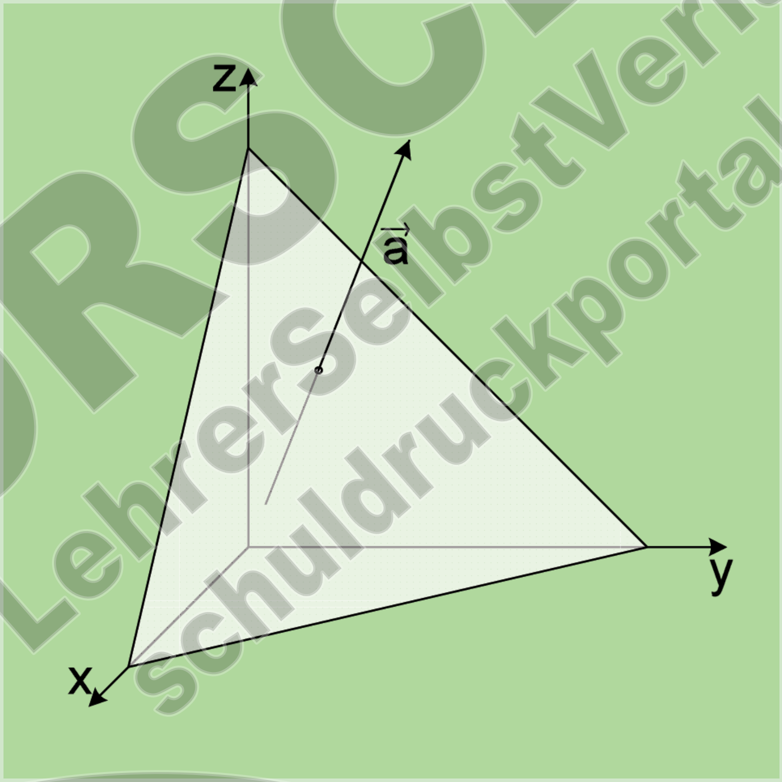
Lineare Algebra

selbstorganisiert erlernen



Ursula Pirkl

LEHRER SELBST VERLAG

02-031-266

Umschlag Vorderseite (Innen)

(unbedruckt)

Hier können Sie noch Vorlagen einfügen

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Algebra

selbstorganisiert erlernen

Ka

Lineare Gleichungssysteme
mit zwei Variablen

02-031-266

Gesa ebra selbstorganisiert erlernen (-031-266)
St

SelbstVerlag
tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ
lehrerselbstverlag.de

www.f-druck.de

Oberstudienrätin Ursula F

Lineare A ebra

selbst ganisiert rlernen

e Mathematik

estellnummer 02-031-266

LEHRER
SE T

Stand: 21.07.2014

L g
eunde GmbH, Koblenz (Germany) 2013
erselbstverlag.de

www.f-druck.de

Inhaltsverzeichnis

Lineare Abbildungen

Vorwort

Die Konzeption des vorliegenden Arbeitsbuches beruht auf meinen langjährigen Unterrichtserfahrungen in der Oberstufe von beruflichen Gymnasien in Südhessen. Im Mittelpunkt der Zielsetzung steht hier, den Schülerinnen und Schülern einen übersichtlichen Weg durch die Vielfalt der Methoden und Lösungswege in der linearen Algebra aufzuzeigen. Demzufolge haben die einzelnen Kapitel eine zusammenhängende, aufeinander auf[illegible]de Struktur, wobei für die jeweilige Prob[illegible]stellung meist nur ein Lösungsweg zum Ansatz [illegible]mmt. Ergänzt durch Übungsaufgaben a[illegible]hulb[illegible]rn oder anderen Quellen, erhalte[illegible] die Schülerin[illegible] und Schüler einen umfassende[illegible] [illegible]er die im Inhaltsverzeichnis a[illegible]teten Themen [illegible]ie im Wesentlichen den A[illegible]rd[illegible]gen d[illegible]sischen Landesabiturs im [illegible]d- [illegible] Leistungskurs entsprechen.

Die For[illegible] A[illegible]eng[illegible]tung stellt eine Anleitung fü[illegible]lbstorg[illegible]ierte Lernformen [illegible]ar. In der P[illegible] b[illegible] sich L[illegible]teams, in de[illegible] die Schülerin[illegible] un[illegible]n Dialog die Inhalte überw[illegible]gen[illegible]elbständig erarbeiten. Häufig kommu[illegible] d[illegible]eams in den Le[illegible]uppen, in de[illegible] diese Le[illegible]praktizier[illegible]wird und zum Sta[illegible]d geworden ist, auch untereinander und t[illegible]schen Erkenntnisse sowie Einsichten zur The[illegible]tik aus. Während leistungsstärkere Teams die Aufgabenstellungen und zusätzliche Übungen in der Regel ohne weitere Hilfe bewältigen und [illegible] bietet diese Unte[illegible] den [illegible] [illegible]ung ihrer Kompetenzen zu [illegible] [illegible]ie Aufgabenstellungen erfordern zudem, [illegible]g dargestellte Sachverhalte oder Zusammenhänge zu beschreiben sowie Ansätze zu begründen. Dadurch werden neben rein themenspezifischen auch sprachliche Kom[illegible]ichtlich der Verwendung der [illegible]. Lehrerzentrierte[illegible] [illegible]el nur noch zu Be[illegible] Wiederholung und [illegible]esprechung von H[illegible]tatt. Damit wird den Erkenntnissen [illegible]rie und den daraus resultierenden For[illegible] selbstorganisierte Lernformen einzusetzen [illegible]mfänglich Rechnung getragen.

Oberstudienrätin Ursul[illegible]

Kommentare vo[illegible]hülern[illegible]n und Schülern

„Ich finde [illegible] [illegible]ass man, wenn man mal kra[illegible]k ist, zu[illegible]us[illegible]beitsbuch nachvollziehe[illegible]nn, w[illegible] Unterricht gemacht wurde. Dan[illegible]t ma[illegible]e Chance, anschließend ohne [illegible]der [illegible]tarbeiten zu können.“

[illegible] finde es gut, k[illegible]lose[illegible] Blätter zu haben. M[illegible]erliert kein[illegible] S[illegible]ten und hat am Schluss alles übersicht[illegible]h und komple[illegible]

Z[illegible]gruppe

[illegible]e Unterla[illegible] sind primär für den Unterricht im Grund- u[illegible] L[illegible]stungskurs in der gymnasialen Oberstufe [illegible]t[illegible]ickelt worden, können aber auch an allen Ei[illegible]tungen, in denen die allgemeine Hochschulr[illegible]e erworben werden kann, eingesetzt werden.

Ebenfalls ist das Konzept für Fachoberschulabsolventen geeignet, die an Hochschulen bzw. Fachhochschulen einen Studiengang wählen, der Mathematik beinhaltet. Angehende Studentinnen und Studenten, die keine oder nur sehr geringe Kenntnisse im Bereich der Linearen Algebra haben, können sich selbständig oder im Rahmen von Vorbereitungskursen in die für das Studium notwendige Thematik einarbeiten.

Auch im Bereich der Nachhilfe im Fach Mathematik [illegible] der Einsatz der Lern- und Arbeitsmaterialien vor[illegible]eignet, da die Unterlagen die Bedürfnisse [illegible]e „Zugangsproblem in Mathematik“ [illegible]

Metho[illegible]daktische Anmerku[illegible]

Die Unterlagen [illegible] ausgerichtet, dass die Schülerinnen un[illegible]tgehend eigenständig und individuell in [illegible] aber auch zu Hause die einzelnen Them[illegible]n sowie bei Fehlzeiten nacharbeiten kö[illegible]ausaufgaben kann de[illegible] zeitliche Rahmen [illegible]esteuert werden, [illegible] alle vom Lehrpla[illegible]iebenen Themen [illegible]ufe des zur Verfü[illegible]enden Halbjahres [illegible]itet werden kö[illegible]

Da alle Kapitel aufeinander aufbauen, ist eine lückenlose Bearbeitung der einzelnen Aufgaben notwendig. Auf eine vollständig umfassende Theorie der linearen Gleichungssysteme wird zugunsten einer exemplarischen und anschaulichen Darstellung der Thematik verzichtet. Die hier angeführten Beispiele orientieren sich überwiegend an Bedürfnissen, die sich aus den Aufgabenstellungen der folgenden Kapitel ergeben.

