ und $x_2 = -3$ als Nullstellen der Funktion.

Überprüfen Sie die Ausmultiplikation des Terms $(x - 1)(x + 3)$, dass dieses Produkt der polynomiellen Darstellung von $f_1(x)$ entspricht.



- $f_2(x)$ lässt sich faktorisieren

Wenn eine Funktion nicht in Linearform vorliegt, kann man die Nullstellen nicht ablesen. Man müsste die Nullstellen durch Probieren finden.

Aufgabe 5.2.4

Parabeln strecken oder stauchen

a) Zusammenhänge beim Strecken und Stauchen der Normalparabel

Die folgende Abbildung zeigt gestreckte und gestauchte Parabeln, die nach oben bzw. nach unten geöffnet sind. Verdeutlichen Sie sich den Zusammenhang zwischen Streckungs- bzw. Stauchungsfaktor a und der Form der Parabel, und ergänzen Sie den folgenden Satz.



Nach einem Parameter a , so erhält man die

oben geöffnete Parabel

Die Parabel wird gestreckt, wenn gilt: $a > \underline{\hspace{1cm}}$

Die Parabel wird gestaucht, wenn gilt: $\underline{\hspace{1cm}} < a < \underline{\hspace{1cm}}$

Nach unten geöffnete Parabel

Die Parabel wird gestreckt, wenn gilt: $a > \underline{\hspace{1cm}}$

Die Parabel wird gestaucht, wenn gilt: $\underline{\hspace{1cm}} < a < \underline{\hspace{1cm}}$

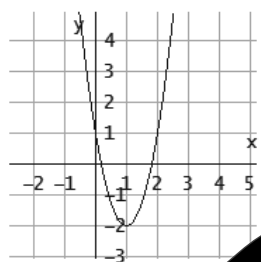
Die Parabel wird an der x-Achse gespiegelt und gestreckt, wenn gilt: $a > \underline{\hspace{1cm}}$

Die Parabel wird an der x-Achse gespiegelt und gestaucht, wenn gilt: $\underline{\hspace{1cm}} < a < \underline{\hspace{1cm}}$

b) Zusammenhänge beim Strecken oder Stauchen verschobener Normalparabeln.

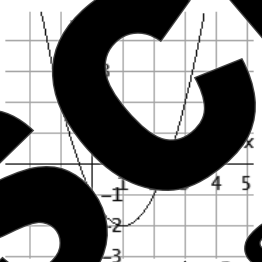
Die folgende Abbildung zeigt verschobene, gestreckte bzw. gestauchte Normalparabeln, die nach oben und unten geöffnet sind und alle den Scheitelpunkt $S(1|-2)$ haben. Diese Parabeln werden auch als **ganzrationale Funktionen 2. Grades** bezeichnet. Verdeutlichen Sie den Zusammenhang zwischen dem Streckungs- bzw. Stauchungsfaktor a und der Parabel, und ergänzen Sie den folgenden Satz.

$$f(x) = 3(x-1)^2 - 2$$



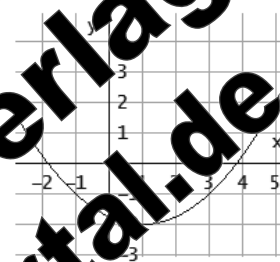
gestreckte verschobene Normalparabel

$$f(x) = (x-1)^2 - 2$$



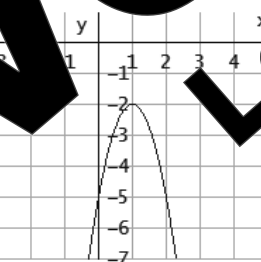
Verschobene Normalparabel

$$f(x) = 0,25(x-1)^2 - 2$$



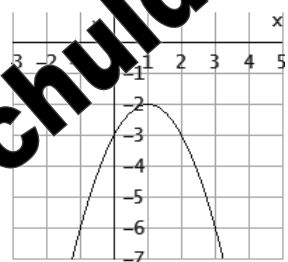
gestauchte verschobene Normalparabel

$$f(x) = -2(x-1)^2 - 2$$

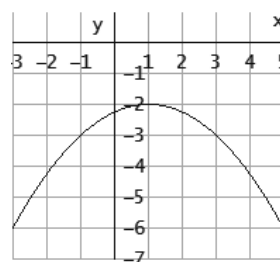


gestreckte verschobene Normalparabel nach unten geöffnet

$$f(x) = -(x-1)^2 - 2$$



$$f(x) = -0,25(x-1)^2 - 2$$



gestauchte verschobene Normalparabel nach unten geöffnet bzw. Spiegelung an der Geraden $y = -2$

Um die Öffnungsrichtung einer verschobenen Parabel zu ändern, bspw. eine verschobene Parabel zu strecken oder zu stauchen, verändert man die Klammer in der Scheitelpunktform der Parabel $f(x) = a(x-h)^2 + k$. Die Klammer wirkt wie beim Strecken oder Stauchen von Normalparabeln. Bei einem negativen a ist die Parabel nach unten geöffnet. Ein Vorzeichenwechsel von a spiegelt die Parabel an der Geraden $y = k$.

Information 5.2

Überblick Darstellungsformen der Funktionsgleichung ganzrationaler Funktionen 2. Grades

Darstellung in Scheitelpunktform:

$$f(x) = a(x-h)^2 + k$$

a streckt, staucht und ändert die Öffnungsrichtung bzw. spiegelt die Parabel an der Geraden $y = k$.

h verschiebt die Parabel nach links und rechts.

k verschiebt die Parabel nach oben und unten.

Bei verschobenen Normalparabeln, so bei einem Streckfaktor $a = 1$, kann man die Funktionsgleichung für abgewinkelte Parabeln besonders einfach bestimmen. Man entnimmt den Koordinaten des Scheitelpunktes die Werte h und k und setzt die beiden Werte direkt in die Formel $f(x) = a(x-h)^2 + k$ ein.

Um die Funktionsgleichung in der Scheitelpunktform in die Normalform zu überführen, rechnet man das Polynom in Form in die Scheitelpunktform.

Wenn die Parabelgleichung in der Normalform vorliegt, so kann man die Scheitelpunktform mit Hilfe der quadratischen Ergänzung ermitteln.

Beispiel 1:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 6x + 2 \\ f(x) &= x^2 + 6x + 9 - 9 + 2 \\ f(x) &= (x^2 + 6x + 9) - 9 + 2 \\ f(x) &= (x+3)^2 - 7 \end{aligned}$$

Quadratische Ergänzung

$x^2 + 6x$ wird durch Addition von 9 zum Binom ergänzt. Damit kein Fehler entsteht, wird 9 sofort wieder subtrahiert. Den Teilterm der faktorisiert werden soll in Klammern setzen und dann umformen.

Beispiel 2:

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x^2 - 6x + 9) - 9 - 2 \\ f(x) &= -(x-3)^2 - 11 \\ f(x) &= -(x-3)^2 + 11 \end{aligned}$$

Bei einer nach unten geöffneten Parabel muss man bei der quadratischen Ergänzung das Vorzeichen beachten. Sonst wie in Beispiel 1.

Die Normalform lautet:

$$f(x) = ax^2 + px + q$$

a entspricht dem Streckfaktor bzw. Stauchfaktor der Scheitelpunktform.

Der Summenkoeffizient p gibt den y-Achsenabschnitt an. Mit den Koordinaten $(x_1, 0)$ und $(x_2, 0)$ hat die Funktion die Nullstellen x_1 und x_2 , so enthält q das Produkt $x_1 \cdot x_2$.

Darstellung in faktorisierter Form: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

a entspricht dem Streckfaktor bzw. Stauchfaktor der Scheitelpunktform.

und x_1 und x_2 sind die Nullstellen der Funktion mit den Koordinaten $N_1(x_1/0)$ und $N_2(x_2/0)$.

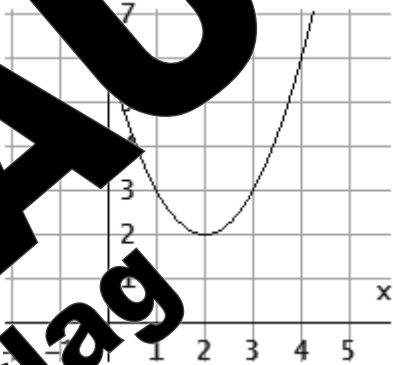
Übungen

Ü5.1
Bei einer verschobenen Normalparabel sind die Nullstellen und die Öffnungsrichtung bekannt. Ermitteln Sie jeweils die Funktionsgleichung in Scheitelpunktform, faktorisierter sowie in polynomialer Darstellung.

- a) $N_1(-2/0)$ und $N_2(4/0)$ nach oben geöffnet. (Kontrollergebnis: $f(x) = (x - 1)^2 - 9$)
b) $N_1(-4/0)$ und $N_2(2/0)$ nach unten geöffnet. (Kontrollergebnis: $f(x) = -(x + 2)^2 + 16$)
c) $N_1(0/5)$ und $N_2(5/0)$ nach unten geöffnet. (Kontrollergebnis: $f(x) = -x^2 + 10x - 25$)

Ü5.2
Gegeben ist die rechts abgebildete verschobene Normalparabel.

- a) Ermitteln Sie die Funktionsgleichung dieser Parabel in Scheitelpunktform, und zeigen Sie, dass für die polynomiale Darstellung gilt: $f(x) = x^2 - 4x + 6$
b) Begründen Sie anhand einer Rechnung und anhand des Funktionsgraphen, dass keine faktorisierte Funktionsgleichung existiert.



Aufgabe 5.3
Lagebeziehungen von Parabel und Gerade

Gegeben sind die Parabel $f(x) = (x-1)^2 + 1$ sowie die Geraden $g(x) = x+2$, $h(x) = x-2$ und $k(x) = 2x-2$. Lässt man die drei Funktionen per Computer zeichnen, erhält man folgende Abbildung.



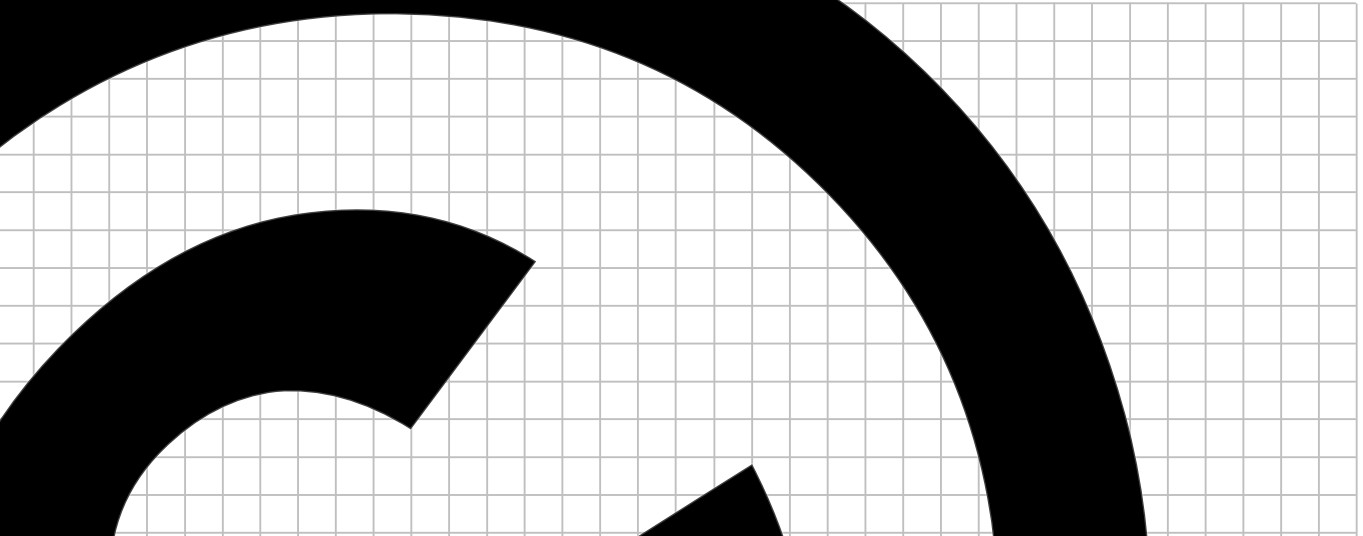
Übungen

Ü5.3
Berechnen Sie die Schnittpunkte der drei Geraden mit der Parabel.



Ü5.4
Zeichnen Sie zu jeder Aufgabe die Parabel und die Geraden in ein gemeinsames Koordinatensystem. Entscheiden Sie dann aufgrund der Zeichnung, ob die Geraden Sekanten, Tangenten oder Passanten sind. Überprüfen Sie diese Ergebnisse jeweils durch Berechnung und ggf. mit Hilfe eines geeigneten Programms zum Zeichnen von Funktionen.

- a) $f(x) = (x + 2)^2 - 1$ $h(x) = x - 2$ $k(x) = -2x - 8$
b) $f(x) = (x - 3)^2 + 3$ $h(x) = x + 3$ $k(x) = 0,5x - 5$





Ü5.5

Wenn man bei der Berechnung von Schnittpunkten die pq- Formel anwendet, erhält man:

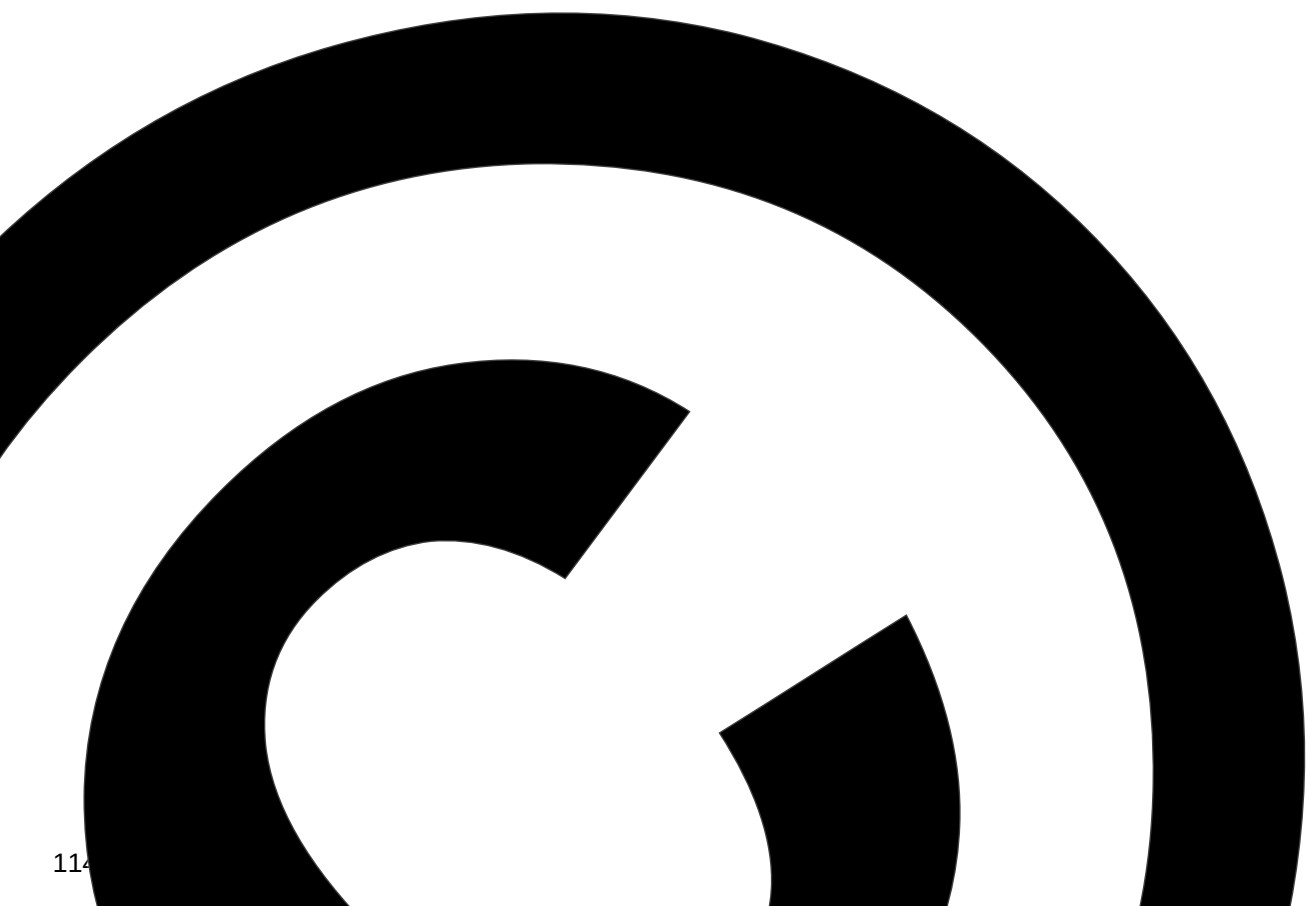
- (3) Eine Parabel und eine Gerade haben zwei Schnittpunkte, wenn bei der pq- Formel _____ unterschiedliche Lösungen erhält.
- (4) Eine Parabel und eine Gerade haben einen Berührungspunkt, wenn bei der pq- Formel eine _____ unter der Wurzel auftritt und man dann _____ (doppelte) Lösung erhält.
- (5) Eine Parabel und eine Gerade haben _____ gemeinsame Punkte, wenn der Ausdruck unter der Wurzel bei der pq- Formel _____ ist und man sonst _____ Lösung erhält.

Ü5.6

Gegeben seien die Parabel $p(x) = -x^2 + 6$ und die Gerade $g(x) = x - 5$. Bestimmen Sie die Schnittpunkte S_1 und S_2 der Parabel und der Geraden. Ermitteln Sie die Gleichungen $g_1(x)$ und $g_2(x)$ der zu $g(x)$ senkrechten Geraden, die S_1 und S_2 schneiden.

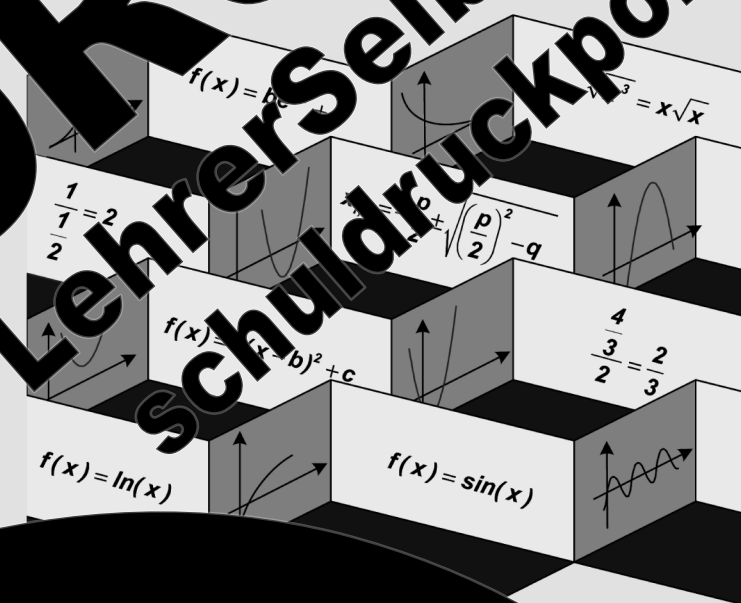


VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de



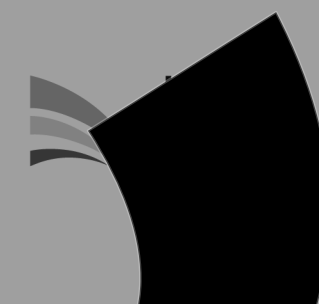
Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Grundlegende zu Algebra und Funktionen selbstorganisiert erlernen



Kapitel

Gleichungen 3. und
n-ten Grades



Kapitel 1	
Brüche, Potenzen, Wurzeln und Binome	9
Kapitel 2	
Grundlegendes zu Gleichungen	59
Kapitel 3	
Lineare Funktionen	63
Kapitel 4	
Quadratische und biquadratische Gleichungen und Ungleichungen	77
Kapitel 5	
Ganzrationale Funktion 2. Grades	87
Kapitel 6	
Gleichungen 3. und höherer Grades	104
Kapitel 7	
Ganzrationale Funktionen 3. und höherer Grades	115
Kapitel 8	
Die Hyperbelfunktion	127
Kapitel 9	
Trigonometrische Funktionen	135
Kapitel 10	
Exponential- und Logarithmusfunktionen	145
Kapitel 11	
Vertiefende Betrachtung von Betragsungleichungen	169

VORSCHAU
 LehrerselbstVerlag
 schuldruckportal.de

Gesamtwortmarken zu Algebra und Funktionen ... erlernen
 (Bestandteile des Buches)
 Sämtliche Rechte vorbehalten. All rights reserved.
 Nachdruck, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
 aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet
 LehrerselbstVerlag
 Druck & Freunde GmbH, Koblenz (Germany)
 www.f-druck.de

Kapitel 6: Gleichungen 3. und höheren Grades

Die Lösungsverfahren für Gleichungen 3. und höheren Grades bauen auf den Kenntnissen zum Umgang mit quadratischen Gleichungen auf. Es kommen hier, bis auf das neu zu lernende Verfahren der Polynomdivision grundsätzlich die gleichen Lösungsverfahren zur Anwendung.

Aufgabe 6.1

Lösen einer Gleichung höheren Grades, die in faktorisierter Form vorliegt

$$a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n) = 0$$

Lösung durch Ablesen
 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$

Wie Sie bereits wissen, soll man die Klammern für das Lösen der Gleichung nicht auflösen, sondern kann die Lösungen jeweils aus den Klammern bestimmen. (Vgl. Kapitel 4, Aufgabe 4.1.5 und Kapitel 5, Aufgabe 5.2.1 und 5.2.3 c))

Beispiel:

Ermitteln Sie die Lösungen der Gleichung

$$(x - 7)(x + 3)(x^2 + 3x - 10)(x^2 + 9) = 0$$

Man erhält $x_1 = 7$ durch Ablesen

2. Klammer $(2x + 4) \Rightarrow x_2 = -2$ Berechnung $2x + 4 = 0$.

3. Klammer $(x^2 - 1) \Rightarrow x_3 = 1$ Anwendung der 3. binomischen Formel, also $(x^2 - 1) = (x + 1)(x - 1)$, liefert 2 Lösungen.

4. Klammer $(x^2 + 9)$ kommt auf Grund des Quadrates nicht in Betracht, da es zwei gleiche Lösungen.

5. Klammer $(x^2 + 3x - 10) \Rightarrow x_7 = 2, x_8 = -5$ Der Ansatz $x^2 + 3x - 10 = 0$ führt zu einer quadratischen Gleichung, die mit Hilfe der p,q-Formel gelöst wird.

6. Klammer $(x^2 + 9)$ führt zu einem Widerspruch, da die Gleichungen $x^2 = -9$ keine reellen Lösungen haben.

Aufgabe 6.2

Lösen einer Gleichung, bei der man x^n ausklammern kann.

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 = 0$$
$$x^2(ax^2 + bx + c) = 0$$

Kleinste Potenz ausklammern

$$x_{1,2} = 0$$

Lösungen getrennt schreiben

oder $ax^2 + bx + c = 0$ (nach Potenzen auflösen)

Übungen

Ü6.1

Berechnen Sie die Lösungen der folgenden Gleichungen. Achten Sie dabei insbesondere auf die Bedeutung von geraden und ungeraden Potenzen bei der Lösungsvariablen für das Ergebnis.

- | | | | |
|----------------|--------------------------|----------------|--------------------|
| a) $x^2 = 25$ | b) $169 + 12x + x^2 = 0$ | c) $x^2 = 6x$ | d) $x^2 + 7x = 0$ |
| e) $x^3 = 81x$ | f) $x^2 + 144x = 0$ | g) $x^4 = 27x$ | h) $x^4 + 64x = 0$ |
| i) $x^5 = 81x$ | j) $x^3 + 21x = 0$ | k) $x^6 = 32x$ | l) $x^6 + x = 0$ |

Lösungen: a) ± 5 ; b) -13 ; c) 0 ; d) 0 ; e) 0 ; f) 0 ; g) 0 ; h) 0 ; i) 0 ; j) 0 ; k) 0 ; l) 0

Ü6.2

Berechnen Sie die Lösungen der folgenden Gleichungen. Die Lösungen sind zur Kontrolle gegeben.