Die Gestaltung der Unterlagen ermöglicht es, dass Erläuterungen, Erkenntnisse und Ergebnisse v[illegible]ständig in das Arbeitsbuch hineingeschrieben w[illegible]den, sodass keine unübersichtlichen los[illegible]lättersammlungen entstehen und alle [illegible]ormationen ohne Suchaktionen schnell nachges[illegible]en werden können. Die Lösungen zu [illegible] Aufgabe[illegible]d Übungen des Arbeitsbuchs werde[illegible]i eine[illegible]stellung automatisch als P[illegible]tei mitg[illegible]a die Unterlagen ergänzen[illegible]lbuch eingesetzt werden, sind a[illegible] Stellen, [illegible]de[illegible]pielsweise weitere Vertief[illegible]n durc[illegible]ngsaufgaben gewünscht sind, Platzha[illegible]o ein[illegible]igt worden, dass Verweise de[illegible] Lehrer auf z[illegible]ätzliche Übungsaufga[illegible]bersic[illegible]ch notiert w[illegible] können.

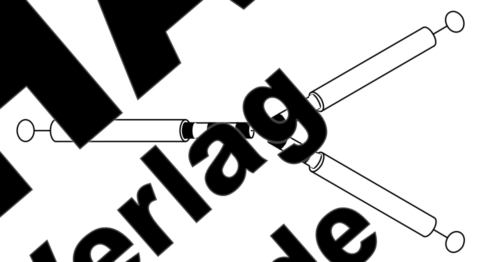
Anregung[illegible]nd Verbesse[illegible]ungswünsche zu diesem Arb[illegible]buch werden [illegible]erne entgeg[illegible]genommen und[illegible]nnen de[illegible] V[illegible]ag per Mail [illegible]er Adresse [illegible]ce@leh[illegible]bstverlag.[illegible] zug[illegible]endet werden.

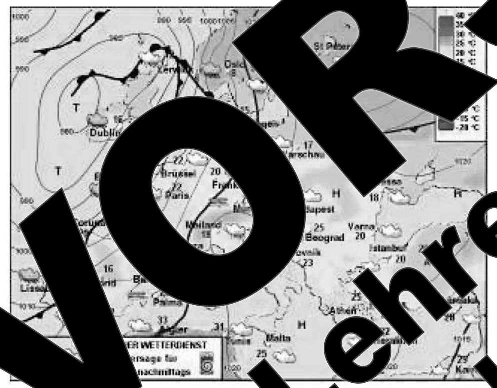
Vorbetrachtungen

Der Bezug zur Realität ist im Fach Mathematik häufig die Voraussetzung für d[illegible]zepta[illegible] Neues zu lernen. Daher sollen an dieser Stelle, bevor der Einstieg in das The[illegible]eare A[illegible]em sehr abstrakt und anwendungsfremd erscheinenden Gebiet der linearen [illegible]ssyst[illegible] erfolgt, zunächst einige Beispiele für praktische Anwendungen erläutert werden.

Vektoren in der Physik

Der der aus dem Physikunterricht bekannte Begriff d[illegible] Vektors spielt eine zentrale Rolle in der linearen Algeb[illegible]e Sie sicherlich wissen, besitzen alle Größen[illegible]e Richtung haben, einen vektoriellen Charak[illegible] Dies bedeute[illegible] beispielsweise bei Kräften, die in untersch[illegible]che Richtungen wirken, dass man die B[illegible]ge [illegible]einfa[illegible] addieren darf.



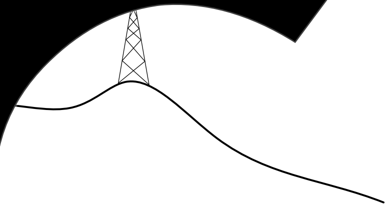


Wette[illegible]rte und line[illegible] Algebra

Die [illegible]rstellung v[illegible]n [illegible]etterkarten mit der Berechnung von Windstärke, Wi[illegible]ichtung und der Bewegung der Tief- und Hochdruck[illegible]iete basiert auf der Anwendung Vektorrechnung.

Computerspiele programmieren

Bei der Progr[illegible]d der dreidi[illegible]f einem [illegible] [illegible]g bzw. der linearen Algebra auf [illegible] [illegible]en Eindruck passenden Stellen des Bildsch[illegible] [illegible]iert.



Flugsicherung

Die Berechnung von[illegible] und Abständen b[illegible] Flugbewegungen[illegible]nfalls zusätzlich [illegible]r der Einbeziehu[illegible]richtung, wird [illegible]ilfe der linearen [illegible]. der [illegible]rrechnung ermö[illegible]

Raum für Notizen

Kapitel 1: Lineare Gleichungssysteme 2. Ordnung

Allgemeines

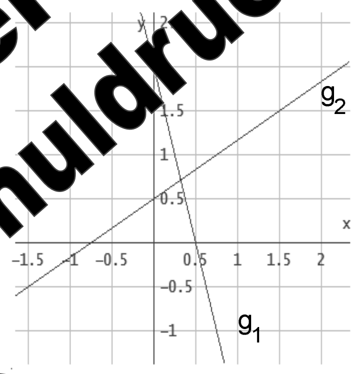
Der Umgang mit linearen Gleichungssystemen (LGS) gehört zu den [illegible] Arbeitstechniken der linearen Algebra. Neben vielseitiger Verwendung bei Anwen[illegible]ungspr[illegible] Sie lineare Gleichungssysteme bereits aus Schnittpunktberechnungen [illegible] Gerad[illegible]er auch aus Rekonstruktionsaufgaben von ganzrationalen Funktionen. In [illegible] K[illegible]el werden lineare Gleichungssysteme zunächst anhand von Schnittp[illegible]rob[illegible]ei G[illegible]aden in der Ebene behandelt, um die Bedeutung von Lösungen möglichst anschau[illegible] Im weiteren [illegible]rlauf des Kurses werden Sie feststellen, dass die Lösungen [illegible] chungssystemen [illegible] noch andere, auf den jeweiligen Kontext der Aufgabenstellung b[illegible]gene, Bede[illegible]en haben [illegible].

Aufgabe 1.1

Bekanntes aus neuem Blick [illegible]ttpunktproble[illegible] bei Geraden [illegible] der Ebene

Verdeutlichen Sie si[illegible]d der f[illegible]n Beispi[illegible] Schreibwe[illegible]n im Umgang mit linearen Gleichungssyste[illegible]inde[illegible] Sie die [illegible]echnungen für die drei dargestellten Fallbeispiele nachvollziehen und anschließend [illegible]ssung vervollständigen.

a) Beis[illegible]i Ge[illegible]n schneiden [illegible]



[illegible]ttpunktproblem in der Schreibweise der linearen Algebra

[illegible]gebildeten Geraden werden der Analysis [illegible] Funktionsschreibweise bzw. mit y links von Gleichheitszeichen dargestellt.

Gerade g_1: $y = -4x + 2$

Gerade [illegible]

[illegible]ebra können Gleichungen für Ge[illegible] wie folgt vorliegen, wobei je nach L[illegible]und y als x_2 bezeichnet werden k[illegible]gebildeten Geraden gilt dann:

Gerade g_1: $4x_1$ [illegible] oder $4x + y = 2$

Gerade g_2: $4x_1 - 6x$[illegible] er $4x - 6y = -3$

Umformen der Gerade II [illegible]

$y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4x - 6y = -$[illegible]

In der Analysis werden Schnittpunkte in der Regel durch Gleichsetzen berechnet:

$$g_1 = g_2$$
$$-4x + 2 = \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}$$
$$\frac{14}{3}x = \frac{3}{2}$$
$$x = \frac{9}{28} \approx 0{,}32$$

Einsetzen von x in eine der beiden Gleichung

liefert $y = \frac{5}{7} \approx 0{,}71$

In der linearen Algebra löst m die Gl ungs-systeme meist mit Hilfe des A ionsver ens oder Einsetzungsverfahrens. F eses B piel bietet sich das Additi erfahre man die zweite von der e chung rahiert:

$\text{I}\quad 4x + y$
$\text{II}\quad 4x - 6y =$ $-\text{II}$

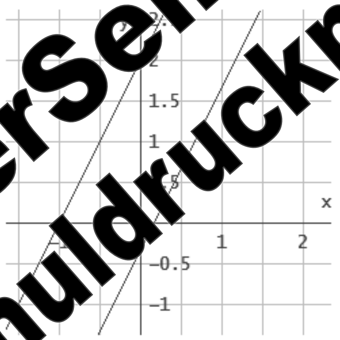
$y = \frac{}{7} = 0{,}71$

etze y in ei e der bei chungen liefert wie b Gleichsetzu gs ahren der Analysi

$= x \quad \frac{9}{28} \approx 0{,}32$

Der Begriff Additio sverfahren wird auch endet, wenn n ie Gleichungen subtrahiert.

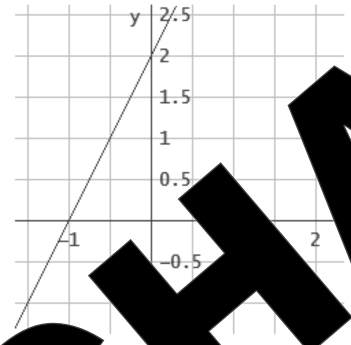
b) Beispiel 2: Zwei Ge n si parallel



Schreibweise in der Analysis	Schreibweise in der linearen Algebra
Die Abbildung $\frac{}{3}$ Schnittpunkt durch Gleichsetzen berechnen: aus: $2x + 2 = 2x + \frac{1}{3}$ $2 \frac{1}{}$ Wen ruch er .	Die beiden abgebildeten Geraden können auch folgt dargestellt werden. $= 2$ Mit Hi verfahrens erhält man hier analo tzungsverfahren einen Widerspruch $\text{I}\; -2x + y = 2 \;\vert \cdot$ $\text{II}\;\; 6x - 3y = 1$ $\text{I}\; -6x + 3y = 6$ $\text{II}\;\; 6x - 3y = 1 \;\vert \text{I} + \text{II}$ $0 = 7$ Wenn das Additionsverfa em Widerspruch führt kann m ext der Aufga nstellung auf para en s

---

c) Beispiel 3: Zwei Geraden sind identisch



Schreibweise in de Analy	Sc re weise in der li n Algebra
Bei zwei identischen G den in der Analysis auch identische chungen vor: g_1: $y = 2x$ g_2: $y = 2x +$ erk sofo ss man durch ichsetz ie Lösung 2 = 2 der 0 = 0, also allgem gültige Lösun erhält. D.h. bei V er Lösung in dieser Form k man schließ ss die beid n Geraden identisch ind. Damit ist das LGS für endlich viele W von x und v bar, da der Punkt f der Geraden Lösung für das LGS ist.	Be wei entischen G aden können sich die Glei ungen in de aren Algebra durch ein aches unte heiden: g_1: $-2x$ $y = 2$ g_2: $2y = -4$ it ilfe des Additionsverfahrens erhält man, links nebenan, den allgemeingültigen Ausdruck 0 = 0 und die gleiche Interpretation für das Ergebnis.

Zusammenfa Gleichungssystemen mit 2 Gleichungen und 2 Vari

nn es

____________ Lösung für jede der beide

2. __________ Lösung geben, da bei der Rechnung ein W ht, und

3. __________________ viele Lösungen geben.

Aufgabe 1.2

Allgemeine Betrachtungen zu linearen Gleichungssystemen mit zwei Variabl d me s zwei Gleichungen

Die Lösungsansätze vieler Aufgaben in der linearen Algebra führen auf li e ungssysteme mit zwei Variablen aber mehr als zwei Gleichungen. Man bezeichnet lche G eme auch als **überbestimmte** lineare Gleichungssysteme. Veranschaulichen S h an der folgenden Beispiele, wie die Lösung schrittweise berechnet wird und was dabei eachte den s. Übertragen Sie Ihre Überlegungen jeweils auf die Aufgabenstellungen in folge gaben:

Beispiel 1: Überbestimmtes LGS mit eindeut Lösung

Sch
Zu löse s LGS mit zwei Varia n ben zwei Gleichunge Daher ässt man für d Ermittlung v und y e der ungen zu st völlig ßer Acht. Man wählt ünstigsten chung mit len werten au ie keinen umfan eich Rechen wa warten lässt. Hi wird die Gle ung I zunächst w gelassen.

Schritt 1:
Die gegebenen Gleichungen mit den röm Ziffern und kennz nen un oti dass g he un einand ste

Schritt 3:
Rechts neben den Gleichungen angeben, welche Gleichungen addiert oder subtrahiert werden.

$$\begin{array}{lrl|l} \text{I} & 2x - y = & 4 & \\ \text{II} & x - y = & 1 & \\ \text{III} & x + y = & -3 & \text{II} + \text{III} \\ \hline & 2x = & -2 & \\ & x = & -1 & \end{array}$$

Schritt 4:
Additionsverfahren mit den zwei ausgewählten Gleichungen.

Schritt
Di gen, Addition endet wurde, erechnet werden. Man könnte auch Gleichung II nehmen.

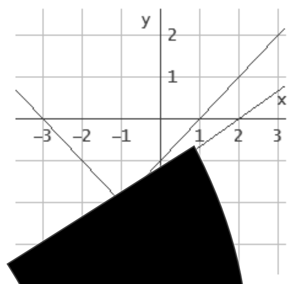
y = –3
–2

x und y in I einsetzen:) = 4
4

Lösung: (–1/–2)

Schritt
Beide die G esetzt werden. ung erfüllt, gibt ung für das LGS.

Geometrische Deutung Lösung:



en schneiden kt S(–1/–2).

Beispiel 2: Überbestimmte lineare Gleichungssysteme ohne Lösung

Oftmals hängen die notwendigen Schritte bei der Lösung von Gleichungssys n dav , welche Gleichungen für das Additionsverfahren verwendet werden und wel Gleichu achst weglässt. Dies soll durch die Lösungswege 1 und 2 für die folgend linea ichungssysteme verdeutlicht werden. Die einzelnen Lösungsschritte erfolgen analog 1.

Lösungsweg 1:

$$\begin{array}{lrl|l} \text{I} & -2x + 4y = & 6 & \text{I zunächst weglassen} \\ \text{II} & x - 2y = & 3 & \\ \text{III} & 3x + 2y = & 1 & \text{II} + \text{III} \\ \hline \text{IV} & 4x = & 4 & \\ & x = & 1 & \end{array}$$

x in II einsetzen: – 2y = 3

y = –

x und y in I ein en: + 4(–1) = 6
–2 – 4 = 6
–6 = 6 ⇒ Widersp

Lös keine

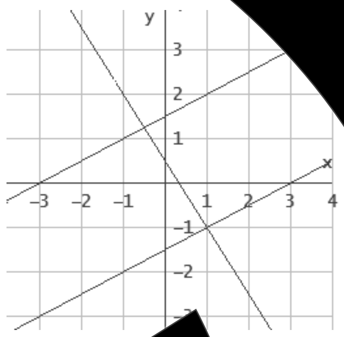
Bei einem überbestimmten LGS müssen die mit zwei Gleichungen ermittelten Lösungen immer in der nicht verwendeten Gleichung getestet werden.(Vgl. Schritt 5 bei Beispiel 1) Bei einem Widerspruch ist das gesamte LGS nicht lösbar.

Lösungsweg 2:

$$\begin{array}{lrl|l} \text{I} & -2x + 4y = & 6 & \\ \text{II} & x - 2y = & 3 & \text{I} + 2\text{II} \\ \text{III} & 3x + 2y = & 1 & \text{hst weglassen} \\ \hline \text{IV} & & & \end{array}$$

nach Wahl der Gleichungen kann der Widerspruch auch sofort auftreten.

Geometr Lösung:



t keinen gemein- Schnittpunkt, da raden parallel

Beispiel 3: Überbestimmte LGS mit unendlich vielen Lösungen

$$\begin{array}{ll|l} \text{I} & -2x+4y=-6 & \\ \text{II} & x-2y=\ \ 3 & \\ \text{III} & 3x-6y=\ \ 9 & 3\text{II}-\text{III oder I}+2\text{II oder }3\text{I}+2\text{III} \\ \hline \text{IV} & 0=0 & \end{array}$$

Je[illegible] Additio[illegible] Su[illegible]kti[illegible] führt zum Erge[illegible]is [illegible] alle drei Gleic[illegible] identisch sind.