- | | | |
|------------------------|------------------------------------|-----------------------------------|
| a) $x^2 = 0$ | b) $6 - t^2 = 0$ | c) $x^2 = \pm \sqrt{6}$ |
| d) $4x^2 + 8x + 4 = 0$ | e) $x^2 - 5x = -6$ | f) $3x^2 + 9 - 2x = 0$ |
| g) $(x + 5) = 0$ | h) $(x^2 - 1)(x + 2)(x^2 + 3) = 0$ | i) $x^2 - x - 30 = 0$ |
| j) $0,2t^2 - 1,2t = 0$ | k) $4x^2 + x + 15 = 0$ | l) $2x^2 - 4,2x - 0,76 = 0$ |
| m) $2x^5 - 8x^3 = 0$ | n) $9x^2 - 6x + 1 = 0$ | o) $2(4v - 1)^2 = v - (2v - 1)^2$ |
| p) $9x^2 - 6x + 1 = 0$ | q) $0,5 + 1,5x = 0$ | r) $3x^2 - \frac{1}{3}x^4 = 0$ |
| s) $0,5 + 1,5x = 0$ | t) $3x^2 - \frac{1}{3}x^4 = 0$ | u) $0,5x = 0$ |

Berechnen Sie die Lösungen der folgenden Gleichungen. Die Lösungen sind zur Kontrolle gegeben.

- | | | | |
|------------------------------|-----------------------|--------------------------|------------------------------------|
| a) $(1 - x^2)^2 = 0$ | b) $x^2 = \pm 1$ | c) $x^2 = 0$ | d) $x^2 = 5$ |
| e) $100x^3 + 80x^2 = 0$ | f) $x^2 = 0$ | g) $x^2 = 0$ | h) $(x^2 - 1)(x + 2)(x^2 + 3) = 0$ |
| i) $16x^2 - 8x + 1 = 0$ | j) $(2x^2 - 1)^2 = 0$ | k) $0,4(1,2x^2 - 1) = 0$ | l) $8 - \frac{1}{6}x^2 = 0$ |
| m) $0,4z^2 - 1,2z + 0,9 = 0$ | n) $0,5(x - 3)^2 = 0$ | o) $32x^4 - 2x^2 = 0$ | p) $0,5(x - 3)^2 = 0$ |
| q) $0,5(x - 3)^2 = 0$ | r) $32x^4 - 2x^2 = 0$ | s) $0,5(x - 3)^2 = 0$ | t) $32x^4 - 2x^2 = 0$ |

Information 6.1

Nicht jede Gleichung höheren Grades kann mit Hilfe der bisher erlernten Methoden gelöst werden. Bei Gleichungen 3. und höheren Grades kann es notwendig werden, das Verfahren der **Polynomdivision** anzuwenden.

Lösen von Gleichungen 3. und höheren Grades mit Polynomdivision

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Bei einer Gleichung 3. Grades kann man nicht ausklammern und Lösungsformeln, die eine $ax^2+bx+c=0$ -Formel ähneln, in der Praxis schwierig anzuwenden und meist nicht effizient. Eine Möglichkeit, alle Lösungen der hier vorliegenden Gleichung zu berechnen, bietet das Verfahren der **Polynomdivision**.

Aufgabe 6.3

Mit Hilfe der **Polynomdivision** sollen Sie schrittweisen Dividieren, das Sie bereits in der Grundschule erlernt haben ähneln, sollen Sie die in polynomieller Darstellung gegebene Gleichung $18x^3 - 27x^2 - 17x - 2 = 0$ bereinigen und aus der vereinfachten Form des Gleichungsterms ermittelt werden. Arbeiten Sie nach Beispiel 1 eingehend durch und wenden Sie das Verfahren anschließend in der Übung 6.4 an.

Beispiel 1: $18x^3 - 27x^2 - 17x - 2 = 0$

Um das Verfahren der Polynomdivision anwenden zu können, benötigt man die erste Lösung der Gleichung. Wenn diese Lösung nicht geben bzw. nicht bekannt ist, versucht man die Lösung durch Raten zu finden. Zum Raten geeignet sind ganzzahlige Werte des Summanden ohne x. Hier also ± 1 und ± 2 . Diese Zahlen werden in die Funktion eingesetzt. Wenn sich dabei, wie im 1. Schritt unten beim Einsetzen von $x = 2$ Null ergibt, hat man die erste Lösung gefunden und kann das Verfahren mit dem 2. Schritt fortsetzen.

1. Schritt: Raten

$$\begin{aligned} x = -1 &\Rightarrow -18 - 27 + 17 - 2 = -30 \\ x = 2 &\Rightarrow 144 - 108 - 34 - 2 = 0 \end{aligned}$$

Erratene erste Lösung: $x_1 = 2$

Das Ergebnis des Ratevorgangs als Linearfaktor $(x - 2)$ notieren. Dieser Linearfaktor wird in der nächsten Zeile der Division eingesetzt. $x = 2$ die $\Rightarrow x - 2 = 0$

2. Schritt: Polynomdivision mit dem Linearfaktor $(x - 2)$ notieren.

$$(18x^3 - 27x^2 - 17x - 2) : (x - 2) =$$

3. Schritt: 1. Divisionsvorgang

1. Division

Nur der erste Summand $18x^3$ wird durch das x aus dem Linearfaktor $(x - 2)$ dividiert. Der Zahlenwert, hier -2 , wird dabei nicht berücksichtigt.

$$(18x^3 - 27x^2 - 17x - 2) : (x - 2) = 18x^2$$

1. Ergebnis: $18x^3 : x = 18x^2$

4. Schritt: 1. Multiplikationsvorgang

$$(18x^3 - 27x^2 - 17x - 2) : (x - 2) = 18x^2$$

$$18x^3 - 36x^2$$

Das Ergebnis der Multiplikation in einer zweiten Zeile, wie dargestellt, notieren.

$$18x^3 - 36x^2$$

18 wird mit dem Linearfaktor multipliziert. $18x^2(x - 2) = 18x^3 - 36x^2$

5. Schritt: Subtraktionsvorgang

$$(18x^3 - 27x^2 - 17x - 2) : (x - 2) = 18x^2$$

$$18x^3 - 36x^2$$

2. Zeile von der 1. Zeile subtrahieren

$$\begin{array}{r} 18x^3 \quad -27x^2 \\ -18x^3 \quad -(-36x^2) \\ \hline 0 \quad 9x^2 \end{array}$$

$$9x^2 - 17x$$

17x werden nach unten geholt.

6. Schritt: 2. Divisionsvorgang

$$9x^2 - 17x$$

2. Ergebnis aus $9x^2 : x = 9x$

Nur den 1. Summanden wieder nur durch das x aus dem Linearfaktor $(x - 2)$ dividieren.

$$(9x^2 - 17x) : (x - 2) = 9x$$

9x wird mit dem Linearfaktor multipliziert. $9x(x - 2) = 9x^2 - 18x$

Ergebnis dieser Multiplikation in der nächsten Zeile notieren.

$$\begin{array}{r} 18x^3 - 36x^2 \\ 9x^2 - 17x \\ 9x^2 - 18x \\ \hline \end{array}$$

7. Schritt:

$$18x^3 - 36x^2$$

$$9x^2 - 17x$$

$$9x^2 - 18x$$

8. Schritt:

2. Subtraktionsvorgang

$$(18x^3 - 27x^2 - 17x - 2) : (x - 2) = 18x^2 + 9x + 2$$

$$\underline{18x^3 - 36x^2}$$

$$9x^2 - 17x$$

$$\underline{9x^2 - 18x}$$

$$x - 2$$

9. Schritt:

3. Divisionsvorgang

$$(18x^3 - 27x^2 - 17x - 2) : (x - 2) = 18x^2 + 9x + 2$$

$$\underline{18x^3 - 36x^2}$$

$$9x^2 - 17x$$

$$\underline{9x^2 - 18x}$$

$$x - 2$$

10. Schritt:

Multiplikationsvorgang

$$(18x^3 - 27x^2 - 17x - 2) : (x - 2) = 18x^2 + 9x + 2$$

$$\underline{18x^3 - 36x^2}$$

$$9x^2 - 17x$$

$$\underline{9x^2 - 18x}$$

$$x - 2$$

$$\underline{x - 2}$$

$$0$$

11. Schritt:

3. Subtraktionsvorgang

$$(18x^3 - 27x^2 - 17x - 2) : (x - 2) = 18x^2 + 9x + 2$$

$$\underline{18x^3 - 36x^2}$$

$$9x^2 - 17x$$

$$\underline{9x^2 - 18x}$$

$$x - 2$$

$$\underline{x - 2}$$

$$0$$

12. Schritt:

18. Substitutionsvorgang

$$18x^2 + 9x + 2 = 0$$

$$x_2 = -\frac{1}{3} \text{ und } x_3 = -\frac{1}{6}$$

Faktorierte Darstellung des Gleichungsterms:

Aus den Ergebnissen kann man nun analog wie bei den quadratischen Gleichungen eine faktorierte Darstellung der Gleichung aus der Aufgabenstellung angeben.

$$18x^3 - 27x^2 - 17x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + \frac{1}{3})(x + \frac{1}{6}) = 0$$

Information zum Rateverfahren

Beim Rateverfahren für Polynomdivision ist es nur sinnvoll mit ganzzahligen Werten zu arbeiten. Man sollte man nur Zahlenwerte einsetzen, die ganzzahlige Teile des Summanden ohne x sind, da dieser Summand das Produkt der Lösungen enthält.

Hier: $2, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}$

Lösung

Übungen

Ü6.4

Berechnen Sie die Lösungen der Gleichung $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$. Geben Sie anschließend die Gleichung in der faktorierten Darstellung an (Kontrollergebnis: $(x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0$)

Beispiel 2:

Im folgenden Beispiel geht man schrittweise genauso vor, wie im ausführlich dargestellten Beispiel 1. Es tritt hier jedoch eine Besonderheit auf.

Im Gleichungsterm fehlt der Summand mit x^2 .

Erratene erste Lösung.

Gleichung: $x^3 + x - 2 = 0$

1. Schritt Raten mit $x = 1 \Rightarrow 1 + 1 - 2 = 0 \Rightarrow 1$ ist eine Lösung.

2. Schritt Ansatz für Polynomdivision mit dem Linearfaktor $(x - 1)$. Aus der Lösung $x = 1$ erhält man den Linearfaktor $(x - 1)$.

3 bis 11. Schritt liefert folgenden Rest:

$$\begin{array}{r} (x^3 + x - 2) : (x - 1) = x^2 + x + 2 \\ \underline{x^3 - x^2 + x - 2} \\ 2x^2 + 2x \\ \underline{2x^2 - 2x + 2} \\ 4x - 2 \end{array}$$

Da x und $-x^2$ nicht subtrahieren kann, schreibt man die Form $-(-x^2) = x^2$ in die nächste Zeile. Das „Untenholen“ des nächsten Summanden entfällt damit, da bereits zwei Summanden vorhanden sind. Alle weiteren Schritte bei der Division wie in Beispiel 1.

Zusatzinfo zu alternativer Rechnung: Alle Potenzen von x auftreten, kann man die Division mit folgendem Ansatz schreiben:

$x^2 + x + 2 = 0$
und dann wie im Beispiel 1.

3. Schritt $x^2 + x + 2 = 0$
 $x_{1,2} = -0,5 \pm \sqrt{0,25 - 2} \Rightarrow$ negative Wurzel $\Rightarrow$ keine reellen Lösungen

Faktorierte Form:
Für die faktorierte Form der Ausgangsgleichung gilt dann: $(x - 1)(x^2 + x + 2) = 0$

Der Ergebnisterm der Division wird übernommen, da dieser sich faktorisieren lässt.

Beispiel 3:

Auch im folgenden Beispiel geht man schrittweise genauso vor, wie im ausführlich dargestellten Beispiel 1. Es tritt hier jedoch wieder eine Besonderheit bei der Rechnung auf.

Gleichung: $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$

Erratene erste Lösung.

Aus der Lösung $x = -1$ erhält man den Linearfaktor $(x + 1)$.

1. Schritt Raten mit $x = -1 \Rightarrow -1 + 1 - 1 + 1 = 0 \Rightarrow -1$ ist eine Lösung.

2. Schritt Ansatz für Polynomdivision mit dem Linearfaktor $(x + 1)$.

3 bis 11. Schritt liefert folgenden Rest:

$$\begin{array}{r} (x^3 + x^2 + x + 1) : (x + 1) = x^2 + 1 \\ \underline{x^3 + x^2 + x + 1} \\ 0 \end{array}$$

Bei der ersten Subtraktion ergibt sich für beide Potenzen Null. In der nächsten Zeile gibt es keinen Summanden mehr. Man holt dann die beiden folgenden Summanden aus der ersten Zeile gleichzeitig nach unten.

12. Schritt $x^2 + 1 = 0$ führt zu keinem Widerspruch. Es gibt damit keine weitere Lösung.

Für die faktorisierte Form der Ausgangsgleichung gilt dann: $(x + 1)(x^2 + 1) = 0$

Der Ergebnisterm der Division wird übernommen.

Übung: Geben Sie die Lösungsmenge jeweils mit $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ an, indem Sie die erste Lösung angeben. Die Lösungen sind in ungeordneter Reihenfolge angegeben.

- a) $x^3 - 10x^2 + 29x - 20 = 0$

c) $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$

e) $2x^3 + 3x^2 - 2x - 3 = 0$

g) $x^5 + x^4 - x^3 - x^2 - x - 1 = 0$
- b) $25x^2 - 10x + 1 = 0$

d) $4x^3 - 3x^2 - 6x + 2 = 0$

f) $4x^3 - 13x^2 + 10x - 3 = 0$

h) $2x^5 - 11x^4 + 17x^3 - 8x^2 - 4x + 4 = 0$

Lösungsmenge angeben:

-0,5; 1	-0,5; 2; 1	2; 0,8; 0,2	1
-1; 0,5	1; 4; 5	0,5; 1,5; -2	

Information 6.2

Sie haben für das Lösen von quadratischen Gleichungen und Gleichungen höheren Grades eine Reihe von Lösungsverfahren kennengelernt und es ist am Anfang oft schwierig, den Unterschied aller diese Lösungsmethoden zu behalten und souverän, ohne längeres Überlegen, die richtige zu finden. Um sich die Entscheidung, welches Lösungsverfahren zu wählen ist, zu erleichtern, kann Sie das Ablaufdiagramm auf der übernächsten Seite verwenden. Es stellt die Prinzipien, die Sie im Kopf bei der Entscheidungsfindung für die Wahl des passenden Lösungsverfahrens für eine Gleichung dar. Wenn Sie ohne Verwendung dieses Diagramms sofort entscheiden können, welche Gleichung zu lösen ist und das gewählte Verfahren fehlerfrei beherrschen, ist es nicht notwendig, weitere Übungsaufgaben zum Lösen von Gleichungen zu bearbeiten.

Übungen
Ü6.6

In dieser Übungsaufgabe sind alle benötigten Gleichungen vorhanden.

- a) Notieren Sie mit Stichworten in der zweiten Spalte der Tabelle unten, welche Lösungsverfahren man für die Lösung der Gleichung wählen sollte und ggf. welche Umformungen vorher notwendig sind. Sie können dabei als Hilfe das Ablaufdiagramm auf der übernächsten Seite verwenden.
- b) Berechnen Sie die Lösungen der Gleichungen in dieser Spalte jeweils dann für die Aufgabenstellung günstigsten Lösungsverfahrens wählen. Zur Kontrolle sind die Lösungen jeweils angegeben.

Aufgabenstellung	Lösungsverfahren	Lösung zur Kontrolle
a) $x^2 = 0,75$		0; 0,75
b) $(2x + 4)(3 - x)(5 - 10x) = 0$		-2, 3; 0,5
c) $12x^4 - 44x^2 + 4 = 0$		2;-2
d) $x^2 + 11x + 10 = 0$		0, 1,08; -3,41
e) $(x^2 + 4)(x^2 - 9) = 0$		3;-3
f) $3x^3 - 7x^2 + 2x = 0$		
g) $(x^2 + 1)^3 = 0$		

h) $(0,25x + 1)^2 = (0,5x + 1)^2$		
i) $0,5x^3 + 3x^2 = 8$		-2; -5,46; - 1,46

Für $a \in \mathbb{R}^+$, $k \in \mathbb{R}^+$ und $t \in \mathbb{R}^+$ sind die folgenden parametrisierten Gleichungen gegeben.

j) $ax(x^2 + a)(x + 2a) = 0$		$0, -2a$
k) $x^4 - 2ax^3 + a^2x^2 = 0$		0, a
l) $(t + x)^2 = 4t^2$		0; $1/(2t) + 1/2$
m) $x(2x^2 + kx - 2k) = 0$		0; $\pm\sqrt{2k}$; $\pm\sqrt{\frac{k}{2}}$
n) $ax^3 - (a + 1)x^2 + 1 = 0$		1, -1, $\sqrt{1/a}$; $-\sqrt{1/a}$

Ablaufdiagramm für die Auswahl des Lösungsverfahrens bei Potenzgleichung höheren Grades.



Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Grundlegende zu Algebra und Funktionen selbstorganisiert erlernen



Kapitel

Ganzrationale Funktionen höheren Grades

Kapitel 7: Ganzrationale Funktionen 3. und höheren Grades

Aufgabe 7.1

Ganzrationale Funktionen höherer Ordnung

In den nun folgenden Abbildungen ist jeweils der Graph einer ganzrationalen Funktion dargestellt. Die Funktionsgleichungen sind dabei in der polynomialen Form angegeben. Mitteln Sie zu jeder Funktion zunächst durch Ablesen die Nullstellen. Berechnen Sie die Nullstellen anschließend exakt und geben Sie den Funktionsterm danach in faktorisierter Form an. Geben Sie anschließend Ihr Ergebnis selbst anhand der abgelesenen Nullstellen.

a) Nullstellenbestimmung ganzrationaler Funktionen, bei denen der größte Exponent **ungerade** ist.

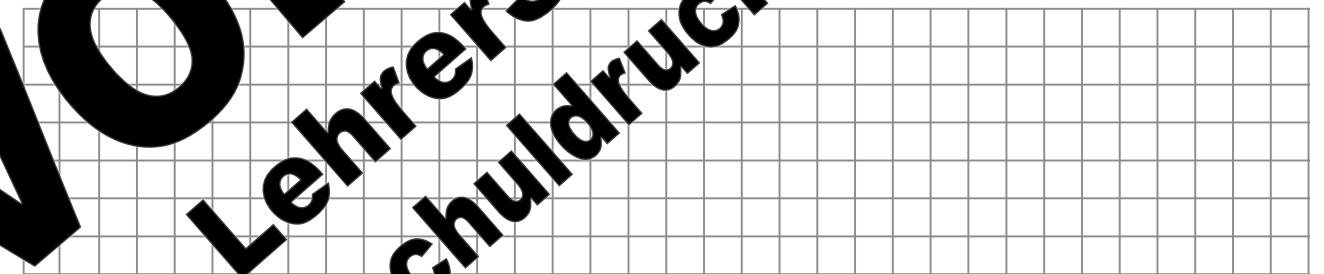
(1) $f(x) = x^3 + x$

Nullstellen ablesen: $N_1(\quad / \quad); N_2(\quad / \quad); N_3(\quad / \quad)$

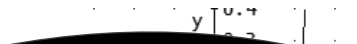


Funktionsterm in faktorisierter Form angeben:

Nullstellen berechnen: $f(x) = 0 \Rightarrow x^3 + x = 0$



(2) $g(x) = x^5 - x^3$



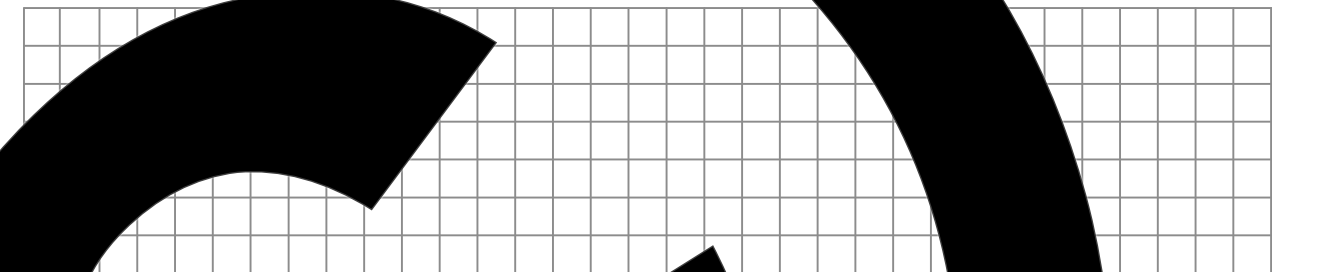
Nullstellen ablesen:

$N_1(\quad / \quad); N_2(\quad / \quad); N_3(\quad / \quad); N_4(\quad / \quad); N_5(\quad / \quad)$

$N_6(\quad / \quad)$

Funktionsterm in faktorisierter Form:

Nullstellen berechnen: $g(x) = 0 \Rightarrow x^5 - x^3 = 0$



Kapitel 1	
Brüche, Potenzen, Wurzeln und Binome	9
Kapitel 2	
Grundlegendes zu Gleichungen	59
Kapitel 3	
Lineare Funktionen	63
Kapitel 4	
Quadratische und biquadratische Gleichungen und Ungleichungen	77
Kapitel 5	
Ganzrationale Funktion 2. Grades	87
Kapitel 6	
Gleichungen 3. und höheren Grades	104
Kapitel 7	
Ganzrationale Funktionen 3. und höheren Grades	115
Kapitel 8	
Die Hyperbelfunktion	127
Kapitel 9	
Trigonometrische Funktionen	135
Kapitel 10	
Exponential- und Logarithmusfunktionen	145
Kapitel 11	
Vertiefende Betrachtungen zu Betragsungleichungen	169

Gesamtwortzahl: 130.000 Wörter zu Algebra und Funktionen. Dieses Buch ist als Lernhilfe konzipiert und soll das Erlernen erleichtern.

(Bestandteile)

Siehe

Alle Rechte vorbehalten. All rights reserved.

Das Werk, auch auszugsweise, vorbehalten der Rechte, nach den Bestimmungen des UrhG aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Alle Rechte vorbehalten.