Da alle drei Gleichungen identisch sind, steht [illegible] dem [illegible]blem, nur eine G[illegible]hung für die Bestimmung von x und y zu haben. Wie Sie [illegible]erlich bereits [illegible]en, benötig[illegible] für die Bestimmung von zwei Variablen auch zwei G[illegible]chungen[illegible]ie folgenden Überlegungen zei[illegible]n, wie man vorgehen kann, um dieses Probl[illegible] zu l[illegible]

Ermittlung einer allgemeingültige[illegible]

y frei wählen: $= r$

y in II einsetzen $x = [illegible] + 2r$

Lösung: $(3 [illegible] 2r / r)$

Info[illegible]
[illegible]a[illegible]s unendlich v[illegible]le Lösungen geben k[illegible]n, wählt ma[illegible]ls Lösung für y eine beliebige Z[illegible] Form eines **Parameters** $r \in IR$[illegible]

Man[illegible]net diese[illegible]ösung auch als parametrisierte Lösung, [illegible] sie vom Parameter r abhängt. Parametrisi[illegible] Lösungen hängen von der Wahl de[illegible] Paramters ab und können damit unterschiedlich sein.
Wählt man, wie in de[illegible]
$x = r$, ergi[illegible]

Alternative Lösung:

x frei wählen: $x = r$

x in II einsetzen:
$$\begin{aligned} r-2y&=3\\ -2y&=3-r\\ y&=\tfrac{1}{2}r-\tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

[illegible]g: $(r / \tfrac{1}{2}r-\tfrac{3}{2})$

Geometrische Bedeutung der parametrisierten Lösung:

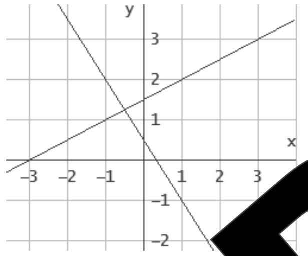
Fasst man jed[illegible]GS als Geradengleichung au[illegible]es sich um die gleichen G[illegible]en identisch sind. Formt man jede[illegible]ngen in die aus de[illegible]um erhält man für alle drei Gleichung[illegible]. Ein Vergl[illegible]arametrisier[illegible]ösung bei alternativer Lösung mit der Wa[illegible]zeigt, dass sic[illegible]g bei y der gleiche Ausdruck wie für die Gerade ergibt. Darau[illegible]htlich, dass ei[illegible]sierte Lösung eine Gerade beschreiben kann.

Beispiel 4

Im folgenden Beispiel entsteht durch Addition von Zeile I und II ein Ausdruc[illegible] Form [illegible]. Begründen Sie anhand der Abbildung und durch Vervollständigung des Textes, warum es [illegible]trotz[illegible] eine eindeutige Lösung gibt, die als Schnittpunkt von drei Geraden inte[illegible] werde[illegible]

$$\begin{array}{ll|l} \text{I} & -2x+4y=\ \ 6 & \text{I}+2\text{II} \\ \text{II} & x-2y=-3 & \\ \text{III} & 3x+2y=\ \ 1 & \text{III zunächst weglassen} \\ \hline \text{IV} & 0=0 & \end{array}$$

Bei ei[illegible] überb[illegible] [illegible]GS bedeut[illegible]e 0 = [illegible]eile nicht, dass [illegible]unen[illegible]iele [illegible]ungen gibt, da [illegible]we[illegible]assen Gleich[illegible]gen n[illegible]erücksi[illegible]igt werden [illegible]n.



Gleichung I u[illegible]leichun[illegible]repräsentieren [illegible]e ______________ Gerade.

Die [illegible] Gera[illegible]so ________________ un[illegible]gen über-

ei[illegible]iden Geraden [illegible]en daher genau [illegible]n ______________

______________ der Gerade[illegible]ie durch G[illegible]g III repräsentiert wird.

[illegible]eser [illegible]punkt i[illegible] ______________ des LGS.

$$\begin{array}{ll|l} \text{I} & -2[illegible]4y=\ \ 6 & \text{I z}[illegible]\text{nächst weg}[illegible]\text{ssen} \\ & [illegible]y=-3 & \\ & 3x[illegible]=\ \ 1 & \text{II}+\text{III} \end{array}$$

W[illegible]be[illegible]einem überbestimmten LGS eine 0= 0 Zeile entsteht, muss man das Lösungsverfahren mit anderen Gleichungen neu beginnen.

$x = -\frac{1}{2}$ [illegible]etzen in II lie[illegible] $y = \frac{5}{4}$. Damit ist (–0,5 / 1,25) die Lösung des LGS.

Übungen:

Prüfen Sie, ob die [illegible]ungssysteme eine eindeutige oder eine parametrisierte Lösung [illegible]e Lösung und ordnen Sie die Lösungen den Abb[illegible]en Beispielen dargestellt, auf eine

[illegible] $y=-2$
$[illegible]x-y=-1$
$x+2y=9$

(Lösung: (1/4))

b) $x+2y=8$
$-x+3y=6$
$2x+y=4$

(Lösung: keine)

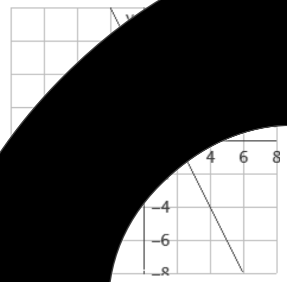
[illegible] $7x$[illegible]

(Lösung: [illegible]

d) $4x+2y=8$
$2x=4-y$
$3y=12-6x$

(Lösung: (r / 4-2r))

Abbildun[illegible]



[illegible]2

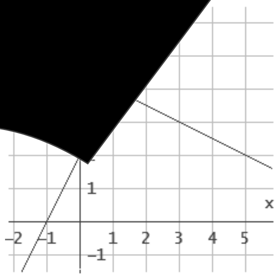
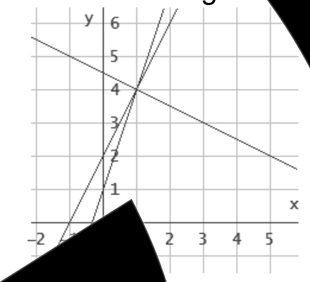
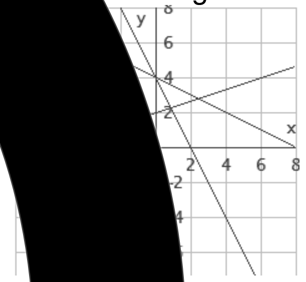


Abbildung 3



[illegible]bbildung 4



[illegible]r Rechnungen auf der folgenden Se[illegible]

Erg ungen: ____________________

____

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Alge ra
selbstorganisiert le en

Kap

Lineare Gleichungss
mit drei Variablen

Lineare Gleichungssysteme

Einführung in die Vektorrechnung

Geraden in der Ebene und i[illegible] Rau[illegible]

Ebe[illegible]un[illegible]

Lineare Abbildungen

Gesa[illegible]ebra selbstorganisiert erlernen ([illegible]-031-266)
St[illegible]

[illegible]rSelbstVerlag
[illegible]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[illegible]
[illegible]lehrerselbstverlag.de
[illegible]www.f-druck.de

Kapitel 2: Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen

Erweitert man die Betrachtungen der Ebene auf den dreidimensionalen Raum [illegible]komm[illegible] den Richtungen x und y eines Koordinatensystems in der Ebene die dri[illegible]ichtung [illegible]d[illegible]aum hinzu. Damit entstehen bei Aufgabenstellungen der linearen Algebra Glei[illegible]steme[illegible]rei Variablen enthalten können. Im Folgenden werden die für lineare Gleichungss[illegible]eme[illegible]wei Variablen erfolgten Untersuchungen auf die Betrachtung von linearen Gleichu[illegible]system[illegible]ariablen erweitert.

Um die Lösungsverfahren, wie bei den Geraden der [illegible]bene, [illegible]hst [illegible]chaulich zu deuten, sollen die bei der Lösung eines LGS erhaltenen Ergebnisse ge[illegible]utet werden. [illegible]eichungen der Form ax + by + cz = d oder ax + by = c oder ax + bz [illegible]c ko[illegible]als Eb[illegible]n im Raum [illegible]efasst werden. Damit kann man hier, entsprechend zu Ge[illegible] der E[illegible], das Lösen von [illegible]en Gleichungssystemen als Schnittpunktprobleme von E[illegible]nen im Raum [illegible]achten.

Aufgabe 2.1

Wie in der Ebene können auc[illegible]der Lösung ei[illegible] LGS die Mög[illegible]eiten keine Lösung, genau eine Lösung und [illegible] parametrisie[illegible] Lösung auf[illegible]n. Man mus[illegible]dings die Interpretation der Lösung auf die [illegible] Ebene[illegible]um übe[illegible]

① Keine Lösung [illegible]eute[illegible]ass die betrachteten Eb[illegible]en keinen [illegible]einsamen Punkt haben.

② Eine eindeutige[illegible]g [illegible]t, dass sic[illegible] betrachtete[illegible]benen genau in einem Punkt schn[illegible]

③ Ei[illegible]aram[illegible]erte [illegible]ng bedeutet, [illegible]ss es unen[illegible]viele Lösungen gibt, die als gemeinsame Sc[illegible]tgerade[illegible]r betrachteten E[illegible]en aufgefas[illegible]werden können.

[illegible]en [illegible]ur Ver[illegible]chaulichung [illegible]rei Lösungsm[illegible]ichkeiten von linearen Gleichungssystemen im Ra[illegible] de[illegible]gen die L[illegible]gsziffern ① [illegible]und ③ zu.