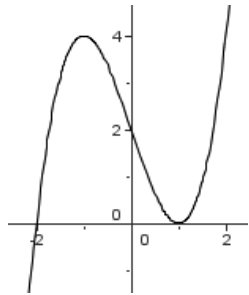
SelbstVerlag

Lehrers & Freunde GmbH, Koblenz (Germany)

Lehrerselbstverlag.de

www.f-druck.de

(3) $g(x) = x^3 - 3x + 2$



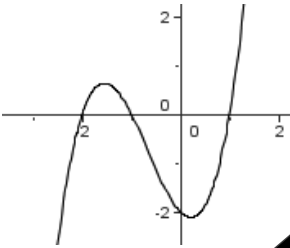
Nullstellen ablesen: $N_1(\quad)$ / $N_{2,3}(\quad)$

Funktionsterm in faktorisierter Form:

$g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

Nullstellen berechnen $g(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 3x + 2 = 0$

(4) $k(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$



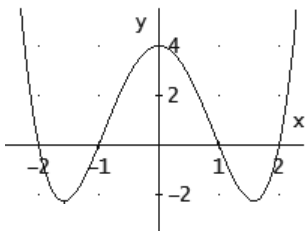
Nullstellen abgelesen: $N_1(\quad)$ / $N_{2,3}(\quad)$

Funktionsterm in faktorisierter Form:

Berechnen der Nullstellen: $k(x) = 0 \Rightarrow x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

b) Untersuchungen bei ganzrationalen Funktionen, bei denen der größte Exponent gerade ist

(1) $a(x) = x^4 - 5x^2 + 4$



Nullstellen:

$N_1(\quad / \quad);$
 $\quad / \quad)$

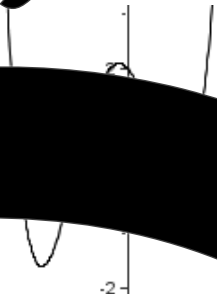
Nullstellen in faktorisierter Form:

$a(x) = \quad$

Berechnen der Nullstellen: $a(x) = 0 \Rightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = 0$



(2) $b(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2$



Nullstellen:

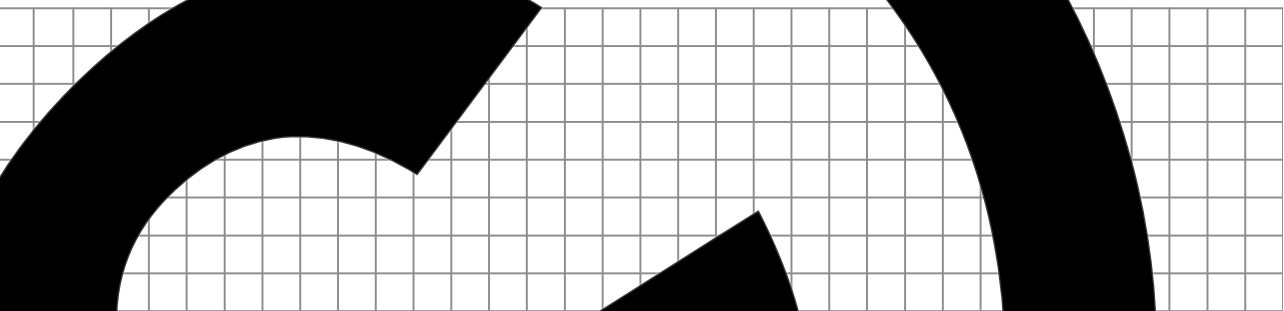
$N_1(\quad / \quad); N_2(\quad / \quad)$

$N_{3,4}(\quad / \quad)$

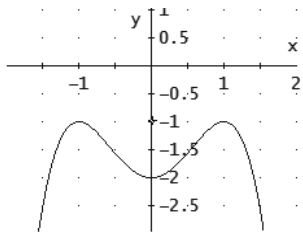
Nullstellen in faktorisierter Form:

$b(x) = \quad$

Berechnen der Nullstellen: $b(x) = 0 \Rightarrow x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2 = 0$



(3) $c(x) = -x^4 + 2x^2 - 2$



Nullstellen: _____

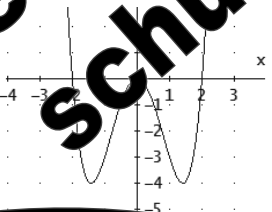
Funktionsterm in faktorisierter Form: _____

$c(x) =$ _____

Berechnen der Nullstellen: $c(x) = 0 \Rightarrow -x^4 + 2x^2 - 2 = 0$



(4) $d(x) = -4x^2$



Nullstellen: _____

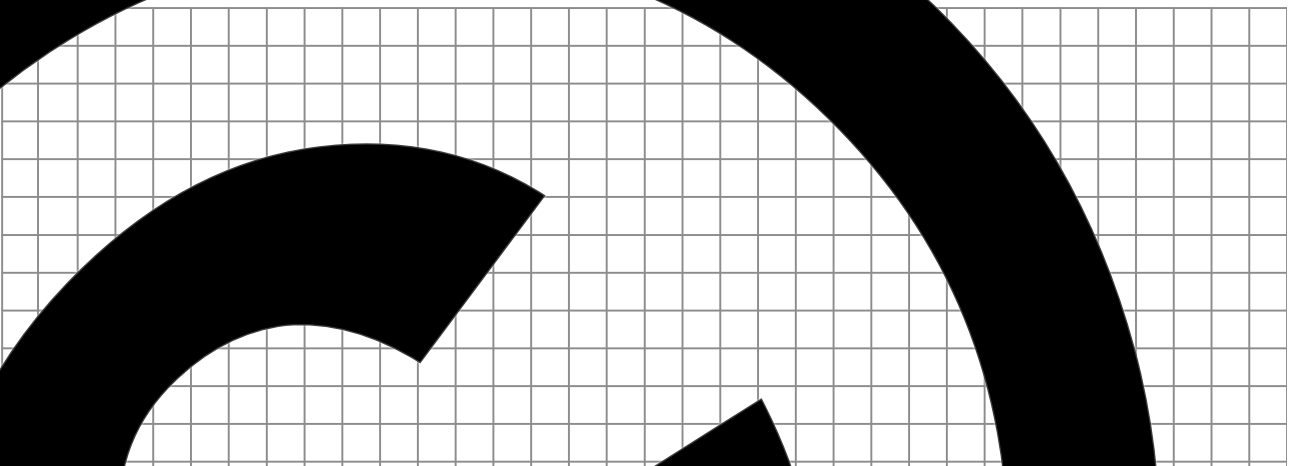
$N_1(\quad / \quad) \quad N_2(\quad / \quad)$

$N_{3,4}(\quad / \quad)$

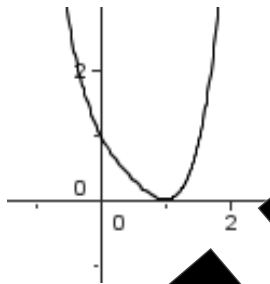
Funktionsterm in faktorisierter Form: _____

$d(x) =$ _____

Berechnen: $d(x) = 0 \Rightarrow -4x^2 = 0$



(5) $e(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$



Nullstellen: _____

Funktionsterm in faktorisierter Form: _____

$e(x) = (x - 1)^2(x^2 + 1)$

Weisen Sie hier durch Ausmultiplizieren der faktorierten Form der Funktion nach, dass gilt: $(x - 1)^2(x^2 + 1) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$



Ergänzen Sie:

Die Berechnung der Nullstellen einer Funktion 4. Grades führt zu einer Gleichung ____ Grades. Da Funktionen 4. Grades ____ Nullstellen haben können, gibt es bei Gleichungen 4. Grades ____ Lösungen.

Ergänzen Sie den allgemeinen Merksatz zur Anzahl der Nullstellen von Funktionen.

Zusammenfassender Merksatz:

Funktionen n-ten Grades mit der größten Potenz von x ungerade haben immer ____ Nullstelle besitzen. Funktionen, die ____ ist, müssen keine Nullstellen besitzen.

Allgemein hat eine Funktion n-ten Grades maximal ____ Nullstellen.

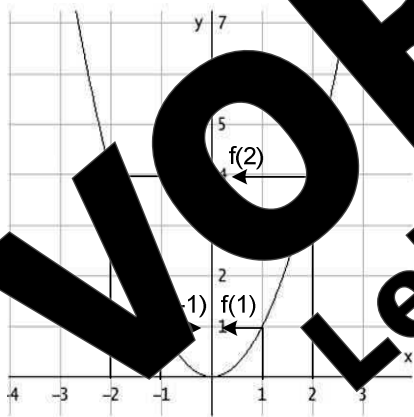
Aufgabe 7.2

Symmetriebetrachtungen bei ganzrationalen Funktionen

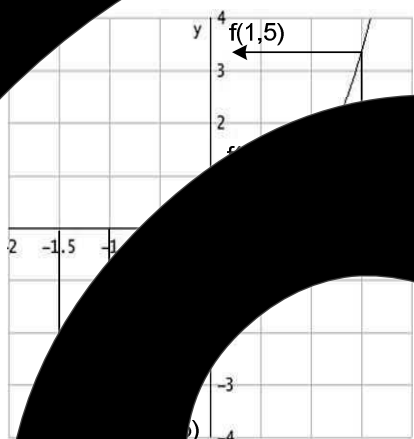
Oft verlangen Aufgabenstellungen die Anfertigung einer Skizze für den Verlauf einer Funktion. Dazu reicht es meist aus, die Nullstellen und den y-Achsenabschnitt zu kennen. Oft ist es jedoch auch, wenn man die Funktion hinsichtlich ihrer Symmetrieeigenschaften untersucht.

Beispielhafte Untersuchung auf Symmetrie anhand der einfachen Funktionen $f(x) = x^2$ und $h(x) = x^3$.
 Füllen Sie jeweils die Wertetabelle aus, und vergleichen Sie die Funktionswerte der Wertepaare $f(x)$ und $f(-x)$. Formulieren Sie jeweils einen Zusammenhang zwischen $f(x)$ und $f(-x)$.

Symmetrie bei einer zur y-Achse symmetrischen Funktion

Funktion	Wert	Beziehung zwischen den Funktionswerten
Achsensymmetrie zur y-Achse		Ergänzen Sie: Bei einer zur y-Achse symmetrischen Funktion gilt für einen beliebigen Wert von x die folgende Beziehung:
$f(x) = x^2$		
		
	-2	$f(-2) = \underline{\hspace{2cm}}$
	-1	$f(-1) = \underline{\hspace{2cm}}$
	0	$f(0) = \underline{\hspace{2cm}}$
	1	$f(1) = \underline{\hspace{2cm}}$
	2	$f(2) = \underline{\hspace{2cm}}$
	3	$f(3) = \underline{\hspace{2cm}}$
		$f(-1) = \underline{\hspace{2cm}}$
		$f(1) = \underline{\hspace{2cm}}$
		$f(-x) = f(\underline{\hspace{2cm}})$

Symmetrie bei einer zum Ursprung symmetrischen Funktion

Funktion	Wert	Beziehung zwischen den Funktionswerten
Punktsymmetrie zum Ursprung		Ergänzen Sie: Bei einer zum y-Achse symmetrischen Funktion gilt für einen beliebigen Wert von x die folgende Beziehung:
		
	-2	$f(-2) = \underline{\hspace{2cm}}$
	-1	$f(-1) = \underline{\hspace{2cm}}$
	0	$f(0) = \underline{\hspace{2cm}}$
	1	$f(1) = \underline{\hspace{2cm}}$
	2	$f(2) = \underline{\hspace{2cm}}$
		$f(-1,5) = \underline{\hspace{2cm}}$
		$f(1,5) = \underline{\hspace{2cm}}$
		$f(-1) = \underline{\hspace{2cm}}$
		$f(1) = \underline{\hspace{2cm}}$
		$f(-x) = \underline{\hspace{2cm}}$

Aufgabe 7.3

Rechnerische Untersuchung auf Symmetrieverhalten bezüglich der y-Achse bzw. des Ursprungs

Information 7.1

In jedem Tafelwerk kann man nachschlagen, dass die anhand der Funktionen $f(x) = x^2$ und $h(x) = x^3$ verdeutlichten Beziehungen bei dem Vorliegen von Symmetrie für alle Funktionsklassen gültig sind. Die in Aufgabe 7.2 dargestellte Form der Zusammenhänge ist die rechnerische Untersuchung auf Symmetrie günstig und wird daher im Folgenden verwendet.

Achsensymmetrie zur y-Achse:
Punktsymmetrie zum Ursprung:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(-x) \\ f(x) &= -f(-x) \end{aligned}$$

Verdeutlichen Sie sich die Vorgehensweise zum rechnerischen Nachweis von Symmetrien anhand der folgenden Beispiele.

Beispiel 1:

Nachweis, dass die Funktion $g(x) = x^3 - 3x + 2$ keine Symmetrieeigenschaft hat.

a) Prüfen auf Achsensymmetrie mit dem Ansatz $g(-x) = g(x)$

$$g(-x) = (-x)^3 - 3(-x) + 2 = -x^3 + 3x + 2 \neq g(x) \Rightarrow \text{keine Achsensymmetrie}$$

all, wenn $g(x)$ ein x durch $-x$ ersetzt.

Alle Klammern wurden aufgelöst und der entstehende Ausdruck wird mit der ursprünglichen Funktion verglichen.

Keine Übereinstimmung mit $g(x)$
 $\Rightarrow$ keine Achsensymmetrie

b) Prüfen auf Punktsymmetrie mit dem Ansatz $-g(-x) = g(x)$

$$-g(-x) = -[-x^3 + 3x + 2] = x^3 - 3x - 2 \neq g(x) \Rightarrow \text{keine Punktsymmetrie}$$

aufgelöst

Keine Übereinstimmung mit $g(x)$
 $\Rightarrow$ keine Punktsymmetrie

Beispiel 2:

Nachweis, dass die Funktion $c(x) = -x^4 + 2x^2 - 2$ achsensymmetrisch ist. Der Nachweis für Achsensymmetrie ist notwendig, die Untersuchung auf Punktsymmetrie ist nicht notwendig.

$$c(x) = (-x)^4 + 2(-x)^2 - 2 = x^4 + 2x^2 - 2 = c(x)$$

Alle Klammern auf der rechten Seite vom Gleichheitszeichen ergibt die Ausgangsfunktion. D.h. die Funktion ist achsensymmetrisch.

Beispiel 3:

Nachweis, dass die Funktion $f(x) = x^3 + x$ punktsymmetrisch ist.

a) Prüfen auf Achsensymmetrie

$f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x \neq f(x) \Rightarrow$ nicht achsensymmetrisch

Bei der Untersuchung auf Achsensymmetrie ergibt sich ein Widerspruch.

b) Prüfen auf Punktsymmetrie

$-f(-x) = -[-x^3 - x] = x^3 + x = f(x) \Rightarrow$ Punktsymmetrie

Bei der Untersuchung auf Punktsymmetrie ergibt sich nach dem Aufheben aller Klammern auf der rechten Seite vom Gleichheitszeichen die Ausgangsfunktion.

Übung 7

a) Untersuchen Sie die ganzrationalen Funktionen aus Aufgabe 7.1, ohne Rechnung, alleine anhand des gegebenen Kurvenverlaufs auf Zusammenhänge zwischen den Symmetrieeigenschaften und den auftretenden Potenzen von x im Funktionsterm. Formulieren Sie entsprechende Regeln, indem Sie die folgenden Sätze vervollständigen.

Eine ganzrationale Funktion ist achsensymmetrisch zur y-Achse, wenn alle Potenzen von x _____ sind. (Ein Summand der Form $kx^0 = k$ zählt zu den geraden Potenzen von x.)

_____ ist punktsymmetrisch, wenn alle Potenzen von x _____ sind.

Eine ganzrationale Funktion hat bezüglich der x-Achse und des Ursprungs Symmetrieeigenschaften, wenn _____ und _____ auftreten.

b) Weisen Sie _____ der Funktionen aus Aufgabe 7.1 _____ zu.

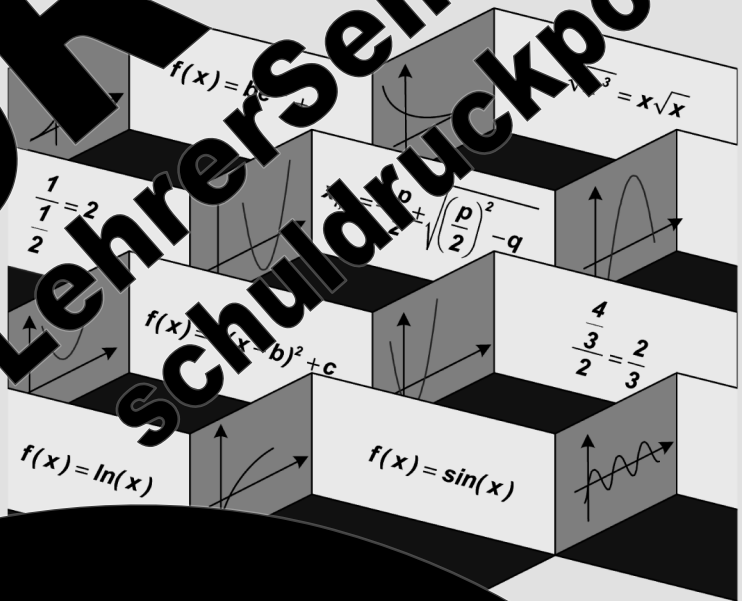
Raum für Rechnungen:

Raum für Rechnungen:



Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Grundlegende zu Algebra und Funktionen selbstorganisiert erlernen



Kapitel Die Umkehrfunktion



Kapitel 8: Umkehrfunktionen

Aufgabe 8.1

Grundlegendes zu Umkehrfunktionen

In Ihrem bisherigen Mathematikunterricht haben Sie beim Lösen von Gleichungen und bei der Berechnung von Winkeln, ohne dass hier die Begriffe Funktion und Umkehrfunktion verwendet wurden, bereits eine wichtige Eigenschaft über Funktionen und deren möglichen Umkehrfunktionen kennengelernt. Arbeiten Sie alle Beispiele durch, und ergänzen Sie bei fehlenden Angaben.

Beispiel 1:

Lösen Sie die beiden Gleichungen in x algebraisch. Die vollständigen Lösungen folgen dem Text:

$$x^2 = 4$$

$$\sqrt{x-4} =$$

Um die quadratische Gleichung zu lösen, muss man _____ und um die

Wurzelgleichung zu lösen, muss man _____

Durch Quadrieren eines Ausdrucks der Form $\sqrt{\quad}$ wird die Wurzel „vernichtet“, und durch das Ziehen der

Wurzel aus einem Ausdruck a^2 fällt das Quadrat weg. Die Operationen Quadrieren und Wurzelziehen

heben sich also gegenseitig auf und werden daher auch als Umkehroperationen bezeichnet.

Beispiel 2:

Für die Gleichung $\tan(\alpha) = m$ wird der folgende Ansatz verwendet:

$\tan^{-1}$ ist die Umkehroperation zu $\tan$.

$$\tan^{-1}(\tan(\alpha)) = \alpha$$

$$\alpha = \tan^{-1}(m)$$

Info: $\tan^{-1}$ wird auch als **arctan** (sprich arcus-tangens) bezeichnet.

Aufgabe 8.2

Zusammenhang zwischen Funktion und ihrer Umkehrfunktion

Überlegen Sie sich die Zusammenhänge von Beispiel 1 und Beispiel 2 unter funktionentheoretischen Gesichtspunkt, so dass die Begriffe Operation und Umkehroperation auf die Begriffe **Funktion** und **Umkehrfunktion** übertragen werden können. In der Tabelle auf der folgenden Seite sind die einfachen Funktionen und ihre zugehörigen Umkehrfunktionen angegeben. Verdeutlichen Sie sich an den Beispielen die Zusammenhänge, und ergänzen Sie dann in der Tabelle die fehlenden Angaben.

Kapitel 1	
Brüche, Potenzen, Wurzeln und Binome	9
Kapitel 2	
Grundlegendes zu Gleichungen	59
Kapitel 3	
Lineare Funktionen	63
Kapitel 4	
Quadratische und biquadratische Gleichungen und Ungleichungen	77
Kapitel 5	
Ganzrationale Funktion 2. Grades	87
Kapitel 6	
Gleichungen 3. und höherer Grades	104
Kapitel 7	
Ganzrationale Funktionen 2. und höherer Grades	115
Kapitel 8	
Die Umkehrfunktion	127
Kapitel 9	
Trigonometrische Funktionen	135
Kapitel 10	
Exponential- und Logarithmusfunktionen	145
Kapitel 11	
Vertiefende Betrachtungen zu Betragsungleichungen	169

Gesamtwortmarkenrecht zu Algebra und Funktionen erlernen

(Bestandteile)

Sie

alle Rechte vorbehalten. All rights reserved.

Druck, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,

aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

LehrerselbstVerlag

LehrerselbstVerlag GmbH, Koblenz (Germany)

www.f-druck.de

www.f-druck.de

Bei Betrachtungen zu Umkehrfunktionen muss meist ein Definitionsbereich angegeben werden. Bei der Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ sind beispielsweise keine negativen Zahlen erlaubt, da man im Zahlenbereich der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ einer negativen Zahl keine Quadratwurzel ziehen kann.

Funktion	Umkehrfunktion	Anwenden der Umkehrfunktion auf die Funktion	Definitionsbereiche
$f(x) = x^2$	$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$	$f^{-1}(f(x)) = \sqrt{x^2} = x$	$\mathbb{R}_0^+$

Erinnerung:
Der Ausdruck, welcher bei der Funktionsschreibweise in der Klammer steht, hier das x , wird als **Argument** der Funktion bezeichnet.

Argument

Argument x wird der zugehörige Funktionsterm (hier: x^2) eingesetzt.

Für f^{-1} wird der zugehörige Funktionsterm (hier: $\sqrt{}$) eingesetzt.

$f(x) = \sqrt{x}$	$f^{-1}(x) = x^2$	$f^{-1}(f(x)) = \sqrt{x} = x$	$\mathbb{R}_0^+$
$f(x) = \tan(x)$	$f^{-1}(x) = \tan^{-1}(x)$	$f^{-1}(f(x)) = \tan^{-1}(\tan(x)) = x$	$x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
$f(x) = \sin(x)$	$f^{-1}(x) = \sin^{-1}(x)$	$f^{-1}(f(x)) = \sin^{-1}(\sin(x)) = x$	$x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
$f(x) = x^3$	$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$	$f^{-1}(f(x)) = \sqrt[3]{x^3} = x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos(x)$	$f^{-1}(x) = \cos^{-1}(x)$	$f^{-1}(f(x)) = \cos^{-1}(\cos(x)) = x$	$x \in [0; \pi]$
$f(x) = \ln(x)$	$f^{-1}(x) = e^x$	$f^{-1}(f(x)) = \ln(e^x) = x$	$x \in \mathbb{R}$

Die Funktion und ihrer Umkehrfunktion gilt der Zusammenhang. Vervollständigen

endet man die Umkehrfunktion auf ihre zugehörige Funktion an, so erhält man das
Formelmäßig gilt: $f^{-1}(f(x)) = x$

Verdeutlichen Sie mit Beispielen, dass auch die Umkehrfunktion des Satzes gilt und ergänzen Sie

Bsp.: $f(x) = 2x + 3$ $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$

Wenn man die Funktion auf ihre zugehörige Umkehrfunktion an, so erhält man das
der Umkehrfunktion. Formelmäßig gilt: $f(f^{-1}(x)) = x$

Aufgabe 8.3

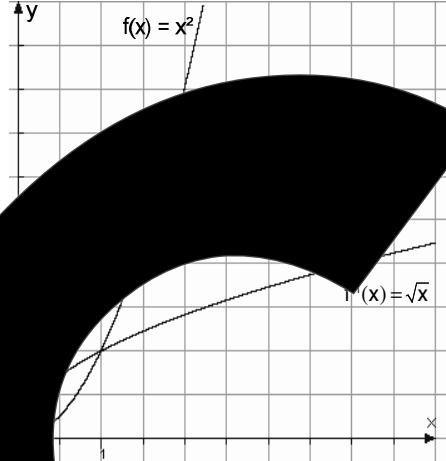
Zusammenhang zwischen den Graphen von Funktion und Umkehrfunktion

Im Folgenden sollen nun anhand der Potenzfunktionen $f(x) = x^2$ sowie $f(x) = x^3$ und zugehörigen Wurzelfunktionen weitere Zusammenhänge zwischen Funktion und Umkehrfunktion erarbeitet und formuliert werden.

a) Füllen Sie die beiden Wertetabellen aus, und beschreiben Sie, welcher Zusammenhang zwischen den Argumenten von Funktion und Umkehrfunktion und den zugehörigen Funktionswerten besteht.

Funktion		Umkehrfunktion	
x	f(x) = x^2	x	f^{-1}(x) = \sqrt{x}
0	0	0	0
0,5	0,25	0,25	0,5
1	1	1	1
1,5	2,25	2,25	1,5
2	4	4	2
2,5	6,25	6,25	2,5

b) Zeichnen Sie in ein Koordinatensystem die quadratische Funktion und als Umkehrfunktion die Wurzelfunktion. Welchen Zusammenhang zwischen den beiden Funktionen besteht? Formulieren Sie diesen Zusammenhang, und formulieren Sie dabei, wie man mithilfe von rein graphischen Mitteln die Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ ermitteln kann.



c) Die in Aufgabenteil a) und b) erarbeiteten Zusammenhänge sollen nun auf die Funktion $f(x) = x^3$ und die zugehörige Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ übertragen werden. Verdeutlichen Sie sich anhand der Wertetabelle auch hier den Zusammenhang zwischen den Argumenten und den Funktionswerten, indem Sie die fehlenden Werte ergänzen.