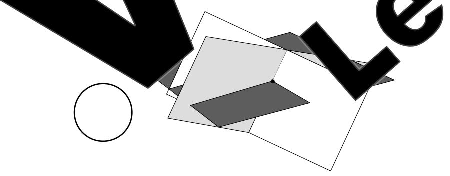


Abb. 2.1.1

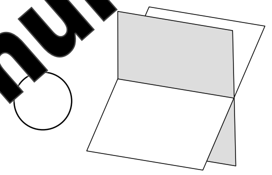


Abb. 2.1.2

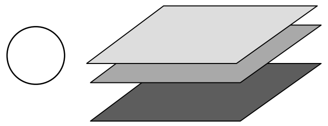


Abb. 2.1.3

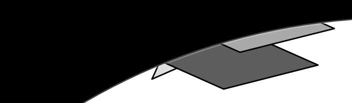


Abb. 2.1.4

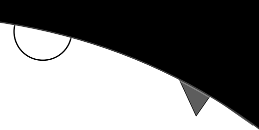


Abb. 2.1.5

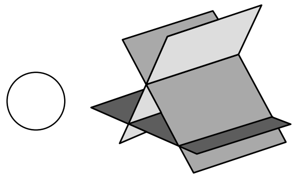


Abb. 2.1.6

Aufgabe 2.[illegible]

Gleich[illegible]ungen, drei Variablen und gena[illegible]ng

Be[illegible]nearer Gleichungssysteme höherer Ord[illegible]man systematisch [illegible] Möglichkeit hi[illegible]u stellt das Additionsverfahren nach Gauß [illegible]annte **Gauß-**[illegible]ar.

[illegible]chen Sie sich anhand des folgenden Beisp[illegible]ier verwendete [illegible]nde Abwandlung [illegible]ahrens, und lösen Sie anschließend an[illegible] Übungsaufgabe[illegible]

Beispiel:
$$\begin{aligned} 2x + y + 3z &= -3 \\ x - y - z &= 4 \\ 3x - 2y + 2z &= 5 \end{aligned}$$

Lineare Gleichungssystem mit dem Additionsverfahren lösen:

Schritt 1:
Die Gleichungen fortlaufend durchnummerieren

Schritt 2:
Gleichung I mi Gleic gen II und III so addi en ode rahi , dass die Variab

Schrit
Mit den hungen IV und V wie be em LGS mit zwei Variablen we echnen un amit eine der en verbleibenden Variablen eliminiere

$$\begin{array}{lr|l} \text{I} & 2x + y + 3z = -3 & \\ \text{II} & x - y - z = 4 & \text{I} \ \ \text{II} \\ \text{III} & 3x - 2y + 2z = 5 & \ \ \text{2III} \\ \hline \text{IV} & 3y + 5z = -11 & \\ \text{V} & 7y + 5z = -1 & \text{V} \\ \hline \text{VI} & -4y & \\ & -2 & \end{array}$$

Schritt 4
Das Er , je nach Rechen- auf in die Gleichung IV einsetzen und die nste Variable berechnen.

y in IV n $\ \ 3 \cdot (-2) \ \ z = -11$
$-6 \ \ z = -11$
$z = -5$
$z = -1$

Schritt 5:
Beide Ergebnisse in die erste Gleichung einsetzen und die Variable x berechnen.

nd y etzen $\ \ 2 - 2 + 3 \cdot (-1) = 3$
$2x - 2 - 3$
$2x = 2$
$= 1$

ng: (1/–2/–1)

Es existiert eine eindeutige Lösung. Die Lagebeziehung der Ebenen entspricht damit der Abb. 2.1.1

Übungen:

Ü2.1 Lösen Sie die folgenden l Gleichungssysteme:

a)

ontrolle
(4/3/2)

---

b)
$$\begin{aligned} 5x - 3y + z &= 19 \\ 2x + 3y + z &= 4 \\ x - 2z &= 1 \end{aligned}$$

Zur Kontrolle:
(3/–1/1)

ar eichun systeme ohn dditionsver n lösen

Ko en in LGS in j Zeile nicht iablen vor, so kann man die Lösung oft auch ohne Add nsverfahren ermitt n.

Ge n ist das fo e LGS

Zeile 2 ert schon das Ergebnis für y.

I $\ \ 3x - 5y$
II

y einsetzen in III:
$$\begin{aligned} 2x + 2 &= 0 \\ 2x &= -2 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

y und x einset $\ \ 1) - 5 \cdot 2 - 2z = -1$
$-10 - 2z = -1$
$-2z = 12$
$z = -6$

1 / 2 / –6)

Ü2.2 Lösen Sie das folgende LGS ohne Anwendung des Additionsverfahrens

$$\begin{aligned} 2x + 3z &= 3 \\ 4x &= 6 \\ 2x + 3y - 2z &= 2 \end{aligned}$$

Zur Kontrolle:
$\left(\frac{3}{2} / -\frac{1}{3} / 0\right)$

Aufgabe 2.3

Gleich ssy e r rei Gleich n, drei Varia len und keiner Lösung

u wi ei linearen Gleichungssystemen mit zwei Variablen kann es bei der Lösung eines linearen Gle stems mit drei Va ablen zu Wide ü chen kommen. Das LGS ist dann nicht lösbar.

Zeigen Sie durch Ergänzen der folgenden Rechnung, dass ein Widerspruch entsteht und das LGS nicht lösbar ist.

I x + 2y − z = 1
II x + y
III

en

y − z = 1 | IV – III

___ =___ ⇒ Widerspruch, kei

Es existiert keine Lösu
Lagebeziehung der Eben
damit der Abb. 2.1.3 oder
2.1.6 entsprechen.

Aufgabe 2.4

Gleichungssysteme mit drei Variablen und unendlich vielen Lösungen

Abbildung 2.1.5 zeigt drei Ebenen, die als gemeinsame Punkte ein gerad . Das bedeutet, dass es unendlich viele Punkte gibt, die gleichzeitig zu allen drei Eb n g . Interpretiert man jede der drei Gleichungen eines linearen Gleichungssystem als enengl gibt es unendlich viele Werte, die dieses LGS lösen, nämlich alle Punkte, die der S geraden liegen. Entsprechend zur Aufgabe 1.2 Beispiel 3 erhält man eine parametri erte L

Bearbeiten Sie das Beispiel, indem Sie die fehlenden nschr ergänzen.

I x + 2y + 2z = 1
II 2x + z = 3 | 2I – II
III 3x + 2y + 3z = 4 | – III

IV ___ =

V ___ = ___ | IV – V

0 =

z fr ählen: z = 4r

in setz 4 = −1
4y = −1 − 1
y = 3r

z und y in I einsetzen: $x + 2(-\frac{1}{4} - 3r) + 2 \cdot 4r = -1$

= ___

___ − ___r

mögliche Lösung: $\left(-\frac{1}{2} - 2r / -\frac{1}{4} - 3r / 4r\right)$

D Gleichung IV und identisch sind, als für die Bestimmung der Variablen y und z nur eine Gleichung bleibt, gibt es unendlich viele Lösungen, und man kann wie bei den linearen Gleichungssystemen mit zwei Variablen beispielsweise z frei wählen. Wenn man z = 4r wählt, entstehen wenig Brüche.

werden s en, aus dieser Lösung eine engleichung erzeugt.

Beachten Sie, d metrisierte Lösung von der W meters r bzw. vom Vielfachen vo nd sich hier unterschiedliche Lös ben können.

Aufgabe 2.5

Unterbestimmte lineare Gleichungssysteme mit 3 Variablen

Während bei den späteren Aufgabenstellungen überbestimmte lineare G[illegible]ssyste[illegible] drei Variablen praktisch keine Bedeutung haben, werden jedoch häufiger **unte[illegible]esti[illegible]** lineare Gleichungssysteme auftreten. Das sind lineare Gleichungssyste[illegible] bei de[illegible] Gleichungen als Variablen vorhanden sind. Da das Beispiel von Aufgabe 2.4. stre[illegible]nomi[illegible]u dieser Sorte von linearen Gleichungssystemen zählt, ist das Lösungsverfah[illegible]n verg[illegible]ar.

Bearbeiten Sie das Beispiel, indem Sie die fehlenden Rech[illegible]itte er[illegible]zen.