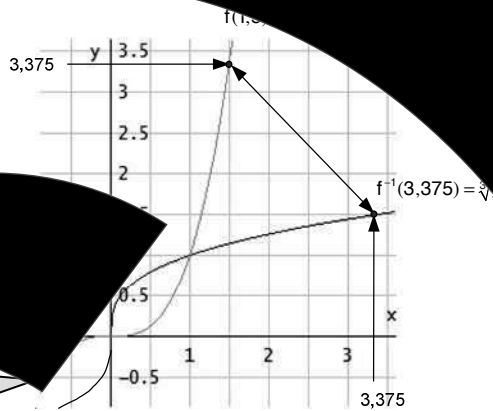
Potenzieren

Argument x der Funktion	Funktionswert f(x)
x	$f(x) = x^3$
-2	-8
-1,5	-3,375
-1	-1
0	0
1	1
2	8
Funktionswert der Umkehrfunktion	Argument x der Umkehrfunktion
$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$	x

Radizieren*

*Radizieren bedeutet Wurzel ziehen

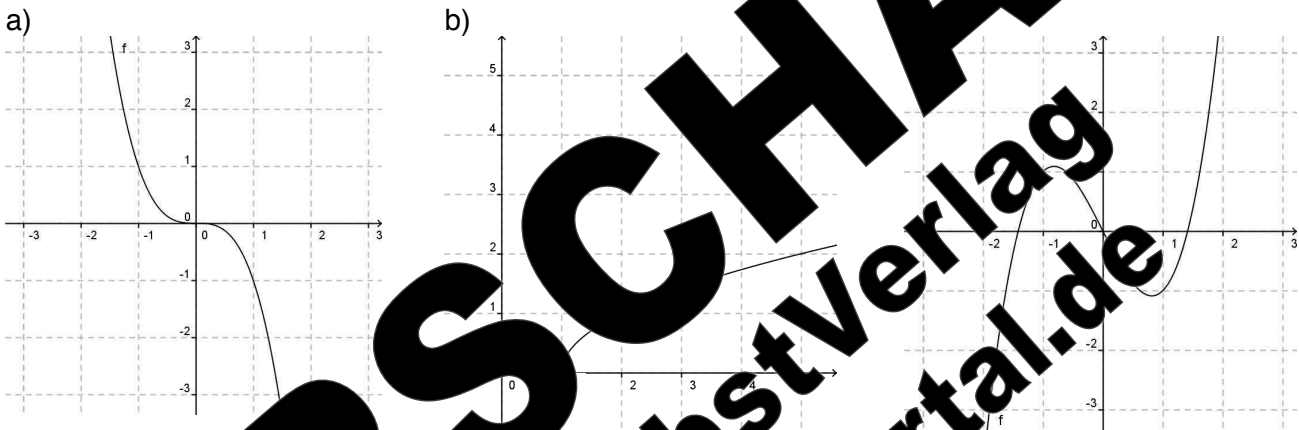
Ergänzen Sie die Wertetabelle und verdeutlichen Sie sich auch anhand der Graphik den Zusammenhang zwischen einer Funktion und ihrer Umkehrfunktion, indem Sie die fehlenden Zahlen eintragen.



Die Umkehrfunktion von $f(x)$ ist auch die Umkehrfunktion von $f^{-1}(x)$.
Wichtig ist, dass die Umkehrfunktion die Umkehrfunktion von $f(x)$ ist.

Aufgabe 8.4

Ergänzen Sie, falls möglich, in den Abbildungen jeweils die Symmetriengerade und eine Stützgerade der Umkehrfunktion zu den dargestellten Funktionen. Begründen Sie dies, indem Sie erläutern, warum der Umkehrfunktionssatz gültig ist.



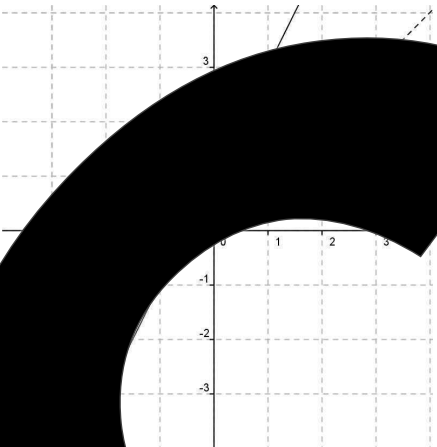
Stetig heißt, dass man beim Zeichnen der Funktion keinen Sprung machen muss. Betrachten Sie im Fall der Umkehrfunktion die Funktion $f^{-1}(x)$.

Wenn man den gesamten Definitionsbereich einer stetigen Funktion betrachtet, dann ist eine Funktion nur umkehrbar, wenn sie in diesem Bereich streng monoton steigt oder fällt.

Streng monoton heißt, dass die Funktion nur fällt oder steigt.

Aufgabe 8.5

Ergänzen Sie die Wertetabelle und verdeutlichen Sie sich auch anhand der Graphik den Zusammenhang zwischen einer Funktion und ihrer Umkehrfunktion, indem Sie die fehlenden Zahlen eintragen. Begründen Sie dies, indem Sie erläutern, warum der Umkehrfunktionssatz gültig ist.



Funktionsterm: $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$

Rechenschritte

Schritt 1:
Ersetzen von $f(x)$ durch y .

Schritt 2:
Gleichung nach x auflösen.

Schritt 3:
Ist das Auflösen nach x gelungen, vertauscht man die Variablen x und y .

Schritt 4:
Man ersetzt y durch $f^{-1}(x)$ und erhält so die Umkehrfunktion zu f .

$$f(x) = 2x + 1$$
$$y = 2x + 1$$
$$-2x = -y + 1$$
$$x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$$
$$x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$$
$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

Zusatzinfo:
Sollte die Gleichung nicht nach x auflösen lassen, so existiert die Umkehrfunktion keine Umkehrfunktion.

Übungen
(Raum für Rechnungen auf den Folgeseiten)

Übung 8.1
Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$. Skizzieren Sie die Funktion in ein geeignetes Koordinatensystem. Bestimmen Sie, wie im Bild, die Umkehrfunktion $g^{-1}(x)$ auf graphischem und rechnerischem Weg. Begründen Sie anhand des Funktionswertes, dass $f(g^{-1}(b)) = b$ und $g^{-1}(f(a)) = a$.

Übung 8.2
Bestimmen Sie die Umkehrfunktion $g^{-1}(x)$ rechnerischem Weg.
a) $f(x) = 2x + 1$, $x \geq 0$ c) $f(x) = 2x^3$

Übung 8.3
In Abbildung 8.3 ist die Funktion $f(x) = x^3 - 2x$ abgebildet. Anhand von graphischen Überlegungen hat man bereits erkannt, dass keine Umkehrfunktion existiert. Zeigen Sie nun analytisch, dass die Umkehrfunktion nicht ermittelbar ist.





Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Grundlegende zu Algebra und Funktionen selbstorganisiert erlernen



Kapitel

Trigonometrische Funktionen

Kapitel 1	
Brüche, Potenzen, Wurzeln und Binome	9
Kapitel 2	
Grundlegendes zu Gleichungen	59
Kapitel 3	
Lineare Funktionen	63
Kapitel 4	
Quadratische und biquadratische Gleichungen und Ungleichungen	77
Kapitel 5	
Ganzrationale Funktion 2. Grades	87
Kapitel 6	
Gleichungen 3. und höherer Grades	104
Kapitel 7	
Ganzrationale Funktionen 2. Grades	115
Kapitel 8	
Die Hyperbelfunktion	127
Kapitel 9	
Trigonometrische Funktionen	135
Kapitel 10	
Exponential- und Logarithmusfunktionen	145
Kapitel 11	
Vertiefende Betrachtung von Betragsungleichungen	169

Gesamtwortmarken zu Algebra und Funktionen ... erlernen
(Bestandteile des ...)
... vorbehalten. All rights reserved.
... auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
... aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet
SelbstVerlag
... & Freunde GmbH, Koblenz (Germany)
Lehrerselbstverlag.de
www.f-druck.de

Kapitel 9: Trigonometrische Funktionen

Sie haben bisher die Begriffe Sinus ($\sin \alpha$), Cosinus ($\cos \alpha$) und Tangens ($\tan \alpha$) in Verbindung mit der Berechnung von Winkeln und Seitenlängen im rechtwinkligen Dreieck kennen gelernt. Falls Ihnen alle Zusammenhänge im rechtwinkligen Dreieck geläufig sind, können Sie die Aufgabe 9.1 überspringen.

Aufgabe 9.1

Winkel und Seitenlängen im rechtwinkligen Dreieck

Definition der Winkelfunktionen

Entnehmen Sie aus der Abbildung rechts Fachbegriffe, und ergänzen Sie:

Die Seite, die dem rechten Winkel gegenüberliegt, nennt man

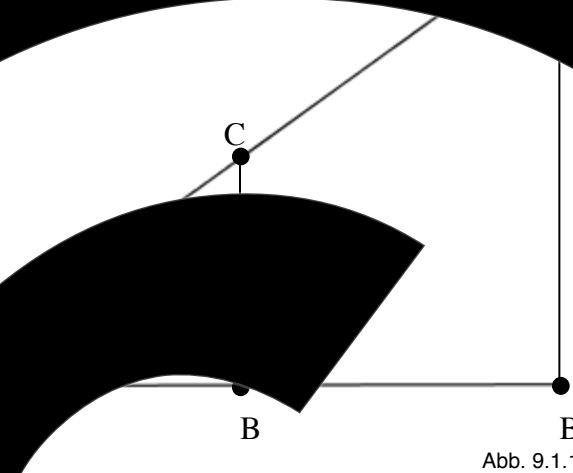
Die Seite, die dem Winkel α gegenüberliegt, nennt man

Die Seite, die dem Winkel α anliegt, nennt man



- a) Ordnen Sie den angegebenen Seiten anhand der Dreiecke ABC und AB'C' bezüglich des Winkels α die die Begriffe Hypothese, Ankathete und Gegenkathete zu

B: _____
AB: _____
AC': _____
B'C': _____



b) Ermitteln Sie durch Messung aus der Abb. 9.1.1 den Winkel α und die angegebenen Seitenlängen so genau wie möglich.

$\alpha =$ _____ $\overline{AB} =$ _____ $\overline{AB'} =$ _____ $\overline{AC} =$ _____ $\overline{AC'} =$ _____ $\overline{BC} =$ _____

Berechnen Sie die angegebenen Seitenverhältnisse und jeweils die Werte von $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ und $\tan(\alpha)$ auf zwei Dezimalstellen gerundet. Achten Sie dabei darauf, dass Taschenrechner bei der Eingabe von Gradmaßen die Einstellung „deg“ haben muss.

- (1)

$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{AC'}} = \sin(\alpha) =$
- (2)

$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}} = \cos(\alpha) =$
- (3)

$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{AB'}} = \tan(\alpha) =$

Vergleichen Sie die Ergebnisse aus den Berechnungen der Seitenverhältnisse in (1), (2) und (3) mit den entsprechenden Werten von $\sin$, $\cos$ und $\tan$. Was stellen Sie fest?

Sie haben vorher erkannt, dass die berechneten Längenverhältnisse in (1), (2) und (3) mit den Werten von $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ und $\tan(\alpha)$ übereinstimmen. Ändert sich der Winkel α so verändern sich auch diese Längenverhältnisse und damit die Werte von $\sin(\alpha)$ bzw. $\cos(\alpha)$ und $\tan(\alpha)$. Diese Abhängigkeit der Längenverhältnisse vom Winkel α interpretiert man als funktionalen Zusammenhang und bezeichnet $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ und $\tan(\alpha)$ als **Winkelfunktionen**.

Dem Verhältnis von
Gegenkathete zu
Hypotenuse ordnet man den
Sinus des Winkels α zu.

$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete (von } \alpha \text{)}}{\text{Hypotenuse (von } \alpha \text{)}}$

Dem Verhältnis von
Ankathete zu
Hypotenuse ordnet man den
Cosinus des Winkels α zu.

$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete (von } \alpha \text{)}}{\text{Hypotenuse (von } \alpha \text{)}}$

Dem Verhältnis von
Gegenkathete zu **Ankathete**
ordnet man den **Tangens** des
Winkels α zu.

$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete (von } \alpha \text{)}}{\text{Ankathete (von } \alpha \text{)}}$

Aufgabe 9.1:
Die folgenden, häufig verwendeten Zusammenhänge zwischen $\sin$, $\cos$ und $\tan$ können Sie in jedem Tafelwerk nachschlagen. Zur Verständlichkeit der Betrachtungen werden die Funktionen jeweils anfalls angegeben.

$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Pythagoras
 $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$
 $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$

$\sin(-x) = -\sin(x)$
 $\cos(-x) = \cos(x)$
 $\tan(-x) = -\tan(x)$

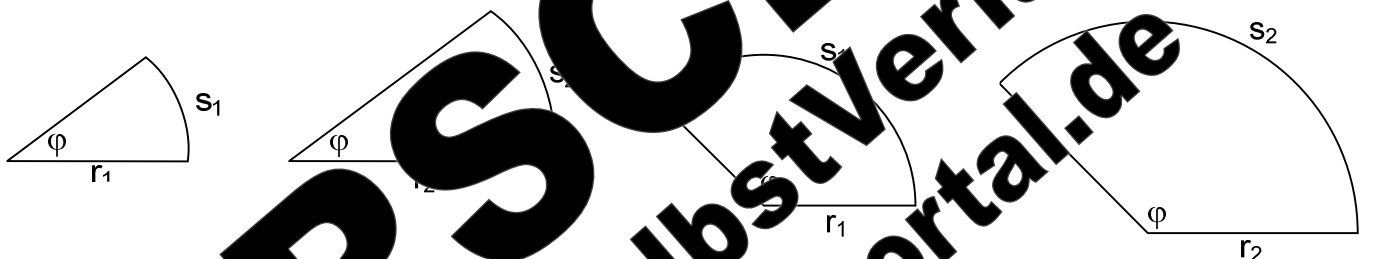
$\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
 $\cos(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

Aufgabe 9.2

Bogenlänge, Grad- und Bogenmaß

Bei der Anwendung von Sinus, Cosinus und Tangens in Wissenschaft und Technik erfolgt die Winkelangabe meist nicht mithilfe des Gradmaßes, sondern über das **Bogenmaß**. Was man unter dem Bogenmaß eines Winkels versteht, soll anhand der folgenden Aufgaben klargestellt werden.

Verdeutlichen Sie sich anhand der im Folgenden abgebildeten Segmente, wie die Bogenlänge, die hier mit s bezeichnet wird, vom Winkel φ und dem Radius r abhängt und ergänzen Sie den nachfolgenden Text.



Es gilt:
Je größer der Winkel φ , desto _____ der Bogen.
Je größer der Radius r , desto _____ der Bogen.
Sie wissen bereits, dass man beim Vollkreis den Umfang bzw. die Bogenlänge s mit der Formel $s = 2\pi r$ berechnen kann. Ausgehend vom Vollkreis kann man auf die Bogenlänge bei einem Kreissegment schließen. Ergänzen Sie in der folgenden Tabelle fehlende Berechnungen für die Bogenlänge zu den gegebenen Winkeln, sowie das Verhältnis Bogenlänge s zu Radius r .

Winkel im Kreissegment	360°	270°	180°	90°	1°	30°	60°	45°
Bogenlänge s					$\frac{\pi r}{180}$			
Verhältnis $\frac{s}{r}$ (Bogenmaß)	2π	$\frac{3\pi}{2}$						

Jeder Angabe im Winkelmaß mit Gradangabe kann man eine Angabe im Bogenmaß zuordnen, die den Wert π enthält. Die Beziehungen zwischen Bogenmaß und Winkelmaß lauten:

Winkel α in Gradmaß in Bogenmaß umrechnen: $\alpha = \frac{x \cdot \pi}{180}$

Winkel α in Bogenmaß in Gradmaß umrechnen: $\alpha = x \cdot 180$

Einheit im Bogenmaß: **rad**

Einheit im Gradmaß: **deg**

Aufgabe 9.3

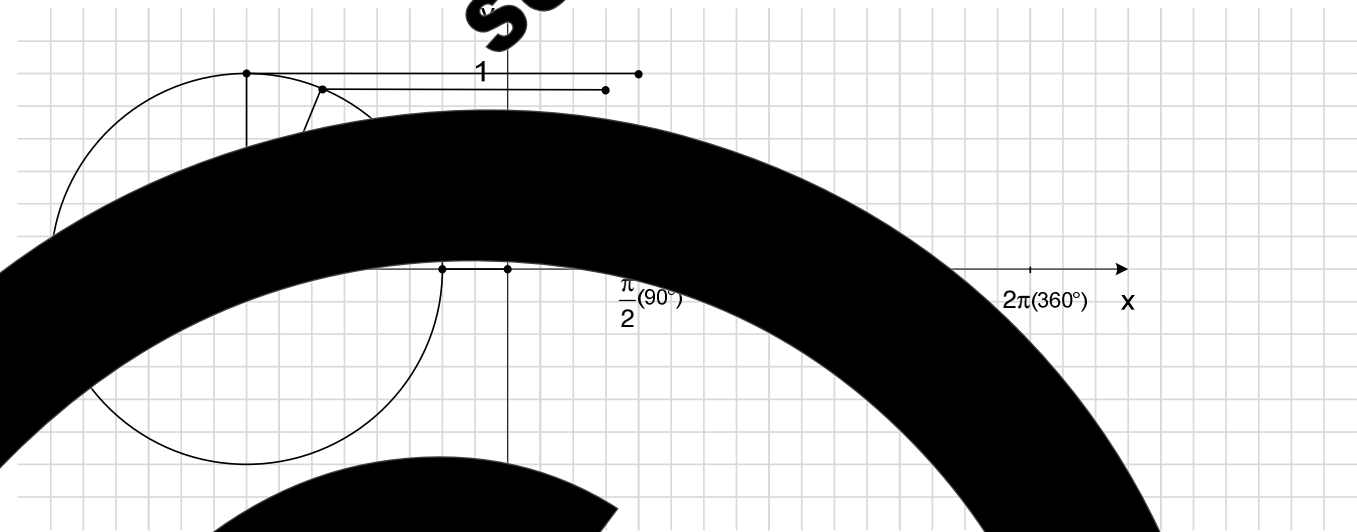
Die Sinusfunktion

In Naturwissenschaft, Technik und anderen Anwendungsgebieten, in denen periodische Schwingungen und Wellen auftreten, ist der funktionale Charakter des Sinus die Grundlage für die formelmäßige Beschreibung der Zusammenhänge. Die Funktionswerte dieser Sinusfunktion $f(x) = \sin x$ erhält man mit dem Taschenrechner, indem man für x entweder im Grad- oder Bogenmaß den Wert eines Winkel eingibt. Ergänzen Sie die folgende Tabelle, indem Sie Sinusfunktionswerte mit dem Taschenrechner erzeugen. Achten Sie dabei auf die Einheiten „Grad“ oder „Rad“.

x	0°	30° oder $\frac{\pi}{6}$	45° oder $\frac{\pi}{4}$	60° oder $\frac{\pi}{3}$	90° oder $\frac{\pi}{2}$
$f(x) = \sin(x)$					

Diese Werte treten in vielen Zusammenhängen häufig auf. Sie sind auch die Werte, wenn man sich das Einheitskreis anschaut.

Den Funktionsgraphen der Sinusfunktion kann man mithilfe des Einheitskreises (Kreis mit Radius 1) auf graphischen Weise ohne Wertetabelle erzeugen. Verdeutlichen Sie sich, wie die Koordinaten der Punkte rechts von der y-Achse erzeugt werden, und tragen Sie, entsprechend zu diesen Punkten, alle weiteren Punkte für den Vollkreis ein. Verbinden Sie anschließend alle Punkte zu einem Graphen.



Der hier gezeichnete Graph ist die Sinusfunktion $f(x) = \sin(x)$ bezeichnet.

Aufgabe 9.4

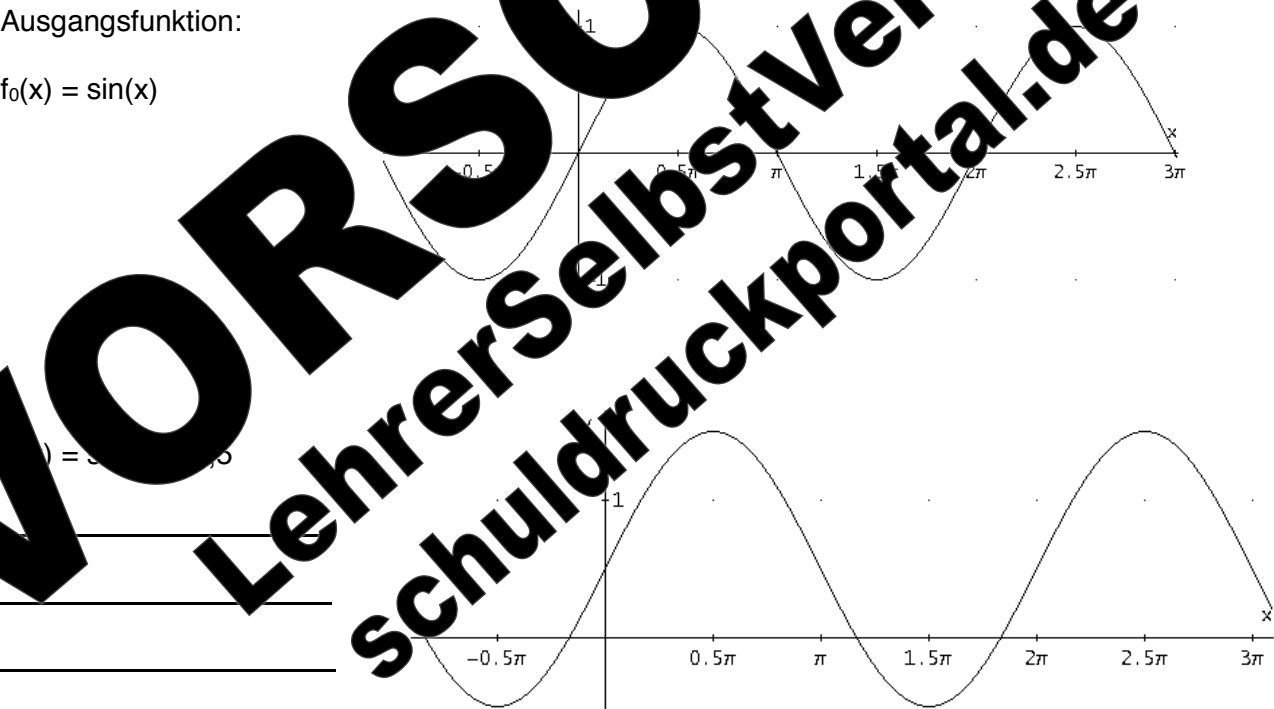
Verschieben, Strecken und Stauchen der Sinusfunktion

In den wenigsten Anwendungen tritt die Sinusfunktion in der Form $f(x) = \sin(x)$ auf. Wie bei den Parabeln kann die Sinusfunktion verschoben, gestaucht oder gestreckt sein. Diese Veränderungen, die Sie im Kapitel 5 Aufgabe 5.2 gelernt haben, können weitgehend auf die Sinusfunktion übertragen werden.