Beispiel:

I $\quad x + 2y + z = 3$
II $\quad 2x + y + z = 1$ | 2I

___+ ___ = ___

z = 5

We[illegible] nur noch ei[illegible] Gl[illegible]chung f[illegible]zwe[illegible]Variablen vo[illegible]nden ist, kan[illegible]ine Variab[illegible] ([illegible]ier ist es [illegible]nstig r f[illegible] y zu wählen) frei ge[illegible]ählt werden.

mit y = r

ergibt sic[illegible] z: [illegible] – 3r

eins[illegible]en [illegible] 2 __+ ___________

x = ___________

Lö[illegible] (r[illegible]2 / r / [illegible] – 3r)

Begründen Sie, warum die geometri[illegible]e Deutung dieser Aufgabe der Abbildung Abb.2.1.2 entspricht, und erläutern Sie, wie man die Lösung anschaulich interpretieren kann.

Ergä[illegible]ngen:

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Alge[illegible]
selbstorganisiert [illegible]rle[illegible]en

Kap[illegible]

Koordinatensyst[illegible]

Lineare Gleichungssysteme

Einführung in die Vektorrechnung

Geraden in der Ebene und Rau

Ebe

Lineare Abbildungen

Gesa bra selbstorganisiert erlernen (-031-266)
S

SelbstVerlag
tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ
lehrerselbstverlag.de
www.f-druck.de

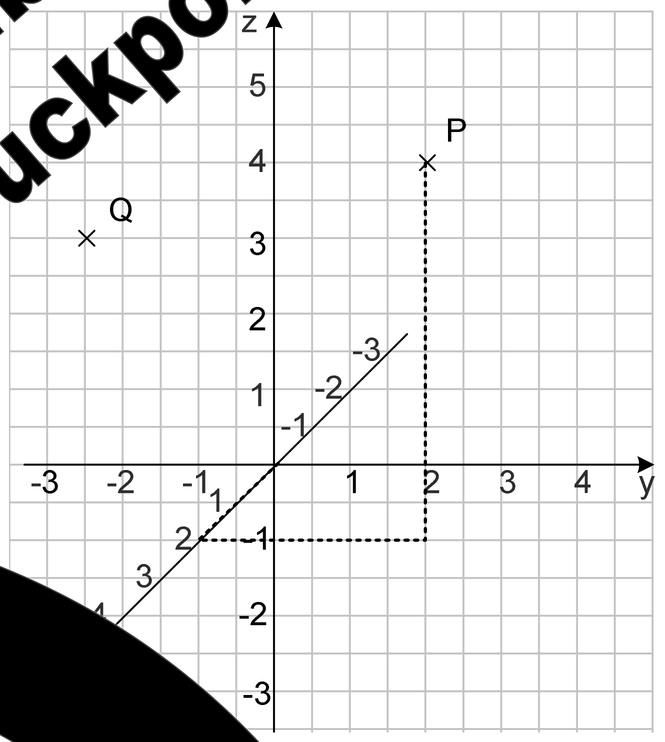
Kapitel 3: Koordinatensysteme

1. Koordinaten in der Ebene

Die Darstellung von Punkten in der Ebene ist Ihnen hinlänglich bekannt. Alle Punkte liegen in der Papierebene, und man kann bei gegebenen Koordinaten einen Punkt p(x/y) im Koordinatensystem eintragen und die Koordinaten eines markierten Punktes, hier A(2/3), direkt ablesen.

Die x-Achse kann auch mit x_1-Achse u ie y-Achse auch mit x_2-Achse bezeichnet rden.

2. Koordinaten im Ra



Für die Darste vo nkten im Raum trifft man in der Rege reinbarun

Die sen e y- x_2-Koordinate d die z- b x_3-Koo ate liegen in der pierebene.

e x- se wird als Diagonale eichn zeigt se aus der erebene nach vo raus, wobei nde der Skala rzt gezeich erden. Form der arstellung wird als Kavalierperspektiv bezeichne

Hier: Abstand y- und z-Achse zwei Kästchen
Abstand x-Achse ein Kästchen diagonal

Die Punkte Pap

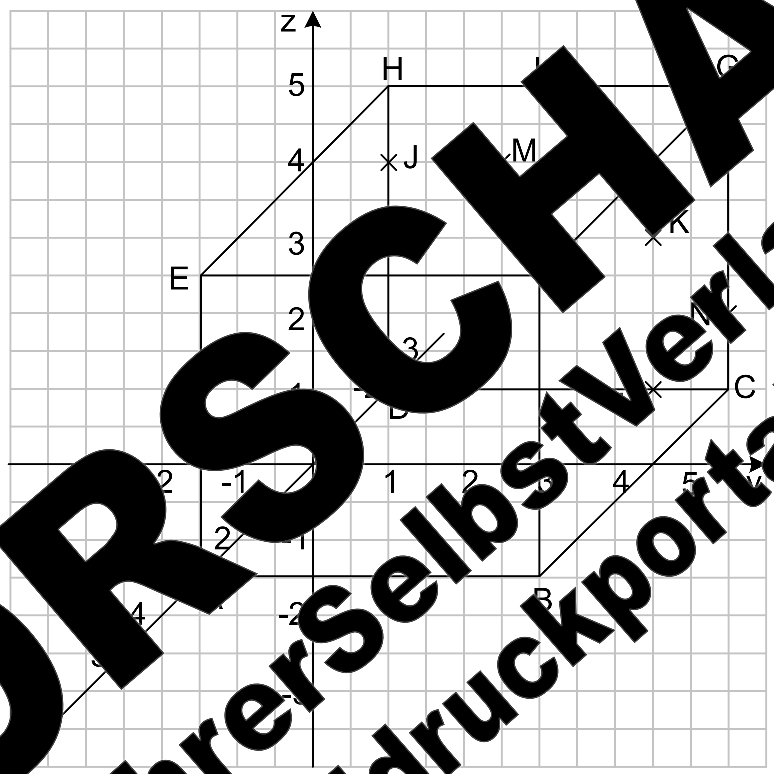
as Eintragen bzw. Ablesen von Punkt P(2/3/5) erfolgt mit Hilfe der gestrichelten Hilfslinie: vom Ursprung ausgehend 2 Einheiten nach vorne entlang der x-Achse. 3 Einheiten nach rechts parallel eiten nach oben par

Fü eutige Aussage keine Hilfslinien d.

n Wahl der Skalierung können räumliche te verzerrt erscheinen. Beispielsweise k ürfel wie ein Quader aussehen.

Übungen

Ü3.1 Koordinaten ablesen und eintragen.



a) [illegible] Sie die Eckpunkte des Quaders.

A (___/___/___) B (___/___/___) C (___/___/___) D (___/___/___)

E (___/___/___) F (___/___/___) G (___/___/___) H (___/___/___)

b) Bestimmen Si[illegible] Koordinaten der eingezeichneten Punkte.

[illegible] L (___/___/___)

[illegible] N (___/___/___)

[illegible] Tragen Sie die folgenden Punkte ein. Verwenden Sie, w[illegible] Hilfslinien:

P(1/0/0) Q(4/-1/3) R(3/4,5/–2) S(–1/1/3)

[illegible] Übungen: ______________________________

____

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Alge[illegible]

selbstorganisiert [illegible]

Kap[illegible]

Grundlegendes zu de[illegible]n

Gesa[illegible]bra selbstorganisiert erlernen ([illegible]-031-266)
St[illegible]

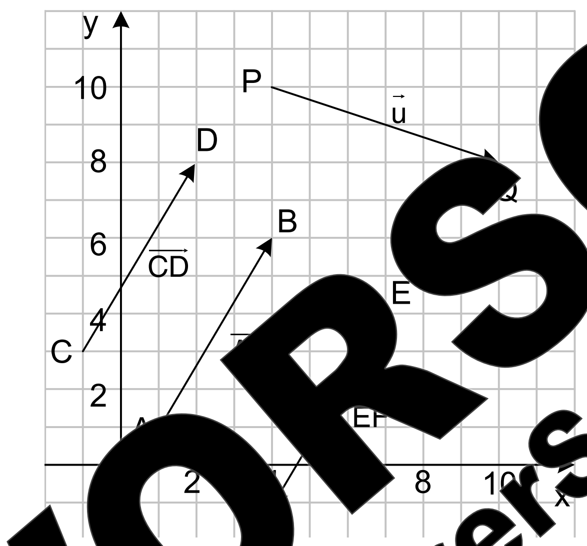
[illegible]SelbstVerlag
[illegible]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[illegible]
[illegible]lehrerselbstverlag.de
[illegible]www.f-druck.de

Kapitel 4: Grundlegendes zu Vektoren

Vektoren in der Ebene

Aufgabe 4.1

In der folgenden Abbildung sind Vektoren in der Ebene dargestellt. [illegible] sich die Zusammenhänge, indem Sie die gegebenen Informatione[illegible]charb[illegible] [illegible]hlende Angaben ergänzen.



[illegible] s[illegible]ie Punkte:

A(1[illegible]3(4/6), C(–1[illegible]3), [illegible]3), E(7/4), F(4/–1)

[illegible]___/___), Q(___/___)

Vektoren werden durch einen Pfeil über den Buchstaben, der immer von links nach rechts zeigt, gekennzeichnet. Wie bei Strecken verwendet man entweder die großen Buchstaben von Anfangs- und Endpunkt oder einen kleinen Buchstaben.

Ke[illegible]eichnen von Vekto[illegible]:

[illegible] von A nach B [illegible] als Vektor $\overrightarrow{AB}$ [illegible]zeichnet.

Der [illegible]eil von C nach [illegible] wird als V[illegible]tor ____ bezeichnet.

Der Pfeil von E nach F wird als [illegible]ektor ____ bezeichnet.

Der Pfeil von P nach Q wird als Vektor ____ bezeichnet.

Sp[illegible]

[illegible] Verschiebung eines [illegible]telle im Koordinatensystem an. Diese [illegible]ebung wird mit Hilfe der Spaltenschreibweise [illegible]

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EF} =$ [illegible] $\vec{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

Vers[illegible]

Verschiebung um
–3 in x-Richtung
–5 in y-Richtung

[illegible]g um
___ [illegible]tung
___ [illegible]ung

F[illegible]

[illegible]oren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ bewirken die gleiche Verschiebung. Sie gehö[illegible]r gleichen [illegible]**klasse**.

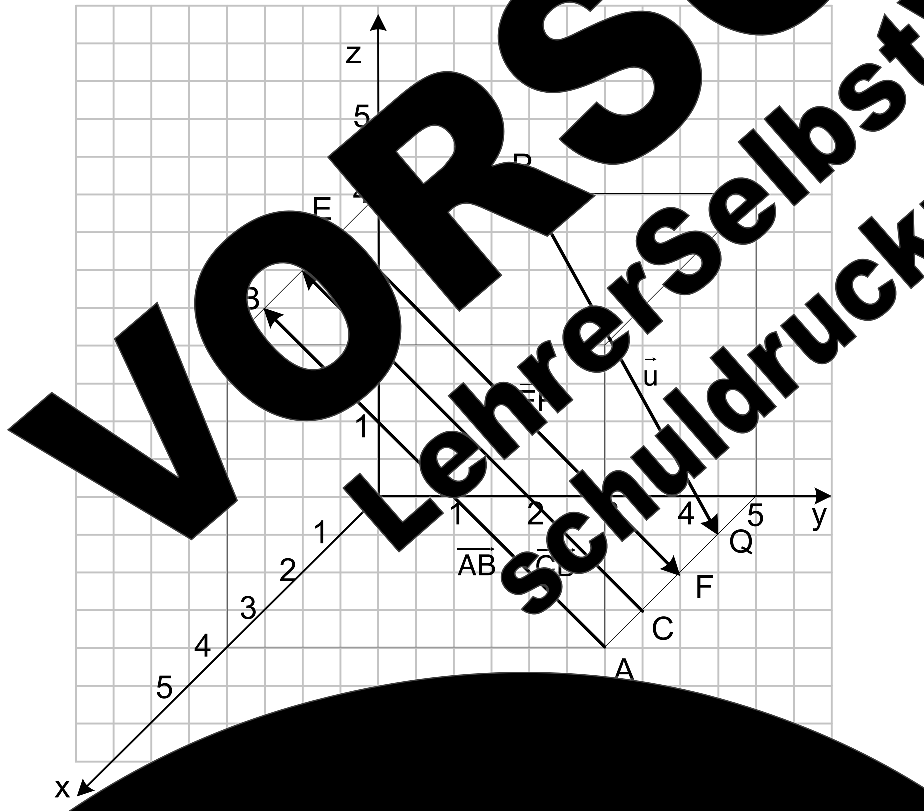
[illegible]ektoren $\overrightarrow{AB}$ bzw. $\overrightarrow{CD}$ und der Vektor $\overrightarrow{EF}$ si[illegible] lang, aber entg[illegible]et. Man [illegible]chnet solche Vektoren als **Gegenvekt[illegible]**

Vektoren im Raum

Aufgabe 4.2

Die Betrachtungen zur Vektordarstellung in der Ebene können direkt auf [illegible] werden. Man muss lediglich beachten, dass die Vektoren im Raum drei Komponen[illegible] in der Spaltenschreibweise in der Form $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dargestellt werden.

In der folgenden Abbildung sind Vektoren im Ra[illegible] [illegible]itteln Sie di[illegible], deren Anfangs- und Endpunkte C, D, E, F, P sowie Q [illegible] bestimmen [illegible] die Vekto[illegible], $\overrightarrow{EF}$ sowie $\overrightarrow{PQ}$ in Spaltendarstellung.



A(4/5/0)
B(3/0/4)
C(___/___/___)
D(___/___/___)
E(___/___/___)
F(___/___/___)
P(___/___/___)
Q(___/___/___)

[illegible] $\begin{pmatrix} \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{pmatrix}$ [illegible]

Ergänzen Si[illegible]

Die Ve[illegible] $\overrightarrow{EF}$ sind ____________________vektoren, da sie gleich [illegible] entge[illegible] sind.

Berechnen von Vektoren aus den Koordinaten der Endpunkte

Aufgabe 4.3

Der Vektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ aus Aufgabe 4.1 wurde durch Abzählen der [illegible] im Ko[illegible]ensytem ermittelt. Sie haben bei Aufgabe 4.2 vielleicht schon festge[illegible]lt, das[illegible] [illegible]ten auch direkt aus dem Anfangs- und Endpunkt des Vektors ermittelt werden [illegible]en.

Koordinate der Pfeilspitze: B(4/6) ―――― [illegible]ordinate de[illegible] [illegible]ilendes: A(1/1)

Koo[illegible] [illegible]n des [illegible]rs

[illegible] $= \begin{pmatrix} 4-1 \\ 6- \end{pmatrix}$ [illegible] $\begin{pmatrix} \\ 5 \end{pmatrix}$

Ko[illegible]inaten de[illegible]

[illegible]rdinaten [illegible]es Pfeilendes

Überprüfen Si[illegible] [illegible]es [illegible]fahren für den Vekto[illegible] aus Aufgab[illegible] 4.2

Grundlegende Defi[illegible]ionen und Zusammenhänge

- Die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ sind jeweils **Repräsentanten** der gleichen Klasse von Vektoren $\vec{v}$, die eine Verschiebung eines Punktes um [illegible] [illegible]tung bzw. v_3 in z-Richt[illegible] $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$
- [illegible] und $\vec{v}$ sind gleich lang, [illegible] [illegible]nt daher den Vektor $\vec{v}$ **Gegenvektor** [illegible] [illegible]chreibweise für Ebene entsprechend) [illegible] $-\vec{u} = -\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_1 \\ -u_2 \\ -u_3 \end{pmatrix}$
- Ein Vektor, der einen Punkt A auf sich selbst abbildet (also keine Verschieb[illegible] **Nullvektor** genannt. [illegible] $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- [illegible] $\overrightarrow{AB}$ werden aus den [illegible] Punkte A([illegible]a_2/a_3) und B (b_1/b_2/b_3) durch [illegible]ldung der einzelnen Komponenten a_1, a_2 und a_3 und [illegible]nd b_3 berechnet: [illegible] Ebene gilt Entsprechendes.) $\overrightarrow{AB} =$ [illegible]

Übungen

Ü4.1 Gegeben ist der Vektor $\overrightarrow{AB}$

a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors $\overrightarrow{AB}$ in Spaltendarstellung.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{pmatrix}$$

b) Zeichnen Sie einen weiteren beliebigen Repräsentanten der Klasse des Vektors $\overrightarrow{AB}$ ein.

c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Gegenvektors von $\overrightarrow{AB}$ in Spaltendarstellung und zeic[illegible]en Si[illegible] einen beliebigen Repräsent[illegible] Gegenvektors von [illegible]

Gegenvektor: __[illegible]

d) [illegible]ich[illegible] Sie a[illegible]ehend vom [illegible] P(4/0/0) e[illegible]en Repräsentanten des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

[illegible]d geben [illegible]ie die [illegible]oordinate[illegible] Gegenvektors an. Gegenvektor: ____ = $\begin{pmatrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{pmatrix}$

Ü4.2 Bestimmen Sie den Vektor $\overline{AB}$ [illegible]s den Koordinaten der Punkte A(a_1/a_2) und B (b_1/b_2) der Ebene bzw. A($a_1/a_2/a_3$) und B($b_1/b_2/b_3$) des Raumes für folgende Punkte:

a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
A(2/1[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]/7)	A(2/7/4)	A(3/1/-2)	A(0/-3/1)
B[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	B(3/-2/0)	B(-1/4/-1)	B(-2/-1/3)