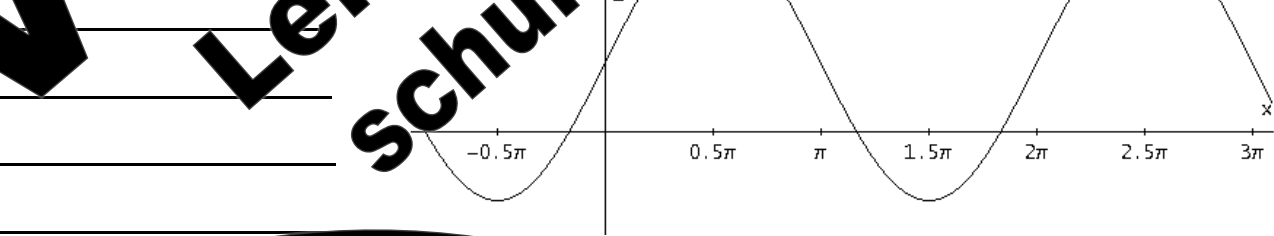
- a) In den Abbildungen unten sind die Funktion $f(x) = \sin(x)$ und die Funktionen $f_1(x)$ bis $f_4(x)$ dargestellt. Untersuchen Sie mithilfe der Abbildungen welche Veränderung die Graphen a, b, c, d auf die Ausgangsfunktion $f_0(x) = \sin(x)$ haben. Nennen Sie die Wirkung jeweils ins Schwere.

Ausgangsfunktion:

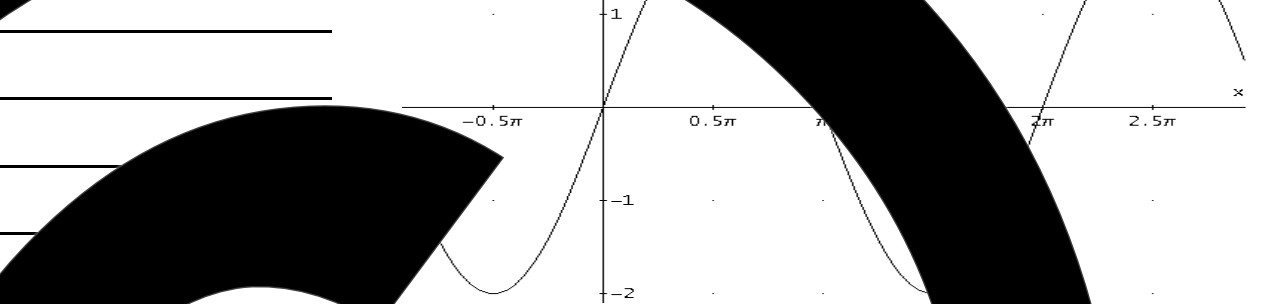
$f_0(x) = \sin(x)$



$f_1(x) = \sin(x)$



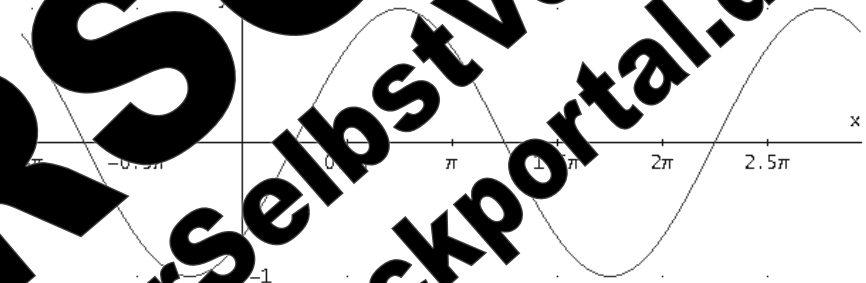
$f_2(x) = \sin(x)$



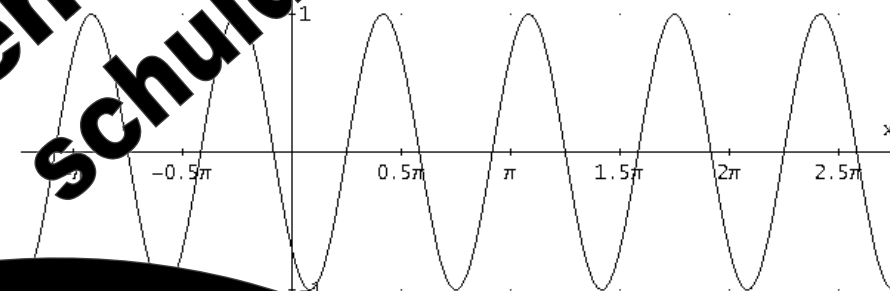
$$f_3(x) = \sin(2x)$$



$$f_4(x) = \sin(x - 0,25\pi)$$



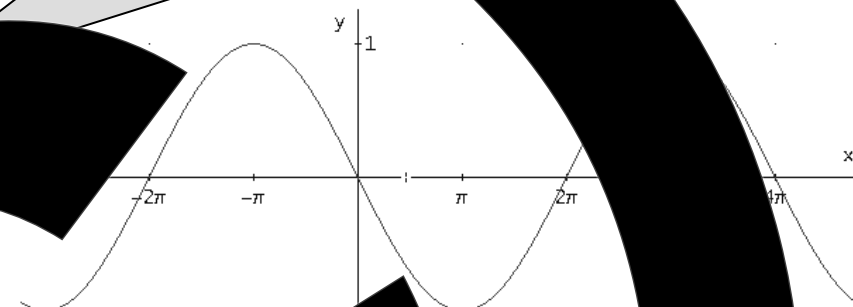
$$f_5(x) = \sin(3(x - 0,25\pi))$$



Um Verschiebungen und Stauchungen des Funktionsgraphen zu erkennen, muss man den Faktor vor dem x ausklammern.

$$f_6(x) = \sin(0,5x - \pi)$$

$$f_6(x) = \sin(0,5x - \pi)$$



- b) Die allgemeine Form der Sinusfunktion kann wie folgt dargestellt werden. Formulieren Sie, welche prinzipielle Wirkung die Parameter a, b, c und d bei der Sinusfunktion haben, indem Sie die Texte in den Sprechblasen ergänzen. Zur Vereinfachung werden für die Parameter a und d nur positive reelle Zahlen betrachtet.

$a \in \mathbb{R}^+$ streckt und staucht die Funktion in ____-Richtung.

$a > 1 \rightarrow$ **strecken**
 $0 < a < 1 \rightarrow$ **stauchen**

Die Streckung bzw.

Stauchung hat _____ Einfluss auf die Lage der Nullstellen.

$$f(x) = a \sin(d(x - b) + c)$$

$d \in \mathbb{R}^+$ streckt und staucht die Funktion in ____-Richtung.

$d > 1 \rightarrow$ **strecken**
 $d < 1 \rightarrow$ **stauchen**

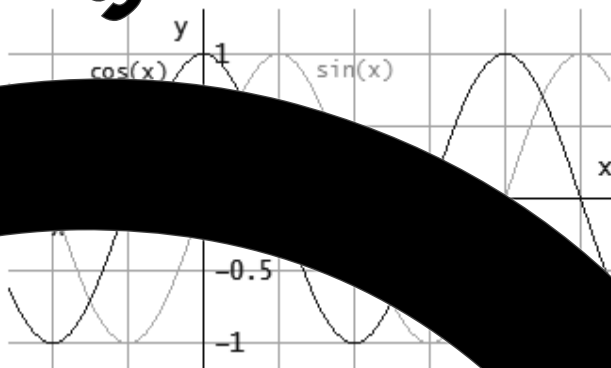
Erklärung: Ein negativer Wert für d spiegelt die Funktion an der y-Achse.

Wie bei Parabeln, verschiebt $c \in \mathbb{R}$ die Funktion in ____-Richtung.

Wie bei Parabeln, verschiebt $b \in \mathbb{R}$ die Funktion in ____-Richtung.

Information 9.2

Alle Betrachtungen zum Verschieben, Strecken und Stauchen der Sinusfunktion $f(x) = \sin(x)$ können auf die Sinusfunktion $f(x) = \cos(x)$ übertragen werden. In der folgenden Abbildung wird deutlich, dass die Cosinusfunktion $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ (vgl. Information 9.1) durch Verschiebung mit $b = -\frac{\pi}{2}$ nach links aus der Sinusfunktion hervorgeht.



Information 9.3

Die Begriffe Sinus und Cosinus sind Funktionsnamen und können in der Anwendung der Sinus- und Cosinusfunktion als Argument getrennt werden. Treten die Begriffe Sinus und Cosinus innerhalb von Brüchen auf, dürfen keine Buchstaben bzw. Variablen nicht kleingeschrieben werden.

falsches Kürzen: $\frac{\sin(x)}{1} \neq \text{six}$ oder $\frac{\cos(\pi)}{1} \neq \cos(\pi)$

ht's
t

Aufgabe 9.5

Bestimmen der **Periodizität p** einer gestreckten bzw. gestauchten Sinusfunktion bzw. Cosinusfunktion.

Zur Information:
Funktionen, die in gleichen Abständen auf der y-Achse die gleichen Funktionswerte haben, nennt man periodische Funktionen mit der Periode p. Formelmäßig drückt man das so aus: $f(x+p) = f(x)$

Wie Sie in Aufgabe 9.4 erkannt haben, beeinflusst der Streck- oder Stauchfaktor d der Funktionsgleichung $f(x) = a \sin(d(x - b)) + c$ die Periodizität einer Sinusfunktion. Überprüfen Sie sich anhand der Funktionen aus Aufgabe 9.4 und den folgenden Beispielen, dass man die Periodizität p einer Sinusfunktion wie folgt berechnen kann. Ergänzen Sie jeweils den Faktor d.

Funktion	Periodizität p der Funktion bestimmen	Faktor d	Periodizität p berechnen
$f_0(x) = \sin(x)$	$p = 2\pi$	1	nicht notwendig
$f_3(x) = \sin(2x)$	$p = \pi$	2	$p = \frac{2\pi}{2} = \pi$
$f_6(x) = \sin(0,5x)$	$p = 4\pi$	0,5	$p = \frac{2\pi}{0,5} = 4\pi$
$f_7(x) = \sin(x - 0,25\pi)$	Kann man nicht genau ablesen	—	$p = \frac{2\pi}{3} \approx 0,67\pi$

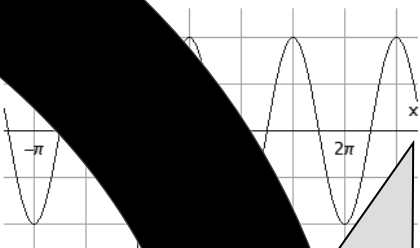
Aufgabe 9.6

Lösen von trigonometrischen Gleichungen

Da das Lösen von trigonometrischen Gleichungen mit der Berechnung von Nullstellen bei Funktionen verbunden ist, werden in diesem Kapitel Beispiele zu dieser Aufgabe gegeben.

Durch Rechnung gezeigt werden, dass die Funktion $f(x) = \sin(2(x - \frac{1}{4}\pi))$ (s. Abbildung rechts) an den Stellen

$$x_n = \frac{\pi}{4} \pm n \cdot \frac{\pi}{2} \text{ mit } n \in \mathbb{N}$$



Info:
Es ist in der Regel günstig, bei trigonometrischen Funktionen die Nullstellen der x-Achse zu bestimmen, die von π ansetzen.

Lösungsweg:

Schritt 1:
Ansatz für die Gleichung

Schritt 2:
Anwenden der Umkehrfunktion, um das Argument zu isolieren. (arcsin oder $\sin^{-1}$)

Schritt 3:
Gleichung nach x auflösen.

Schritt 4:
Periodizität berechnen

Schritt 5:
Weitere Lösungen berechnen. Da die Funktion nicht in y-Richtung verschoben ist, haben alle Nullstellen bei einer Periode von π einen Abstand von $\frac{\pi}{2}$.

$$f(x) = \sin(2(x - \frac{1}{4}\pi)) = 0$$

$$\sin(2(x - \frac{1}{4}\pi)) = \arcsin 0$$

$$2(x - \frac{1}{4}\pi) = 0$$

$$2x - \frac{1}{2}\pi = 0$$

$$2x = \frac{1}{2}\pi$$

$$x = \frac{1}{4}\pi$$

$$\text{Periodizität } p = \frac{2\pi}{d} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$$

$$x_3 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}$$

oder allgemein
$$x_n = \frac{\pi}{4} \pm n \cdot \frac{\pi}{2} \text{ mit } n \in \mathbb{N}$$

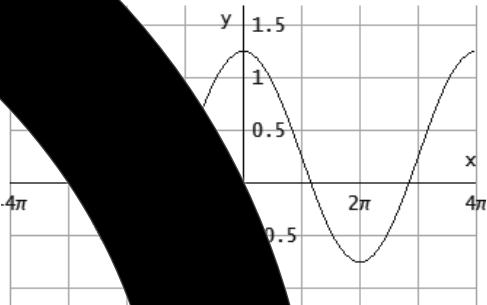
Achtung!
Aufgrund der Periodizität gibt es mehrere Lösungen.

Aufgabe 9.7:

Man kann der Abbildung rechts näherungsweise entnehmen, dass die dargestellte Cosinusfunktion für $x_{1,2} = \pm 1,2\pi$ und $x_{3,4} = \pm 2,8\pi$ Nullstellen hat. Bestimmen Sie die Nullstellen dieser in x-Richtung verschobenen Cosinusfunktion.

Die Nullstellen sollen im Intervall $[-4\pi; 4\pi]$ rechnerisch bestätigt werden.

Überprüfen Sie sich den Lösungsweg auf der folgenden Seite.



Lösungsweg:

Schritt 1:
Ansatz für die Gleichung; alle Summanden ohne x nach rechts bringen.

Schritt 2:
Anwenden der Umkehrfunktion, um das Argument zu isolieren.

Schritt 3:
Gleichung nach x auflösen

Schritt 4:
Periodizität berücksichtigen

Schritt 5:
Weitere Nullstellen berechnen

$f(x) = \cos(0,5x) - 0,25 = 0$

$\cos(0,5x) = 0,25$

$\cos(0,5x) = 0,25 \Rightarrow 0,5x = \arccos(0,25) \approx 1,107$

$x_1 \approx 2,214$

Achtung: Aufgrund der Periodizität gibt es weitere Lösungen.

Periodizität: $p = \frac{2\pi}{d} = \frac{2\pi}{0,5} = 4\pi$

Weitere Nullstellen im Intervall $[-4\pi; 4\pi]$

$x_2 \approx -2,214$

$x_3 \approx -2,214 + 4\pi \approx 10,068$

$x_4 \approx 2,214 - 4\pi \approx -12,676$

Schritt 5:
Weitere Nullstellen berechnen. Da die Funktion in x-Richtung verschoben ist, haben hier jeweils drei aufeinanderfolgende Nullstellen nicht den gleichen Abstand (vgl. Abb. Bsp. 2). Aus dem Funktionsterm erkennt man, dass die Cosinusfunktion nicht in x-Richtung verschoben ist. Damit liegt, aus Symmetriegründen, zu $x_1 = 2,214$ eine zweite Nullstelle bei $x_2 = -2,214$. Die weiteren Nullstellen ergeben sich aus der Periodizität der Cosinusfunktion.

Information 9.4

Wie Sie sicher erkennen, sind die trigonometrischen Gleichungen der Form $\cos(ax+b) = c$ oder $\sin(ax+b) = c$ zu lösen. Die Umkehrfunktion muss hier angewendet werden. Weitere Lösungen müssen ggf. durch die Periodizität der Funktionen gefunden werden. Es ist wichtig, die Symmetrieeigenschaften, Streckung, Verschiebung und die Periodizität der Funktionen zu berücksichtigen.

Ergebnisse:

Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Grundlegende zu Algebra und Funktionen selbstorganisiert erlernen



Kapitel Exponential- und Logarithmusfunktionen

Kapitel 10: Exponential- und Logarithmusfunktionen

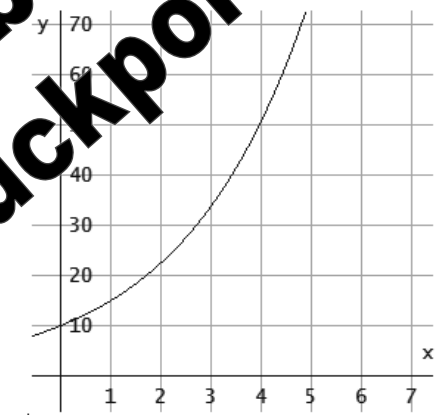
Da viele Zu- und Abnahmeprozesse in Natur und Technik nicht linear, sondern quadratisch oder exponentiell zu- und abnehmen, spielen Funktionen, die diese Prozesse beschreiben, in der angewandten Mathematik eine zentrale Rolle. Beispielhaft sind hier die Zunahme einer Population, die Abnahme der Konzentration eines Medikamentes im Blut oder auch die Abnahme der Menge eines radioaktiven Stoffes. In den beiden folgenden Aufgaben wird jeweils an einem Beispiel die Herleitung einer Funktionsgleichung für einen Wachstums- und Abnahmeprozess erarbeitet.

Aufgabe 10.1

Exponentielles Wachstum

Durch den weltweiten Handel mit Pflanzen werden aus immer weiteren Pflanzenschaublätern in Regionen eingeschleppt, in denen ein Schädling keine natürlichen Feinde hat und sich unkontrolliert ausbreiten kann. Ein solcher Schädling wächst exponentiell und hat sich auf einer Fläche von 10 km^2 ausgebreitet. Um das Ausbreitungsverhalten einschätzen zu können, wird die Ausbreitungsfläche monatlich neu vermessen. Die Messwerte werden in einer Tabelle registriert und in einem Diagramm dargestellt.

Zeit t in Monate	Fläche A_t in km^2
0	$A_0 = 10$
1	$A_1 = 15$
2	$A_2 = 22,5$
3	$A_3 = 33,7$
4	$A_4 = 50,625$
5	$A_5 =$
6	$A_6 =$



a) Ermitteln Sie die Ergebnisse der folgenden Quotienten.

$$\frac{A_1}{A_0} = \frac{15}{10} = \quad \quad \quad \frac{A_3}{A_2} = \frac{33,7}{22,5} = \quad \quad \quad \frac{A_4}{A_3} = \frac{50,625}{33,7} =$$

Information:

Es liegt **exponentielles Wachstum** vor, wenn der Quotient $\frac{A_{n+1}}{A_n}$ von zwei aufeinander folgenden Messwerten konstant und größer als 1 ist.

b) Überprüfen Sie die Messwerte, dass dieser Wachstumsprozess mit der Funktion $f(t) = 10 \cdot 1,5^t$ beschrieben werden kann. Ermitteln Sie mithilfe der Funktionsgleichung die Fläche nach 5 Monaten.

Hinweis:

Die Variable x oder hier t steht im Exponenten. Daher stammt auch der Name **Exponentialfunktion**.

$$f(5) = 10 \cdot 1,5^5 =$$

$$f(6) = 10 \cdot 1,5^6 =$$

Kapitel 1	Brüche, Potenzen, Wurzeln und Binome	9
Kapitel 2	Grundlegendes zu Gleichungen	59
Kapitel 3	Lineare Funktionen	63
Kapitel 4	Quadratische und biquadratische Gleichungen und Ungleichungen	77
Kapitel 5	Ganzrationale Funktion 2. Grades	87
Kapitel 6	Gleichungen 3. und höherer Grades	104
Kapitel 7	Ganzrationale Funktionen 2. und höherer Grades	115
Kapitel 8	Die Hyperbelfunktion	127
Kapitel 9	Trigonometrische Funktionen	135
Kapitel 10	Exponential- und Logarithmusfunktionen	145
Kapitel 11	Vertiefende Betrachtungen zu Betragsungleichungen	169

Gesamtwortzahl: 1.200 Wörter zu Algebra und Funktionen. Dieses Buch ist als Lernhilfe konzipiert und soll das Erlernen von Mathematik erleichtern.

(Bestandteile des Buchs)

Siehe auch:

Alle Rechte vorbehalten. All rights reserved.

Das Werk, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte, die aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Alle Rechte vorbehalten.

LehrerselbstVerlag

LehrerselbstVerlag & Freunde GmbH, Koblenz (Germany)

www.lehrerselbstverlag.de

www.f-druck.de

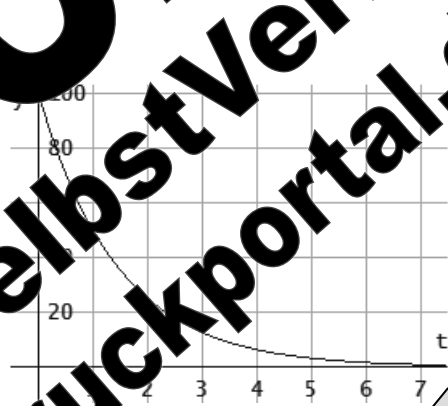
Aufgabe 10.2

Exponentielle Abnahme – Zerfallsprozesse

Radioaktives Jod 131 entsteht in Kernkraftwerken und kann bei Reaktorunfällen in die Umwelt gelangen. Nach dem Supergau in Tschernobyl wurden in einigen Gebieten in Deutschland die Böden mit diesem radioaktiven Jod so stark belastet, dass beispielsweise frisches Gemüse verkauft werden durfte und Sandkästen auf Spielplätzen für die Kinder gesperrt wurden. Radioaktives Jod hat die Eigenschaft, dass nach etwa einer Woche jeweils die Hälfte des Strahlers zerfällt, d.h. dass sich das Jod in das Edelgas Xenon umgewandelt hat.

- a) Ergänzen Sie die Wertetabelle für eine Ausgangsmenge $m_0 = 100$ kg radioaktives Jod 131 und überprüfen Sie die Richtigkeit ihrer Werte anhand des Graphen.

Zeit t in Wochen	Menge m in kg
0	$m_0 = 100$
1	$m_1 =$
2	$m_2 =$
3	$m_3 =$
4	$m_4 =$
5	$m_5 =$
6	$m_6 =$



Ergänzende Info:
Der Graph dieser Exponentialfunktion nähert sich der x-Achse nur an. Die Funktionswerte können den Wert 0 nicht annehmen und auch nicht negativ werden.

- b) Ermitteln Sie die Ergebnisse der folgenden Quotienten.

$$\frac{m_1}{m_0} = \frac{m_2}{m_1} = \frac{m_3}{m_2} = \frac{m_4}{m_3} = \frac{m_5}{m_4} = \frac{m_6}{m_5} =$$

Es liegt eine **exponentielle Abnahme** vor, da der Quotient **von zwei aufeinanderfolgenden Messewerten konstant** ist und **kleiner als 1** liegt.

- c) Überprüfen Sie die Ergebnisse, indem Sie die Werte in die Funktion $f(t) = 100 \cdot 0,5^t$ einsetzen. Berechnen Sie mithilfe der Funktion $f(t)$, dass nach 12 Wochen von der ursprünglichen Menge noch weniger als 30g, nur noch weniger als 1g Jod vorhanden sind und zumindest durch Jod keine erhebliche Gefahr für die Bevölkerung gegeben war. (Nach dieser Zeit wurden auch die Spielplätze wieder freigegeben.)

$$0,5^{12} =$$

Aufgabe 10.3

Vergleich von linearem, quadratischem und exponentiellem Wachstum

Die drei Abbildungen zeigen im gleichen Ausschnitt des Koordinatensystems beispielhaft den Verlauf von Funktionen, die im ersten Quadranten linear, quadratisch und exponentiell wachsen. Vergleichen Sie rein qualitativ anhand der drei folgenden Abbildungen das lineare, quadratische und exponentielle Wachstum.



In der ersten Abbildung ist $f(x) = 2x$ für $x \in [0; 2]$ dargestellt. Bei $x = 2$ ist das Wachstum, also der Zuwachs der Funktionswerte, am größten. In der zweiten Abbildung ist $f(x) = x^2$ für $x \in [0; 2]$ dargestellt. Bei $x = 2$ ist das Wachstum, also der Zuwachs der Funktionswerte, am größten. In der dritten Abbildung ist $f(x) = 2^x$ für $x \in [0; 2]$ dargestellt. Bei $x = 2$ ist das Wachstum, also der Zuwachs der Funktionswerte, am größten. Betrachtet man jedoch die Funktionswerte beispielsweise an der Stelle $x = 8$, so erkennt man, dass der Zuwachs bei der Exponentialfunktion am kleinsten und bei der Quadratischen am größten ist.

Anmerkung:
Tatsächlich wächst eine Exponentialfunktion schneller als jede Potenzfunktion.

Aufgabe 10.4

Exponentialfunktionen

Die Zusammenhänge und Eigenschaften von Exponentialfunktionen der Form $f(x) = a \cdot b^x$ sind bereits bekannt. Wenn man nun die Umkehrfunktion zur Umkehrfunktion bei diesem Funktionsverlauf wissen bereits, dass man beispielsweise bei Gleichungen der Form $x^2 = 9$ die Umkehrfunktion verwenden muss, um die Gleichung nach x aufzulösen. (Vgl. Aufgabe 8.1). Überträgt man diese Überlegung auf eine Gleichung der Form $a \cdot b^x = c$, stellt sich die Frage, mit welcher Umkehrfunktion man die Gleichung nach x auflösen kann, also wie man das x aus der Gleichung herausbekommt.

Diese Problemstellung wird bei den beiden Funktionen $f(x) = 10^x$ und $g(x) = \log_{10}(x)$ bearbeitet werden.

Information:
Die Zahl e wird als **Eulersche Zahl** bezeichnet. Man kann den Zahlenwert von e berechnen, indem man auf dem Taschenrechner die Taste e^x verwendet und x den Wert 1 eingibt. Man erhält: $e = 2,71...$
Die Funktion $f(x) = e^x$ nimmt in der höheren Mathematik eine zentrale Rolle ein und wird aus der Differentialrechnung bis zur Wahrscheinlichkeitsrechnung verwendet.

a) Die Exponentialfunktion $f(x) = 10^x$ und ihre Umkehrfunktion

- i) Füllen Sie mithilfe des Taschenrechners die Wertetabelle von links nach rechts in die Spalte „Potenzieren“ auf vier Dezimalstellen genau aus, und ordnen Sie die Funktionswerte dem richtigen Graphen zu, indem Sie den passenden Graphen mit $f(x)$ beschriften.
- ii) Suchen Sie auf Ihrem Taschenrechner eine passende Taste, mit der Sie an der rechten Spalte der Wertetabelle die Werte in der linken Spalte erzeugen können. Notieren Sie eine Bezeichnung für die erfolgte Rechenoperation unterhalb der Wertetabelle mit Pfeil, der von rechts nach links zeigt, und geben Sie den Funktionsterm der Umkehrfunktion an.

Potenzieren

Argument der Funktion	Funktionswert der Funktion
x	10^x
–1,5	
–1	
–0,5	
0	
0,5	
1	
1,5	
Funktionswert der Umkehrfunktion	Argument der Umkehrfunktion

Erinnerung:

Zu einer Funktion $f(x)$ erhält man die zugehörige Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$, indem man die Funktion an der 1. Vertikalachse spiegelt. (Vgl. Kapitel 8 Aufgabe 8.3)

Falls Sie die Aufgabenteile i) und ii) richtig bearbeitet haben, konnten Sie erkennen, dass man die Taste **log** auf dem Taschenrechner verwenden muss, um die Werte in der linken Spalte der Wertetabelle zu erhalten. Die Bezeichnung „log“ steht für die mathematische Operation, die als **Logarithmieren** bezeichnet wird. Die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion $f(x) = 10^x$ wird daher als Logarithmusfunktion zur Basis 10 bezeichnet, also $f^{-1}(x) = \log_{10}(x)$.

Die Basis gibt an, welcher Zahlenwert mit welcher Potenz potenziert wurde. Wenn 10 die Basis ist, dann ist der Logarithmus mit einer indizierten 10. Gelegentlich findet man in der Literatur also auch die Bezeichnung „**lg10**“ für den dekadischen Logarithmus.

b) Die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ und ihre Umkehrfunktion

- i) Füllen Sie mithilfe des Taschenrechners die Wertetabelle von links nach rechts in die Spalte „Potenzieren“ auf vier Dezimalstellen genau aus, und ordnen Sie die Funktionswerte dem richtigen Graphen zu, indem Sie den passenden Graphen mit $f(x)$ beschriften.
- ii) Suchen Sie auf Ihrem Taschenrechner eine passende Taste, mit der Sie an der rechten Spalte der Wertetabelle die Werte in der linken Spalte erzeugen können, und geben Sie anhand der Bezeichnung der Taste auf dem Taschenrechner den Funktionsterm der Umkehrfunktion an.

Potenzieren

Argument der Funktion	Funktionswert der Funktion
x	e^x
–1,5	
–1	
–0,5	
0	
0,5	
1	
1,5	
Funktionswert der Umkehrfunktion	Argument der Umkehrfunktion

Logarithmieren

Falls Sie die Aufgabenteile i) und ii) richtig bearbeitet haben, konnten Sie erkennen, dass man die Taste **ln** auf dem Taschenrechner verwenden muss, um aus der rechten Spalte der Wertetabelle die Werte in der linken Spalte zu erhalten. Die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ ist die

Da der Exponentialfunktion eine außerordentliche Bedeutung zukommt, und der Logarithmus deshalb als „**natürlicher Logarithmus**“ oder „**Logarithmus**“ bezeichnet wird, wurde vereinbart, dass man für „**log_e**“ die Abkürzung **ln** verwendet.

Aufgabe 10

Begründen Sie, dass $e^{\ln x} = x$ (Vgl. Kapitel 8 Aufgabe 8.3)

Information 10.1

Regeln zum Umgang mit Exponential- und Logarithmusfunktionen speziell zur Basis e

Da Exponentialfunktionen zur Basis e, wie wir noch sehen werden, beispielsweise hinsichtlich der Differenzial- und Integralrechnung günstige Eigenschaften haben, spielt die Exponentialfunktion, auch einfach **e-Funktion** genannt, in Wissenschaft und Technik eine herausgehobene Rolle. Daher beziehen sich die folgenden Regeln insbesondere auf die Funktionen $f(x) = e^x$ und $f(x) = \ln(x)$. Beweise für die Regeln können in der Fachliteratur nachgelesen werden.

Wichtige Eigenschaften

$f(x) = e^x$
 $f(x) = \ln(x)$
 $f(1) = \ln(1) = \underline{\hspace{2cm}}$
 $f(e) = \ln(e) = \underline{\hspace{2cm}}$
 $f(0) = e^0 = \underline{\hspace{2cm}}$
 $f(\ln(0)) = \underline{\hspace{2cm}}$

Merke:

$e^1 = e$
 $\ln(1) = 0$
 $\ln(e) = 1$

Zusammenhang Funktion und Umkehrfunktion	
	$e^{\ln(x)} = x$

Umgang mit Regeln bei Exponential- und Logarithmgleichungen	
$e^x = a$ $\ln(e^x) = \ln(a)$ $x = \ln(a)$	$a = e^{\ln(a)}$

Eigenschaften bei Logarithmen		
$\ln(a)$	$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$	$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

Aufgabe 10.6

Umrechnen einer Exponentialfunktion mit einer beliebigen Basis b in eine Exponentialfunktion zur Basis e

In Naturwissenschaft und Technik ist es üblich, exponentielle Zusammenhänge mithilfe von Exponentialfunktionen der Form $f(x) = a \cdot b^x$ so umzuformen, dass man eine Funktion zur Basis e erhält. Begründen Sie den Ansatz (1) und erläutern Sie die Umformungsschritte.

Erinnerung:
Exponentialfunktionen mit der Basis e werden in der Regel als **e-Funktion** bezeichnet.

Aufgabenstellung: $f(x) = a \cdot b^x$ so umformen, dass man für $f(x)$ einen veränderten Funktionsterm der Form $f(x) = \dots$ erhält.

- (1) $a \cdot e^{z(x)} = a \cdot b^x$ (1) $\underline{\hspace{2cm}}$
- (2) $e^{z(x)} = b^x$ (1) $\rightarrow$ (2) $\underline{\hspace{2cm}}$
- (3) $\ln(e^{z(x)}) = \ln(b^x)$ (2) $\rightarrow$ (3) $\underline{\hspace{2cm}}$

- (4) $z(x) = x \ln(b)$ (4) $\rightarrow$ (5) $\underline{\hspace{2cm}}$
- (6) $f(x) = a \cdot e^{x \ln(b)}$ (5) $\rightarrow$ (6) $\underline{\hspace{2cm}}$

Einsetzen in den folgenden Zusammenhang ein.

Exponentialfunktion mit beliebiger Basis b in eine e-Funktion umformen.:	$f(x) = a \cdot b^x$	$f(x) = a \cdot e^{x \ln(b)}$
--	----------------------	-------------------------------

Übungen

Ü10.1
Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich, **ohne den Taschenrechner** zu verwenden. Wenden Sie dabei die Potenzgesetze aus Kapitel 1 und die Regeln aus Information 10.1 an. Orientieren Sie sich am Beispiel.

Beispiel:
$$e^{-\frac{1}{2}\ln(a)} = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}\ln(a)}} = \frac{1}{e^{\ln(a)^{\frac{1}{2}}}} = \frac{1}{e^{\ln\sqrt{a}}} = \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$$

Anwendung des Zusammenhangs zwischen Potenzfunktion und Logarithmusfunktion: „e“ und „ln“ heißen sich gegenseitig weg!

- a) $e^{\ln(2)}$ = _____
- b) $e^{\ln(a)}$ = _____
- c) $e^{\ln(1)}$ = _____
- d) $e^{\ln(e)}$ = _____
- e) $e^{-\ln(a)}$ = _____
- f) $e^{\ln(a)^2}$ = _____
- g) $e^{2\ln(3)}$ = _____
- h) $e^{3\ln(e)}$ = _____
- i) $e^{-2\ln(4)}$ = _____
- j) $e^{\ln(e)^2}$ = _____
- k) $e^{\frac{1}{2}\ln(e)}$ = _____
- m) $e^{-\frac{1}{2}\ln(1)}$ = _____
- n) $e^{-\ln(\frac{1}{3})}$ = _____

Lösen Sie die unsortierter Reihenfolge:

1) $\frac{1}{6}, e, e^3, \sqrt{e}, a, \frac{1}{a}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$, ungültiger Ausdruck

Ü10.2
Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich, **ohne den Taschenrechner** zu verwenden. Wenden Sie dabei die Potenzgesetze aus Kapitel 1 und die Regeln aus Information 10.1 an. Orientieren Sie sich am Beispiel.

Beispiel:
$$\ln\left(\frac{1}{\sqrt[3]{e}}\right) = \ln\left(\frac{1}{e^{\frac{1}{3}}}\right) = \ln\left(e^{-\frac{1}{3}}\right) = -\frac{1}{3}\ln(e) = -\frac{1}{3}$$

- a) $\ln(e)$ = _____
- b) $\ln(e^2)$ = _____
- c) $\ln(e^a)$ = _____
- d) $\ln(1)$ = _____
- e) $\ln(e^0)$ = _____
- f) $\ln(e^{-4})$ = _____
- g) $\ln(e^{-2})$ = _____
- h) $\ln(e^{-a})$ = _____
- i) $\ln(e^{\frac{1}{2}})$ = _____
- j) $\ln(e^{\frac{1}{2}})$ = _____
- k) $\ln(\sqrt[3]{e})$ = _____
- l) $\ln(\sqrt{e})$ = _____
- m) $\ln(\sqrt{e^k})$ = _____
- n) $\ln\left(\frac{1}{e}\right)$ = _____
- o) $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ = _____
- p) $\ln\left(-\frac{1}{e}\right)$ = _____
- q) $\ln\left(-\frac{1}{e}\right)$ = _____
- r) $\ln\left(\sqrt{\frac{2}{e}}\right)$ = _____
- s) $\ln\left(\sqrt{\frac{2}{e}}\right)$ = _____

Lösen Sie die unsortierter Reihenfolge:

1) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}, 0, 0, 1, 1, -1, -1, 2, -2, -2, -4$

Aufgabe 10.7

Lösen von Exponentialgleichungen zur Basis e

Wie bei Potenzgleichungen (vgl. im Kapitel 6) gibt es auch bei der Lösung von Exponentialgleichungen unterschiedliche Lösungsverfahren. Einige häufig auftretende Verfahren werden exemplarisch jeweils an einem Beispiel vorgestellt. Es handelt sich hierbei lediglich um Lösungsvorschläge, da meist auch alternative Vorgehensweisen möglich sind. Erläutern Sie für die in den Beispielen vorgestellten Lösungswege die von Zeile zu Zeile erfolgten Umformungen.

Beispiel 1:

Die Lösungsvariable kommt nur in einem exponentiellen Term vor

Form: $e^{ax+b} = b$

(1) $3e^{2x+1} - 6 = 0$

(2) $3e^{2x+1} = 6$

(3) $e^{2x+1} = 2$

(4) $\ln(e^{2x+1}) = \ln(2)$

(5) $(2x+1) \cdot \ln(e) = \ln(2)$

(6) $2x = \frac{\ln(2) - 1}{2} \approx -0,19$

(1)→(2):

(2)→(3):

(3)→(4):

(4)→(5):

(5)→(6):

(6)→(7):

Beispiel 2:

Die Lösungsvariable tritt sowohl in einem rationalen als auch in einem exponentiellen Term der Gleichung auf

Im Gegensatz zu Beispiel 1 tritt die Lösungsvariable in der Gleichung sowohl in einem rationalen als auch in einem exponentiellen Term auf. Da die beiden Summanden nicht durch x dividierbar sind, kann die Gleichung nicht durch x aufgelöst werden. In diesem Fall kann die Gleichung durch die Anwendung von ln auf beiden Seiten gelöst werden. Die Anwendung von ln auf beiden Seiten führt dazu, dass das x nun nicht mehr im Exponenten, sondern nur noch als Argument von e erscheint, dafür aber im Argument des ln. Da ln(e) = 1, kann die Gleichung nun nach x aufgelöst werden.

Algebraisch nicht lösbar

Exponentialgleichung

$e^x - x = 2$

$\ln(e^x - x) = \ln(2)$

Die Anwendung von ln auf beiden Seiten führt dazu, dass das x nun nicht mehr im Exponenten, sondern nur noch als Argument von e erscheint, dafür aber im Argument des ln. Da ln(e) = 1, kann die Gleichung nun nach x aufgelöst werden.

Lösung durch Faktorisieren

(1) $xe^x + 4x = 0$

(2) $x(e^x + 4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

(3) $e^x + 4 = 0$

(4) $e^x = -4 \Rightarrow$ keine weitere Lösung

(1)→(2):

(2)→(3):

(3)→(4):

Beispiel 3:

Die Lösungsvariable tritt sowohl in einem rationalen als auch in einem exponentiellen Summanden vor, ein rationaler Term fehlt

Form: $ae^{bx} + ce^{dx} = e$

(1) $e^{2x} - e^{-x} = 0$

(2) $e^{2x} = e^{-x}$

(3) $e^{3x} = 1$

(4) $\ln(e^{3x}) = \ln(1)$

(5) $3x = \ln(1)$

(6) $x = \frac{\ln(1)}{3} = 0$

(1)→(2):

(2)→(3):

(3)→(4):

(4)→(5):

(5)→(6):

Ergänzung zu Beispiel 3:

Man kann diese Gleichung auch lösen, indem man den exponentiellen Teil ausklammert. Diese aufwendigere Lösungsvariante ist bei Exponentialgleichungen jedoch meist nicht notwendig.

(1) $e^{3x} - 3e^{2x} = 0$

(2) $e^{2x}(e^x - 3) = 0$

(3) $(e^x - 3) = 0 \quad \vee \quad e^{2x} = 0$

(4) $e^x = 3 \quad \Rightarrow \text{Widerspruch}$

(5) $\ln(e^x) = \ln(3)$

(6) $x = \ln(3)$

(1)→(2):

(2)→(3):

(3)→(4):

(4)→(5):

Beispiel 4:

Die Lösungsgleichung enthält mehreren exponentiellen Summanden, von denen einer vor, der rationale Summand ist eine Konstante.

Form: $a \cdot e^{bx} + c \cdot e^{dx} = k$

(1) $4 - 5e^{-x} = 0$

(2) $e^{-x} - 4e^x - 5 = 0$

(3) $(e^x)^2 - 4e^x - 5 = 0$

(4) $z^2 - 4z - 5 = 0$

(5) $z_{1,2} = 2 \pm \sqrt{29}$

(6) $z = 2 + \sqrt{29}$

(7) $x = \ln(-1)$
keine Lös.

(1)→(2):

(2)→(3):

(3)→(4):

(4)→(5):

(7)→(8):

(8)→(9):

Übung 10

Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach x auf, und geben Sie das Ergebnis ggf. auf Dezimalstellen gerundet, an.

- a) $e^{2x} = 1$ b) $e^{2x} = 1$ c) $e^{2x} = 0$ d) $e^{2x} = 0$
e) $3e^{4x} - 8 = 3$ f) $3e^{4x} - 8 = 3$ g) $3e^{4x} - 8 = 3$ h) $3e^{4x} - 8 = 3$

- i) $e^{2x} = 4e^x$ j) $2e^{2x} - 4e^x = 0$ k) $e^x - e^{-x} = 0$ l) $2e^{4x} - e^x = 0$
m) $x \cdot e^x - 1 = 0$ n) $e^{2x}(x^2 - 4x - 5) = 0$ o) $x^2 \cdot e^x + 2x \cdot e^x = 0$ p) $4x \cdot e^{2x} - 4e^{-2x} = 0$
q) $e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$ r) $2e^{2x} + 5e^x = 3$ s) $e^x = 6 - e^{2x}$ t) $e^{2x} - e^{-2x} = 4$

Lösungen in unsortierter Reihenfolge:

- $x = 0$ $x = 0$ $x_2 = -1$ $x_2 = -1$
 $x = \frac{\ln(2) - 1}{2} \approx 0,15$ $x = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{11}{3}\right)$ $x_2 = \frac{\ln(2)}{2} \approx 0,35$ $x = -\frac{1}{3}$
 $x = \ln(4)$ $x = \ln(2)$ $x = \frac{\ln(2)}{2} \approx 0,35$ $x = \frac{\ln(2)}{2} \approx 0,35$
algebraisch nicht lösbar $x = 0$ $x_1 = 0$ $x_2 = -2$ $x = 1$
 $x = 0$ (3) keine Lösung $x = \frac{-\ln(2)}{3} \approx -0,23$

Aufgabe 10.8

Lösen von Logarithmgleichungen

Da man in der praktischen Anwendung in den Naturwissenschaften, der Technik und auch bei den Wirtschaftswissenschaften in der Regel mit e-Funktionen arbeitet, sollen auch bei der Lösung von Logarithmgleichungen hier nur Gleichungen, die den natürlichen Logarithmus ln, also den Logarithmus zur Basis e, enthalten behandelt werden. Anhand von gängigen Beispielen sollen einige Lösungsverfahren vorgestellt werden. Erläutern Sie bei den Beispielen jeweils die Umformungsschritte.

Beispiel 1:

Der log

Definition:

Definitionsbereich:

Definitionsbereich:

Definitionsbereich:

(1) $\ln(ax^2 + bx + c) = d$

(2) $e^{\ln(ax^2 + bx + c)} = e^d$

(3) $ax^2 + bx + c = e^d$

(4) $ax^2 + bx + c - e^d = 0$

(1)→(2): _____

(2)→(3): _____

(3)→(4): _____

Entstandene Gleichung mit herkömmlichen Methoden lösen, hier beispielsweise mit der _____ Formel

Beispiel 2:

Die Gleichung besteht aus einem Produkt mit einem rationalen und einem logarithmischen Faktor. Beide Faktoren enthalten die Lösungsvariable.

a) **Form: $ax \cdot \ln(bx + c) = 0$**

Definitionsbereich:

$D = \{x \mid bx + c > 0\}$

$= \{x \mid x > -\frac{c}{b}\}$

(1) $ax \cdot \ln(bx + c) = 0$

(2) $x = 0 \vee \ln(bx + c) = 0$

$e^{\ln(bx + c)} = e^0$

(4) $bx + c = 1$

(5) $x_1 = 0 \vee x_2 = -\frac{c}{b} + 1$

(1)→(2): _____

(2)→(5): _____

b)

Definitionsbereich:

$D = \{x \mid bx > 0\}$

(1) $ax \cdot \ln(bx) = 0$

(2) $ax = 0$

(3) $x = 0$

(2)→(3): _____

Beispiel 3

Die Gleichung hat keinen konstanten, jedoch mehrere logarithmische Summanden, welche die Lösungsvariable enthalten.

Form: $\ln(2 - x) + \ln(x) = 0$

Definitionsbereich:

$D = \{x \mid 2 - x > 0 \wedge x > 0\}$

$= \{x \mid 0 < x < 2\}$

Beide Terme $\ln()$ haben eine um x veränderliche D so angeben, damit beide Terme kein unterschiedliches Argument enthalten können

Diese Gleichung kann man auf zwei verschiedenen Wegen lösen.

Lösungsweg 1:

(1) $\ln(2 - x) + \ln(x) = 0$

(2) $e^{\ln(2 - x) + \ln(x)} = e^0$

(3) $e^{\ln(2 - x)} \cdot e^{\ln(x)} = 1$

(4) $(2 - x) \cdot x = 1$

(5) $x^2 - 2x + 1 = 0$

(6) $x_{1,2} = 1$

(1)→(2): Regel _____ anwenden

(2)→(3): _____

(3)→(4): _____

(4)→(5): _____

(5)→(6): _____

Lösungsweg 2:

(1) $\ln(2 - x) + \ln(x) = 0$

(2) $e^{\ln(2 - x) + \ln(x)} = 1$

(3) $e^{\ln(2 - x)} \cdot e^{\ln(x)} = 1$

(4) $(2 - x) \cdot x = 1$

(5) $x^2 - 2x + 1 = 0$

(6) $x_{1,2} = 1$

(2)→(3): Regel _____ anwenden

(3)→(4): _____

(4)→(5): _____

(5)→(6): _____

(6)→(7): _____

Beispiel 4:

Algebraisch **nicht lösbare** Logarithmengleichung

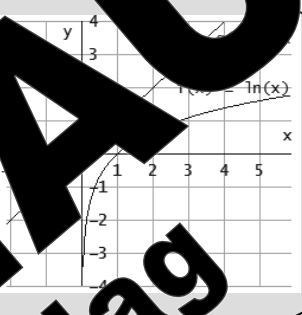
$$\ln(x) - x = 0$$

$$\ln(x) = x$$

$$e^{\ln(x)} = e^x$$

$$x = e^x$$

Anhand der graphischen Darstellung erkennt man, dass es keine Lösung gibt. (Vergleichen Sie auch die Aufgabenstellung.)



Übung 10.4

Ermitteln Sie den Definitionsbereich der folgenden Gleichungen nach x auf. Geben Sie das Ergebnis ggf. auf zwei Dezimalstellen gerundet an.

- a) $\ln(x) = 3$
b) $\ln(x) = -2$
c) $\ln(x) = 0$
d) $\ln(4x) = 0$
- e) $\ln(e^x) = 0$
f) $\ln(x-1) = 0$
g) $\ln(x-6) = 9$
h) $5\ln(x-7) = 1$
- i) $\ln(x+1) = \ln(x^2-1)$
j) $\ln(4x) = 4\ln(x)$
k) $\ln(x^2) + \ln(x) = 0$
l) $\ln(x^2) + \ln(8x) = 0$

- Lösungen und Reihenfolge:

keine Lösung
 $x = 1$
 $x = e^{-2} \approx 0,14$
- $x_1 = -2; x_2 = -4$
 $x = 0,5$
 $x = 2$
 $x = e^3 \approx 20,09$
- $x = 2$
 $x = \sqrt[3]{4}$
 $x = 0,25$
 $x = \sqrt[5]{e} + 7 \approx 8,22$

Übung 10.5

Die Abbildung zeigt die Graphen der Funktionen $f(x) = e^x$ und $f^{-1}(x) = \ln(x)$. Sie die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ und geben Sie den Definitionsbereich von $f(x)$ und $f^{-1}(x)$ an. Zeigen Sie durch Rechnung, dass der y-Achsenabschnitt von $f(x)$ und die Nullstelle von $f^{-1}(x)$ denselben Zahlenwert haben.

Zur Kontrolle: Der y-Achsenabschnitt von $f(x)$ ist auf zwei Dezimalstellen gerundet: 2,74

Ermitteln Sie die Nullstelle von $f(x)$ und den y-Achsenabschnitt von $f^{-1}(x)$.

Aufgabe 10.9

Verschieben, Stauchen, Strecken und Spiegeln der e-Funktion

Sie haben die Regeln, die beim Verschieben, Stauchen und Strecken von Funktionen zu beachten sind, bereits bei den quadratischen Funktionen (Parabeln) und bei den trigonometrischen Funktionen kennen gelernt und mit Sicherheit festgestellt, dass die Parameter in den Funktionsgleichungen weitgehend gleiche Wirkungen haben. Anhand von geeigneten Beispielen soll nun gezeigt werden, dass dieses Regelwerk, mit kleinen Unterschieden, auch auf Exponentialfunktionen übertragen werden kann.

a) Verschieben der Funktion $f(x) = e^x$ in y-Richtung

Zur Erinnerung:

$f(x) = x^2 + c$ ist eine Parabel, die um c nach oben ($c > 0$) oder unten ($c < 0$) verschoben ist.
 $f(x) = \sin(x) + c$ ist eine Sinuskurve, die um c nach oben ($c > 0$) oder unten ($c < 0$) verschoben ist.

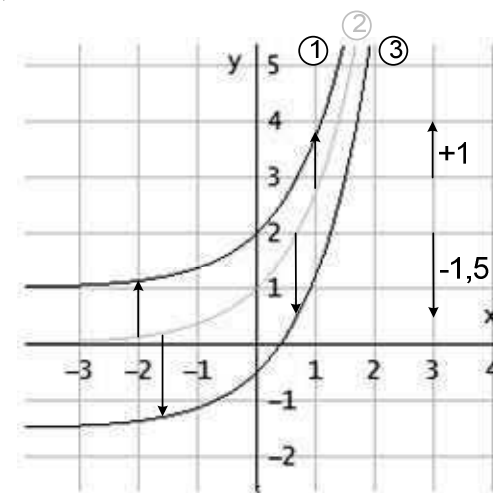
Wenn man die Funktionsgleichung $f(x) = e^x$ um c nach oben ($c > 0$) oder unten ($c < 0$) verschiebt, erhält man die Funktion $h(x) = f(x) + c = e^x + c$ mit $c \in \mathbb{R}$.

In der Abbildung rechts sind die Funktionen

- $h_1(x) = e^x + 1$
- $f(x) = e^x$
- $h_2(x) = e^x - 1,5$

dargestellt. Erklären Sie die Verschiebung der Funktionen h_1 und h_2 gegenüber f in der Abbildung.

Die Funktionsgleichung von $f(x) = e^x$ wird der Parameter c hinzugefügt, so dass die Funktion $h(x) = e^x + c$ entsteht. Für $c > 0$ wird die Funktion $f(x)$ nach oben verschoben und für $c < 0$ wird die Funktion $f(x)$ nach unten verschoben. Damit gelten für das Verschieben von Funktionen in y-Richtung die gleichen Regeln wie beim Verschieben von Parabeln oder Sinuskurven in y-Richtung.



b) Verschieben der Funktion $f(x) = e^x$ in x-Richtung

Zur Erinnerung:

$f(x) = (x - b)^2$ ist eine in x-Richtung verschobene Normalparabel.
 $f(x) = \sin(x - b)$ ist eine in x-Richtung verschobene Sinusfunktion.

Wendet man den für Parabeln und trigonometrischen Funktionen gültigen Zusammenhang auf die e-Funktion $f(x) = e^x$ an, so erhält man die Funktion $h(x) = e^{x-b}$ mit $b \in \mathbb{R}$. In der Abbildung rechts sind die Funktionen

- ① $h_1(x) = e^{x-2}$
 ② $f(x) = e^x$
 ③ $h_2(x) = e^{x+\ln(10)}$

dargestellt. Ergänzen Sie die Abbildung um die folgenden Funktionen:

Im Exponenten der Funktionsgleichung von $f(x) = e^x$ wird der Parameter b mit $b \in \mathbb{R}$ hinzugefügt, sodass die Funktion $f(x) = e^{x+b}$ entsteht. Für $b > 0$ wird die Funktion $f(x) = e^x$ nach _____ und für $b < 0$ wird die Funktion $f(x) = e^x$ nach _____ verschoben. Damit gelten für das Verschieben von e-Funktionen in x-Richtung prinzipiell die gleichen Regeln wie beim Verschieben von _____ oder _____ in x-Richtung.

Man muss jedoch die folgende Besonderheit beachten.

Besonderheit beim Verschieben in x-Richtung!

Erläutern Sie die Wirkung eines Vorfaktors vor dem Exponenten. Ergänzen Sie den Kasten vervollständigen.

Bei der e-Funktion beeinflusst ein Vorfaktor $k \in \mathbb{R}^+$ vor dem Term e^x eine Verschiebung, während bei den Parabeln und trigonometrischen Funktionen durch einen entsprechenden Vorfaktor eine Streckung in _____-Richtung erfolgt.

Stellen Sie die Funktion $h(x) = k \cdot e^x$ in der Schreibweise $h(x) = k \cdot e^x$ dar.

h(x) = _____
 h(x) = _____
 h(x) = _____

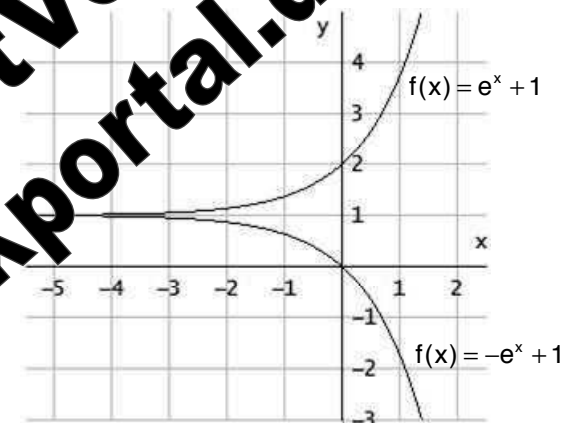
c) Spiegeln von e-Funktionen an einer Geraden $y = c$

Wie Sie in Aufgabenteil b) erkannt haben, bewirkt ein positiver reeller Vorfaktor vor der Funktionsterm e^x eine Verschiebung der Funktion in x-Richtung. Nun untersuchen Sie, wie sich ein negatives Vorzeichen vor diesem Vorfaktor auswirkt.

Begründen Sie, warum bei der folgenden Umformung das Minuszeichen vor dem Faktor $k \in \mathbb{R}^+$ nicht in den Exponenten der Funktion übernommen werden kann:

$$f(x) = -ke^x = -e^{\ln(k)}e^x = -e^{x+\ln(k)} \quad \text{mit } k \in \mathbb{R}^+$$

Erläutern Sie anhand der Abbildung die Wirkung des Minuszeichens.



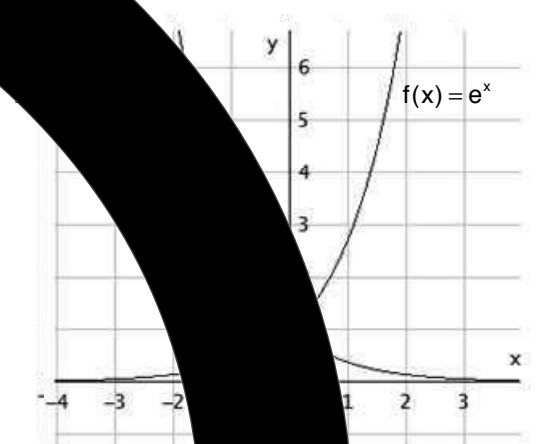
d) Spiegeln an der y-Achse sowie Strecken und Stauchen bei e-Funktionen

Wie Sie unter Aufgabenteil b) erkannt haben, können die Eigenschaften hinsichtlich des Streckens und Stauchens von den Parabeln und trigonometrischen Funktionen nicht direkt auf die e-Funktionen übertragen werden. Begründen Sie dies.

Erläutern Sie die Zusammenhänge beim Spiegeln an der y-Achse.

Regeln an der y-Achse

Durch ein negatives Vorzeichen im Exponenten wird eine e-Funktion an der y-Achse gespiegelt. Man muss dabei beachten, dass die Funktion mit einem negativen Exponenten nicht mehr eine e-Funktion sein kann.



Strecken und Stauchen in y-Richtung

In der Abbildung rechts sind die Funktionen

- ① $h_1(x) = e^{3x} = (e^x)^3$
- ② $f(x) = e^x$
- ③ $h_2(x) = e^{0,5x} = \sqrt{e^x}$

dargestellt.
Ergänzen Sie in der Abbildung rechts zunächst die Funktionen

- ④ $h_3(x) = e^{-3x} = \frac{1}{e^{3x}} = \frac{1}{(e^x)^3} = \left(\frac{1}{e^x}\right)^3$
- ⑤ $h_4(x) = e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- ⑥ $h_5(x) = e^{-0,5x} = \frac{1}{\sqrt{e^x}}$

und danach den folgenden Teil.

Im Exponenten der Funktion $f(x) = e^x$ wird der Faktor a mit $a \in \mathbb{R}$ hinzugefügt, so dass die Funktion $h(x) = e^{ax}$ entsteht. Für einen positiven Parameter a wird die Funktion _____ und _____.
Vorzeichenwechsel beim Parameter a bewirkt eine _____ der Funktion in der y-Richtung.

Zusammenfassung der Eigenschaften der Funktion hinsichtlich des Streckens, Stauchens und Spiegels. Ergänzen Sie die Texte in den Sprechblasen.

Strecken, Stauchen und Spiegeln

$|a| > 1 \rightarrow$ strecken in ____-Richtung

$0 < |a| < 1 \rightarrow$ stauchen in ____-Richtung

____-Wechsel von a bewirkt eine _____

$$f(x) = e^{ax-b} + c = e^{ax} \cdot e^{-b} + c = e^{ax} \cdot \frac{1}{e^b} + c = \frac{1}{e^b} \cdot e^{ax} + c$$

Wie bei anderen Funktionsklassen verschiebt der Parameter c die Funktion in ____-Richtung.

b verschiebt die Funktion in Richtung ____-Achse:

$b > 0 \rightarrow$ verschiebt die Funktion in ____-Richtung

$b < 0 \rightarrow$ verschiebt die Funktion in ____-Richtung

Ein weiterer Parameter c verschiebt die Funktion in ____-Richtung.

Die Funktion $f(x) = e^{ax-b} + c$ lässt sich auch als $f(x) = \frac{1}{e^b} \cdot e^{ax} + c$ schreiben. Beachten Sie, dass gilt: $-be^{ax} + c = -e^{ax + \ln(b)} + c$

Übungen:

Aufgabe 10.10

Verschieben, Strecken, Stauchen und Spiegeln der Funktion $f(x) = \ln(x)$

Bereits gewonnene Erkenntnisse hinsichtlich des Verschiebens, Streckens, Stauchens und Spiegels bei Parabeln, trigonometrischen Funktionen und e-Funktionen können weiter und auch auf das Verhalten der Logarithmusfunktionen übertragen werden. Was bei e-Funktionen besonders zu beachten ist, muss allerdings einige Besonderheiten beachtet werden. Zur Veranschaulichung sind für $x \in \mathbb{R}^+$ in den Abbildungen jeweils die Funktion $f(x) = \ln(x)$ und eine weitere Logarithmusfunktion gegeben.

a) Verschieben von $f(x) = \ln(x)$ in y-Richtung

Verdeutlichen Sie sich die folgende Rechnung:

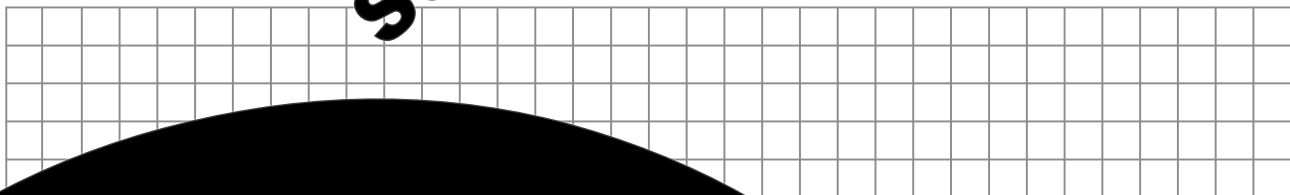
$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) + c \text{ mit } c \in \mathbb{R} \\ h(x) &= \ln(x) + c \\ h(x) &= \ln(x) + \ln(e^c) \\ h(x) &= \ln(e^c \cdot x) \\ h(x) &= \ln(k \cdot x) \text{ mit } k = e^c \end{aligned}$$

Ermitteln Sie die Abbildung aus der Abbildung rechts. Ergänzen Sie die Funktionsgleichung $h(x)$ in der Form $h(x) = \ln(k \cdot x) + c$ wie $\ln(x) = \ln(k \cdot x)$.

$$h(x) = \ln(k \cdot x) + c = \ln(x) + \ln(k) + c$$

und ergänzen Sie die Funktion $h_2(x) = \ln\left(\frac{1}{e} \cdot x\right)$.

Abbildung. Ergänzen Sie dazu den Funktionsterm in geeigneter Weise um.



$$h(x) = \ln(k \cdot x) + c$$

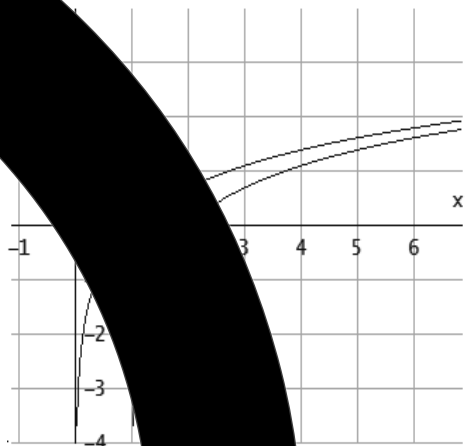
Verdeutlichen Sie sich die folgende Rechnung, und ermitteln Sie die Funktionsgleichung von $h(x)$ durch Ablesen aus der Abbildung rechts. Beschriften Sie zuvor die abgebildeten Graphen mit $f(x)$ und $h(x)$.

$$h(x) = f(x) + c$$

$$h(x) = \ln(x) + c$$

$$h(x) = \ln(x) + c = \ln(x) + \ln(e^c) = \ln(e^c \cdot x) = \ln(k \cdot x) \text{ für } x > 0$$

Ergänzen Sie in der Abbildung den Graph der Funktion $h(x) = \ln(x + 1)$ für $x > -1$.



c) Strecken und Stauchen der Funktion $f(x) = \ln(x)$ in y-Richtung

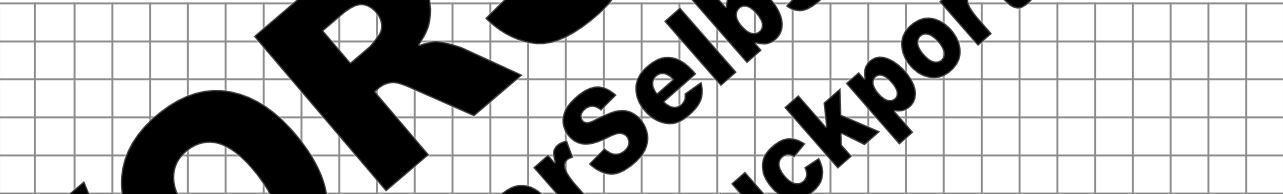
Verdeutlichen Sie sich die folgende Rechnung, und ermitteln Sie die Funktionsgleichung von $h_1(x)$ durch Ablesen aus der Abbildung rechts.

$$\begin{aligned} h(x) &= a \cdot f(x) && \text{für } a \in \mathbb{R}^+ \\ h(x) &= a \ln(x) \\ h(x) &= \ln(x^a) \end{aligned}$$

Funktionsgleichung $h_1(x)$ in beiden Darstellungsarten:

$$h_1(x) = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

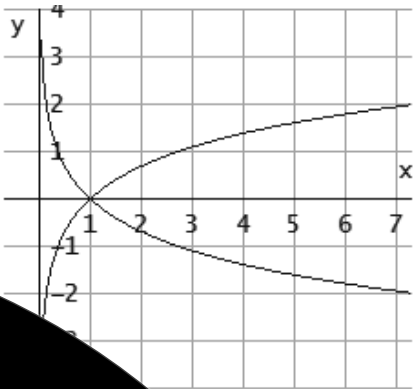
Ergänzen Sie in der Abbildung den Graphen der Funktion $h_2(x) = \ln(\sqrt{x})$. Formen Sie den Funktionsterm in geeigneter Weise um.



d) Spiegeln der Funktion $f(x) = \ln(x)$ bzw. $h(x) = a \ln(x)$ an der x-Achse

Verdeutlichen Sie sich die folgende Rechnung, und beschreiben Sie die Graphen in der Abbildung mit $f(x)$ und $h(x)$.

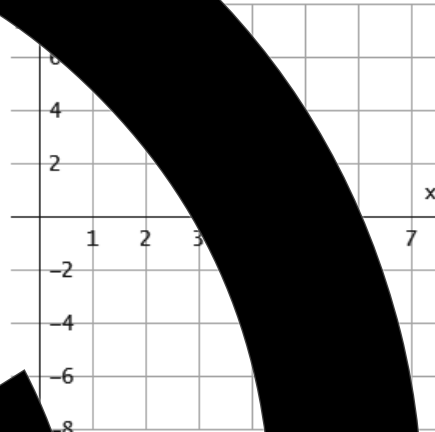
$$\begin{aligned} h(x) &= -f(x) \\ h(x) &= -\ln(x) = \ln(x^{-1}) = \ln\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$



Skizzieren Sie die Funktionen $h_1(x) = \ln(x^3)$ und $h_2(x) = \ln(x^{-3})$ im Koordinatensystem rechts. Ergänzen Sie den anschließenden Satz. Für $a \in \mathbb{R}$, in der Funktion $h(x) =$

$$\begin{aligned} |a| &> 1 && \underline{\hspace{2cm}} \\ 0 < |a| &< 1 && \underline{\hspace{2cm}} \end{aligned}$$

Ein Vorzeichenwechsel vor dem Betrag von a bewirkt eine Spiegelung an der $\underline{\hspace{2cm}}$ -Achse.



e) Spiegeln der Funktion $f(x) = \ln(x)$ an der y-Achse

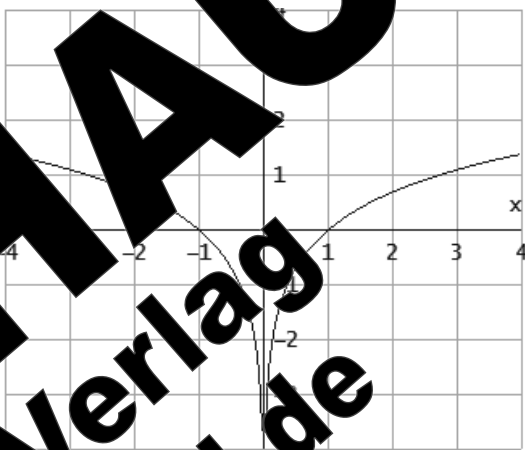
Da der Logarithmus für $x \leq 0$ nicht definiert ist, arbeitet man bei der Logarithmusfunktion oft mit Beträgen im Argument der Logarithmusfunktion.

Betragszeichen kann man weglassen, wenn man den Ausdruck, der in Betragsstrichen steht, einmal mit einem positiven und einmal mit einem negativen Vorzeichen versieht. (Vgl. Aufgabe 10.1)

$$f(x) = f(|x|) = \ln(|x|) \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \ln(x) & \text{für } x > 0 \\ \ln(-x) & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Ergänzen Sie in der Abbildung den Graphen zur Funktion $h(x) = \ln(|x|)$.

$$h(x) = \ln(|x|) = \begin{cases} \ln(x) & \text{für } x > 0 \\ \ln(-x) & \text{für } x < 0 \end{cases}$$



f) Zusammenfassung der Eigenschaften der Logarithmusfunktion hinsichtlich des Streckens, Stauchens und Spiegeln. Ergänzen Sie die Texte in den Sprechblasen.

Der Parameter $a \in \mathbb{R}$ **streckt** bzw. **staucht** die Funktion.

$|a| > 1$ **strecken** in $\underline{\hspace{2cm}}$ -Richtung

$0 < |a| < 1$ **stauchen** in $\underline{\hspace{2cm}}$ -Richtung

Für $c = 0$ wird die Funktion **verschoben** um $\underline{\hspace{2cm}}$.

Prüfen Sie dass gilt: $-\ln(|x|) = \ln(\underline{\hspace{2cm}})$

$$h(x) = a \ln(|x - b|) + c = \ln(|x - b|^a) + c$$

Die Funktion $h(x) = a \ln(|x - b|) + c$ ist eine **Logarithmusfunktion** in $\underline{\hspace{2cm}}$.

→ **verschoben** nach $\underline{\hspace{2cm}}$

→ **verschoben** nach $\underline{\hspace{2cm}}$

Wie bei anderen Funktionen verschiebt der Parameter $c \in \mathbb{R}$ die Funktion in $\underline{\hspace{2cm}}$ -Richtung.

Beachten Sie, dass bei Logarithmusfunktionen gilt:

$$\ln(x - b) = \ln(x - b) + c$$



Oberstudienrätin Ursula Pirkel

Grundlegende zu Algebra und Funktionen selbstorganisiert erlernen



Kapitel

Vertiefende Betrachtung
Gleichungen



Kapitel 1	
Brüche, Potenzen, Wurzeln und Binome	9
Kapitel 2	
Grundlegendes zu Gleichungen	59
Kapitel 3	
Lineare Funktionen	63
Kapitel 4	
Quadratische und biquadratische Gleichungen und Ungleichungen	77
Kapitel 5	
Ganzrationale Funktion 2. Grades	87
Kapitel 6	
Gleichungen 3. und höherer Grades	104
Kapitel 7	
Ganzrationale Funktionen 2. und höherer Grades	115
Kapitel 8	
Die Hyperbelfunktion	127
Kapitel 9	
Trigonometrische Funktionen	135
Kapitel 10	
Exponential- und Logarithmusfunktionen	145
Kapitel 11	
Vertiefende Betrachtung von Betragsungleichungen	169

Kapitel 11: Vertiefende Betrachtung von Betragsungleichungen

Während in Kapitel 4 die Betragsungleichungen nur gestreift wurden, sollen nun ausführlichere Betrachtungen angestellt werden, wobei ein Schwerpunkt in der graphischen Darstellung der Lösungsmenge anhand von Diagrammen liegt.

Aufgabe 11.1

Lineare Betragsgleichungen, in denen ein Betrag auftritt

- a) Verdeutlichen Sie sich die Vorgehensweise am Beispiel anhand der drei Beispiele und verfahren Sie bei den folgenden Aufgabe analog dazu.

Beispiel 1: Betragsungleichung $|x - 2| \geq 1$

Algebraische Lösung

$$\begin{aligned}
 |x - 2| &\geq 1 \\
 x - 2 &\geq 1 \quad \vee \quad x - 2 \leq -1 \\
 x &\geq 3 \quad \vee \quad x \leq 1 \\
 IL &= (-\infty; 1] \cup [3; \infty)
 \end{aligned}$$

Falsche Interpretation beim Weglassen der Betragsstriche

Wenn man die Betragsstriche weglässt, erhält man die allgemeine Form, die zwischen den Betragsstrichen steht einmal ein positives und einmal ein negatives Vorzeichen. Vgl. Kapitel 4 Aufgabe 4.3

Die Lösungsmenge kann dann in der folgenden Form mit Hilfe von Intervallen angegeben werden.

Offene Klammer:
Das Intervall ist auf dieser Seite nicht begrenzt.

Eckige Klammer:
Das Intervall endet mit + bzw. beginnt bei 3.

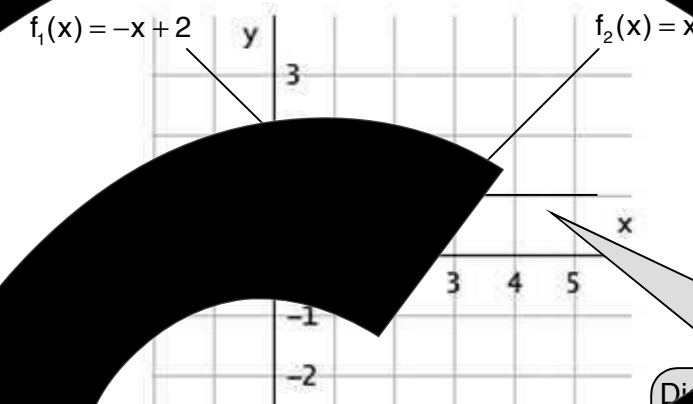
Man fasst die linke Seite der Ungleichung als lineare Betragsfunktion

$f(x) = |x - 2|$ auf. Durch das Weglassen der Betragsstriche erhält man die beiden Geraden

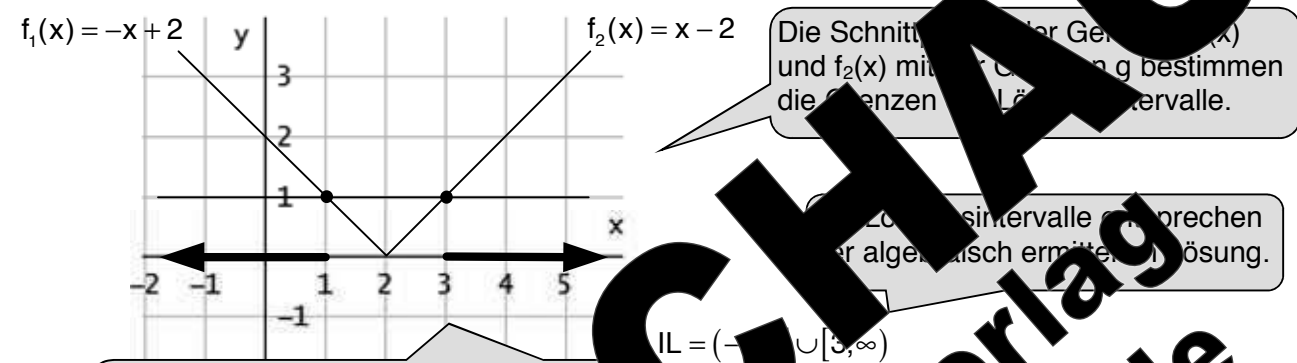
$f_1(x) = -x + 2$ und $f_2(x) = x - 2$

Die beiden Geraden werden in einem Diagramm im ersten und zweiten Quadranten eingezeichnet, denn die Funktionen sind antisymmetrisch wegen des Betragsstriches.

Die rechte Seite der Ungleichung wird ebenfalls als Funktion, $g(x) = 1$, eingezeichnet und ist hier eine horizontale Gerade durch A(0/1).



2. Schritt



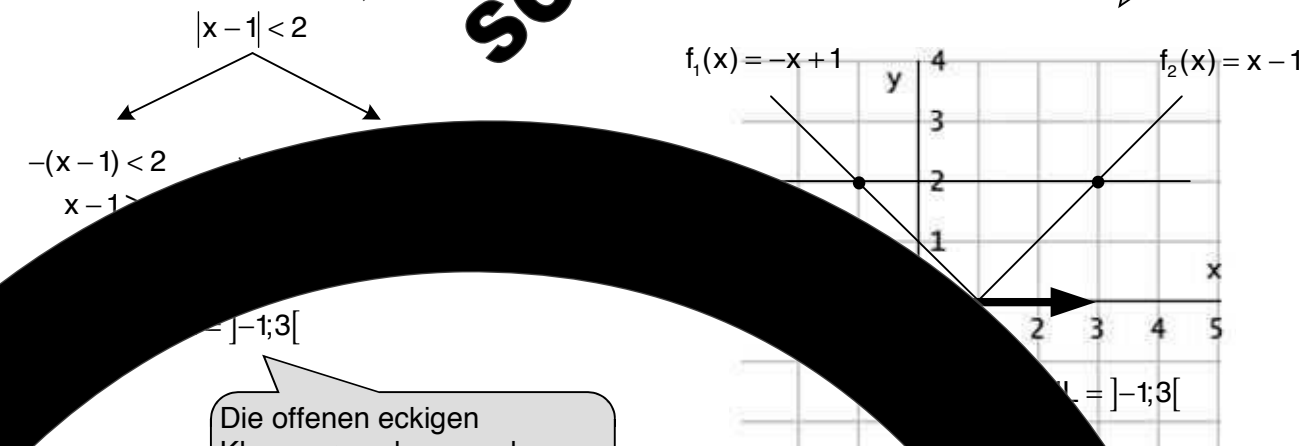
Man kann nun auf der x-Achse Bereiche markieren, für die gilt, dass die Funktionswerte der Geraden größer gleich 1 sind.

Beispiel 2: Betragsungleichung $|x-1| < 2$

Aus der Betragsungleichung entstehen die Funktionen:
 $f_1(x) = -(x-1) = -x+1$
 $f_2(x) = x-1$
 und
 $g(x) = 2$.

Algebraische Lösung

Graphische Lösung



Die offenen eckigen Klammern geben an, dass -1 und 3 nicht zur Lösungsmenge gehören.

Anhand der graphischen Lösung erkennt man sofort, dass die Lösungsmenge bei $x = -1$ beginnt und nur aus einem Intervall besteht.

Beispiel 3: Betragsungleichung $|2x-2| \leq x$

Es spielt für die Vorgehensweise keine Rolle, ob auf der rechten Seite der Gleichung eine Konstante oder ein von x abhängiger Term steht.

Algebraische Lösung

Graphische Lösung



Die geschlossenen eckigen Klammern geben an, dass sowohl $\frac{2}{3}$ als auch 2 zur Lösungsmenge gehören.

Wenn man aus der graphischen Lösung die Grenzen nicht exakt ablesen kann, muss man ggf. durch Berechnung der entsprechenden Schnittpunkte die Grenzen berechnen.

Berechnung der Schnittpunkte

$$\begin{aligned} f_1(x) &= g(x) & f_2(x) &= g(x) \\ -2x + 2 &= x & 2x - 2 &= x \\ x &= \frac{2}{3} & x &= 2 \end{aligned}$$

Ob die Werte $\frac{2}{3}$ und 2 zum Lösungsintervall gehören, hängt davon ab, ob in der Aufgabenstellung die Relationszeichen $>$ oder $\geq$ bzw. $<$ oder $\leq$ verwendet werden.

Übung 1

Ermittele die Lösungsmenge der folgenden Betragsungleichung mit Hilfe des algebraischen Lösungsverfahrens.

a) $|x-1| < 2$ b) $|3x-1| < 2$ c) $|x+1| \leq x$

de Übungen _____

Aufgabe 11.2

Betragsungleichungen mit mehreren Beträgen

Bei diesen Betragsungleichungen wird ein algebraischer Lösungsweg oft als schwierig empfunden. Ist anfällig für Rechenfehler. Daher wird hier eine Lösungsstrategie verfolgt, die überwiegend graphischen Vorgehensweise beruht, die schon in Aufgabe 11.1 angewendet wurde. Da es für der Vorgehensweise übersichtlich dargestellt werden kann, werden die einzelnen Lösungsschritte aufbauend aufeinander in mehreren Diagrammen gezeigt, wobei der Diagramm Schritt für Schritt ergänzt werden.

Verdeutlichen Sie sich die einzelnen Schritte bei der Ermittlung der Lösung und begründen Sie die anschließenden Übungsaufgaben mit dem gleichen Verfahren.

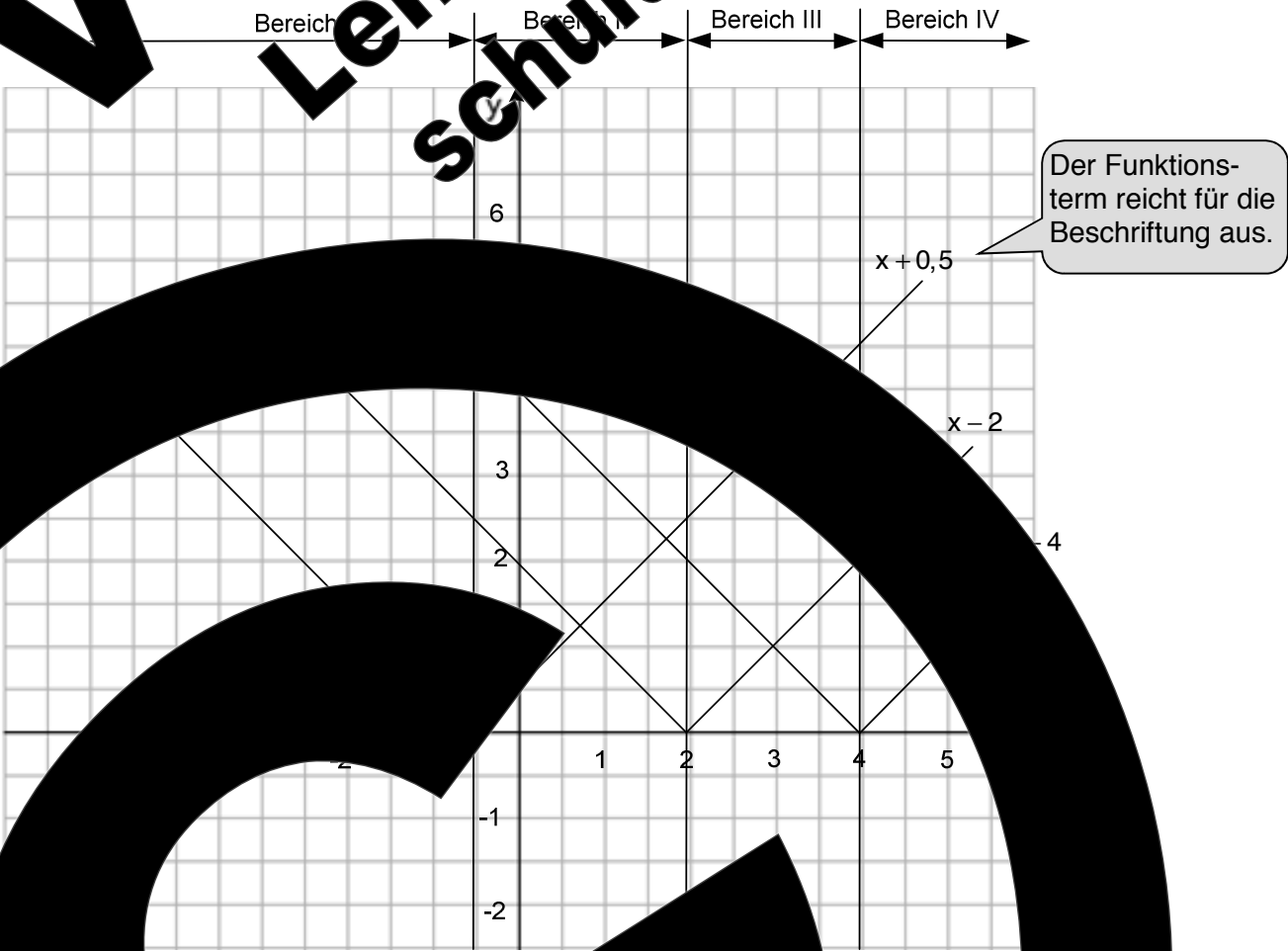
Beispiel: $|x + 0,5| + |x - 2| - |x - 4| \leq 2$

1. Schritt:

Entsprechend zu Aufgabe 11.1 werden die Beträge aus der Betragsungleichung jeweils linearen Funktionen zugeordnet. Im 1. und 2. Coefficienten vorgegeben. Diese Funktionen werden in einem geeigneten Koordinatensystem eingezeichnet und mit den zugehörigen Funktionstermen beschriftet.

2. Schritt:

An den Stellen, an denen die eingezeichneten Geraden Nullstellen besitzen, mit Hilfe von vertikalen Geraden das Koordinatensystem in Bereiche einteilen.



3. Schritt

Eine Tabelle erstellen, in der für jeden Bereich angegeben wird, welcher Funktionsterm gültig ist.

Betragsterm	Operation	I	II	III	IV
$ x + 0,5 $	+	$-x - 0,5$	$x - 0,5$	$x + 0,5$	$x + 0,5$
$ x - 2 $	+	$-x + 2$	$-x + 2$	$x - 2$	$x - 2$
$ x - 4 $	-	$-x + 4$	$-x + 4$	$-x + 4$	$-x + 4$
	Summe:	$-x - 1,5$	$3x - 5,5$	$x + 2,5$	$x + 2,5$

Eintragen der Betragsterme aus der Betragsungleichung

Eintragen, ob Betrags-terme addiert oder subtrahiert werden.

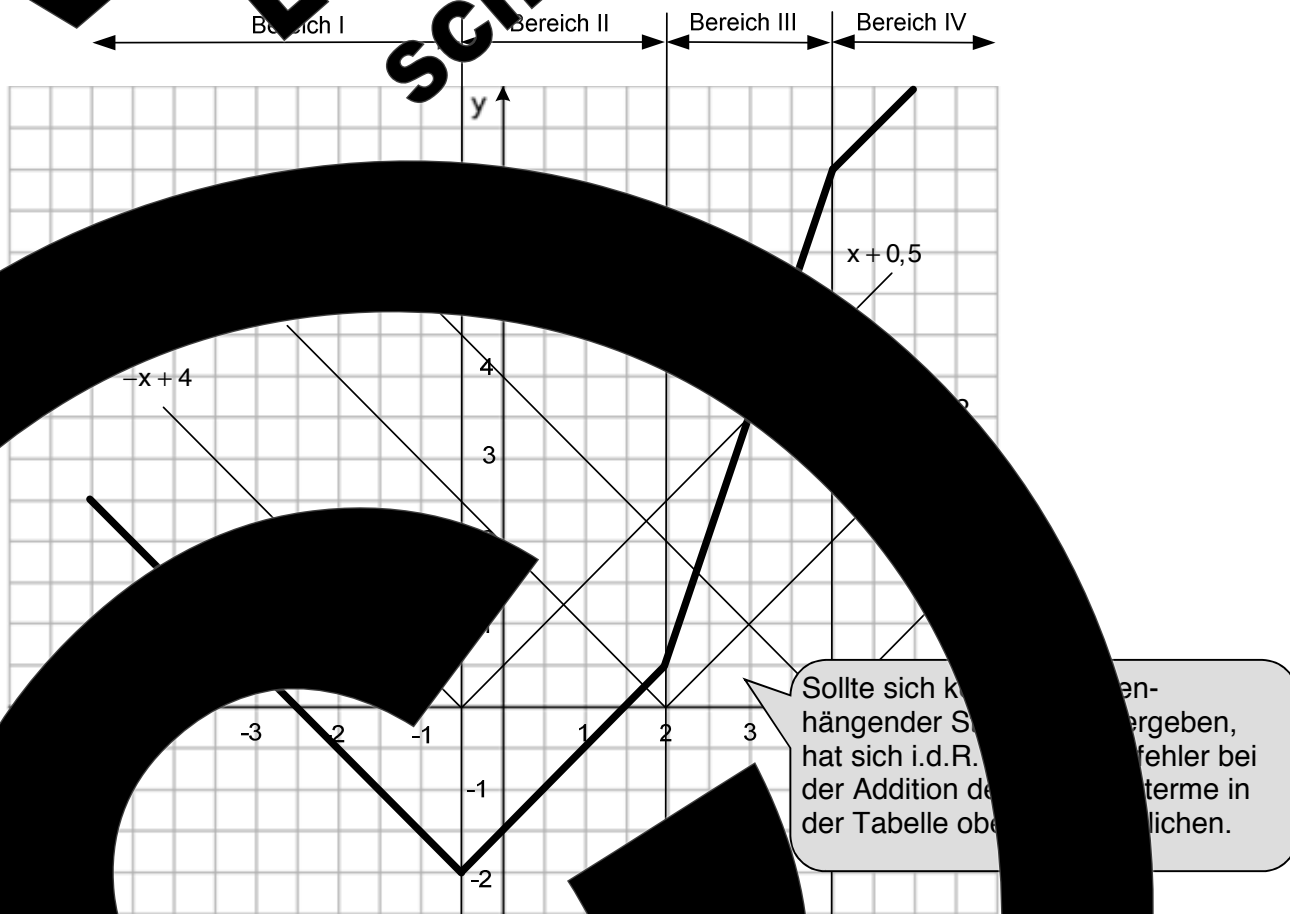
Eintragen, welcher Funktions-term der einzelnen Beträge in den Bereichen I, II, III und IV gültig ist.

Anhand der angegebenen Operationen die Funktionsterme in jeder Spalte addieren bzw. subtrahieren.

In der untersten Zeile erscheinen für jeden Bereich die durch Addition bzw. Subtraktion entstandenen Funktionsterme und die zugehörigen Geraden. Diese Geraden werden im nächsten Schritt abschnittsweise in den jeweiligen Bereichen vorgezeichnet. Es ergibt einen zusammenhängenden Streckenzug, mit dem dann die Lösungsmenge der ursprünglichen Betragsungleichung ermittelt werden kann.

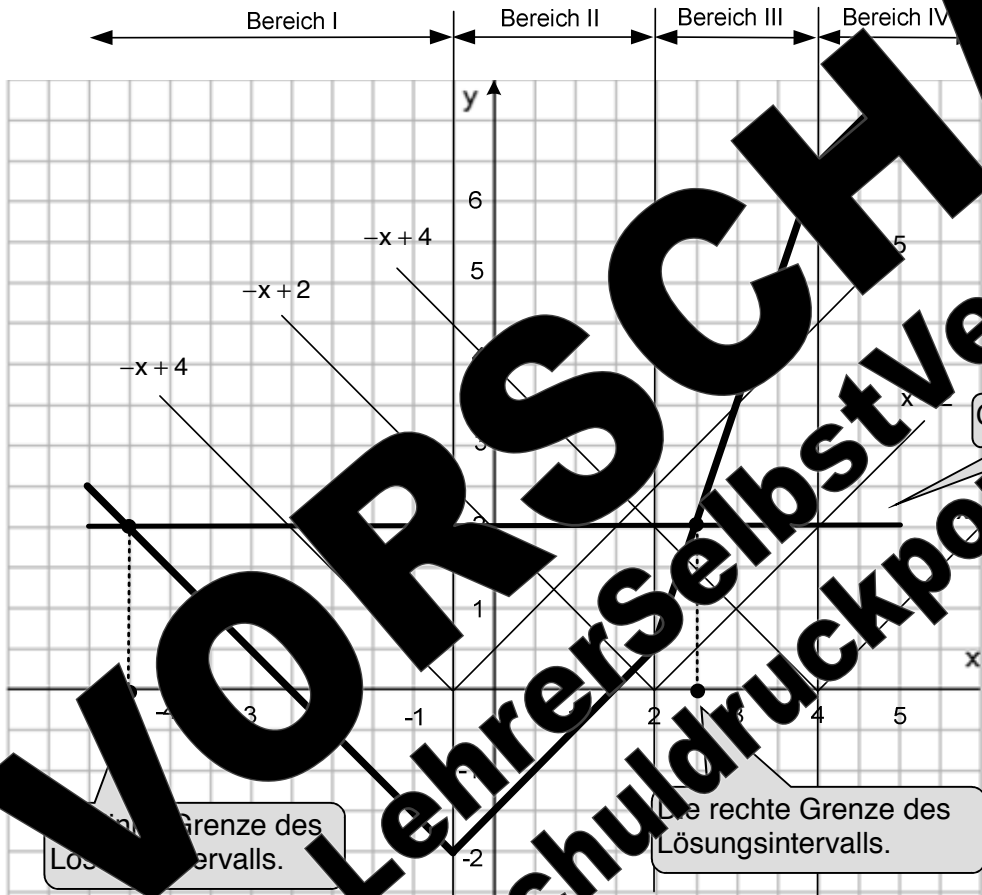
4. Schritt

Zeichnen des Linienzugs anhand der Funktionsterme in der untersten Zeile der Tabelle von Schritt 3.



5. Schritt

Einzeichnen der Geraden, die dem Term auf der rechten Seite der ursprünglichen Ungleichung entspricht, hier also der Geraden $g(x) = 2$.



6. Schritt

Man ermittelt das Lösungsintervall, indem man die Schnittpunkte der Geraden $g(x)$ mit dem Streckenzug im entsprechenden Bereich ermittelt. Die Schnittpunkte des Streckenzugs mit der Geraden x genau auf $g(x)$ im Bereich II des Lösungsintervalls auch aus der Zeichnung abgelesen.

Schnittpunkt von $g(x)$ mit der dem Bereich I zugeordneten Funktion $f(x) = -x - 2,5$
 $f(x) < g(x) \Rightarrow -x - 2,5 < 2 \Rightarrow x < 4,5$
Rechte Grenze: Schnittpunkt von $g(x)$ mit der dem Bereich II zugeordneten Funktion $f(x) = 3x - 5,5$
 $f(x) < g(x) \Rightarrow 3x - 5,5 < 2 \Rightarrow x < 2,5$

Lösungsintervall:

Übung

Ermittle die Lösungsintervalle der folgenden Betragsungleichungen

- a) $|x + 2| \leq 5$ b) $|x - 2| - |0,5x + 1| < 1$ c) $|x - 3| - |x + 1| \geq 0$

Ergebnisse:

Abzisse	63	Nullstelle	64
Ankathete	135	Ordinate	63
Ausklammern	39	Parabeln strecken, stauchen	95
Binomen höherer Ordnung	55	Parabeln verschieben	59
Binomialkoeffizienten	56	partielle Wurde ziehen	30
Binomialreihe	57	passende Druck	56
Binomische Formeln	41	Polynomdivision	142
biquadratische Gleichung	60	Polynomdivision	106
Bogenmaß	137	Polynomialer Form	88
Bruchgleichungen	60	Potenz	19
Cosinus	135	Potenzrechnung	33
Cosinusfunktion	138	pq-Formel	80
Distributivgesetz	9	quadratische Ergänzung	48
echter Bruch	9	quadratische Gleichungen	77
erste Winkelhalbierende	70	quadratische Ungleichungen	85
erweitern eines Bruchs	11	Radikalmachen des Nenners	32
Exponent 0	25	Rechtwinkliges Dreieck	72
Exponentialfunktion	147	Scheitelformel	88
Exponentialgleichung	147	Schnittpunkte	67
Exponentialform	145	Soll-Winkel	72
Exponentielles Wachstum	145	Sinus	135
Factoring	39	Sinusfunktion	138
Formeln	88	Steigung einer Funktion	64
Ganzrationale Funktionen 2. Grades	145	Symmetriebetrachtungen bei ganzrationalen	122
Ganzrationale Funktionen höherer Ordnung	145	Funktionen	122
Gegensatzkathete	135	Tangens	135
gerade Zahl	9	trigonometrische Funktionen	135
Gleichungen 3. und höheren Grades	104	trigonometrischen Gleichungen	142
Grad- und Bogenmaß	137	trigonometrischer Pythagoras	136
Hypotenuse	135	Umkehrfunktionen	127
kartesisches Koordinatensystem	63	unechter Bruch	9
Kehrwert	9	verschieben von Normalparabeln	88
kleinste gemeinsame Vielfache	9	verschieben, Stauchen, Strecken und Spiegeln	161
Kürzen	9	verschieben, Strecken, Stauchen und Spiegeln	165
Logarithmen	157	Wachstumsfunktion $f(x) = \ln(x)$	165
Logarithmusfunktion	149	Wachstumsfunktionen	135
Normalparabel	87	Wachstumsfunktionen am rechtwinkligen Dreieck	72

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

**Umschlag
Rückseite
(Innen)**

(unbedruckt)

Hier können Sie noch Vorlagen einfügen

VORSCHAU

LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