E[illegible]bungen:____

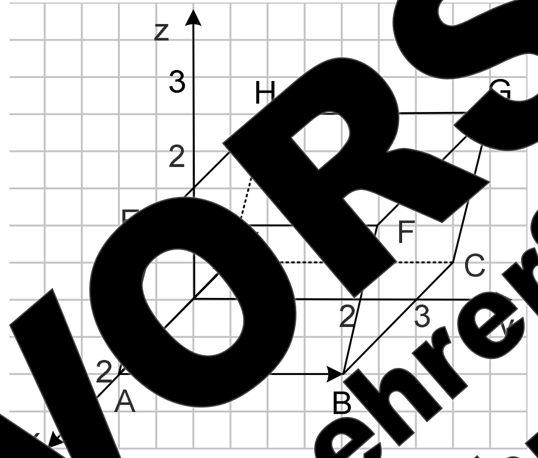
Ortsvektoren

Aufgabe 4.4

Gegeben ist der unten dargestellte verzerrte Quader. Man bezeich[illegible] Körp[illegible] **Spat**. Gegeben sind die Punkte A(2/0/0), B(2/3/0), C(-1/3/0) und E (2/0,5/2). Bearbe[illegible] Si[illegible] Aufgabenstellung unter Anwendung der folgenden Definition:

Definition Ortsvektor:

Ein Vektor $\vec{a}$, der im Ursprung O des Koor[illegible]tens[illegible]ms beg[illegible]nt und d[illegible]feilspitze am Punkt A endet, wird als Ortsvektor b[illegible]net. De[illegible]tsvektor er[illegible] zum Namen des Punktes zugehörigen kleinen Buch[illegible]ben: $\vec{a}$ = [illegible]



a) Geben Sie die Ortsvek[illegible] zu allen Eckpunkten an.

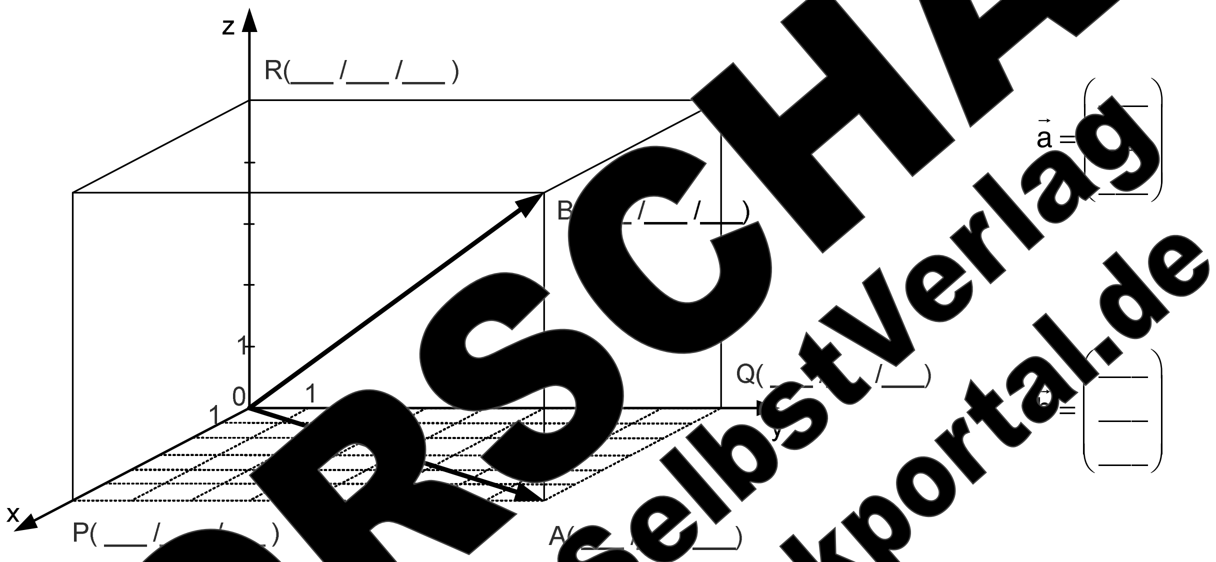
b) Bestimmen Sie d[illegible] Koordinatendarstellung der Vektoren [illegible] = $\overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ und $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$. Welche w[illegible]en Vektoren gehören zur gleich[illegible]ektorklasse wie $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$

c) Bestimmen Sie die Vektoren $\overrightarrow{A?F}$[illegible], $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{CH}$, $\overrightarrow{BD}$ und $\overrightarrow{HF}$

Der Betrag von Vektoren

Aufgabe 4.5

Gegeben ist das folgende Koordinatensystem mit den Ortsvektoren $\vec{a}$ u[illegible]



a) Die [illegible] [illegible] R, [illegible]nd B liegen [illegible] Ecken [illegible] eingezeichneten Quaders. Tragen Sie die Koor[illegible]ten [illegible] in de[illegible] [illegible]ng sowi[illegible] Koordinaten der Ortsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ein. [illegible]stim[illegible]n Sie dann die Länge [illegible] folgende[illegible] [illegible]ecken:

$\overline{OP}$ = [illegible] LE [illegible]Q = ____ LE $\overline{OR}$ = ____ LE

b) Erläutern Sie, wie die Länge der [illegible]cken $\overline{OA}$, $\overline{AB}$ und $\overline{OB}$ berechnet wurden.

$\overline{OA} = \sqrt{36+64} = 10$	[illegible] 5	$\overline{OB} = \sqrt{100+25} = 11{,}2$

Definitio[illegible]

Der [illegible]B im Koordinatensystem wird als La[illegible]recke $\overline{AB}$ [illegible] Übertragen [illegible] die Vektorrechnung gilt Entsprechende[illegible]tand [illegible]angs- und Endpunkt eines Vektors $\overrightarrow{AB}$ entspricht der Läng[illegible]tors und [illegible]etrag des Vektors $\overrightarrow{AB}$ bezeichnet. Man sch[illegible]t z. B.:

$$\left|\overrightarrow{OA}\right| = 10\,LE \quad \text{oder ei[illegible]} \quad \left|\overrightarrow{AB}\right| = 5$$

c) Erläutern Sie den folgenden Ansatz für die Berechnung der Strecke $\overline{OB}$ [illegible]w. des [illegible]ges des Vektors $\overrightarrow{OB}$. Formulieren Sie dabei auch, welcher Zusammenhang mit d[illegible]ordina[illegible] des Ortsvektors $\vec{b}$ besteht. $\overline{OB} = \left|\overrightarrow{OB}\right| = \sqrt{\left|\overrightarrow{OP}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OQ}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AB}\right|^2} = \sqrt{6^{[illegible]} [illegible] + 5^2} =$ [illegible] $+ 25 = 11{,}2$

____

____

____

____

d) Erläutern Sie unter Verwendung [illegible] ma[illegible]atisch[illegible] Fachau[illegible] *Summe*, *K[illegible]enten* des *Vektor*, *Wurzel* in eigenen W[illegible] wie de[illegible]nes Vekto[illegible] [illegible]echnet wird.

Berechnen des Be[illegible]gs e[illegible] Vekt[illegible]

Betrag eines [illegible]ktors [illegible] in de[illegible]e: $[illegible] = \begin{pmatrix} [illegible] \\ a_2 \end{pmatrix}$ [illegible] $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2}}$

Be[illegible] Vekt[illegible] $\vec{a}$ im Raum: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_{[illegible]} \end{pmatrix} \Rightarrow \left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + a_3^{\,2}}$

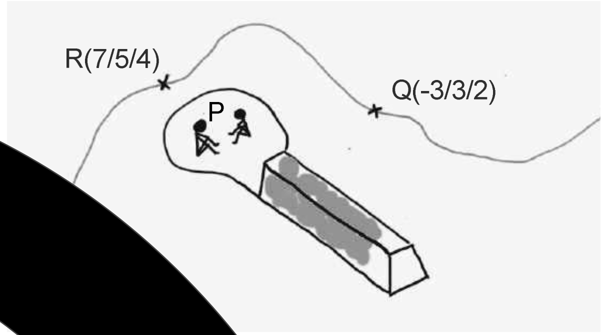
____

____

____

Übungen

Ü4.3 In einem Bergwerk sind nach dem Einsturz eines Schachtes Bergleute an der Stelle P(5/8/3) verschüttet[illegible] Sauerstoff zu[illegible] [illegible] [illegible]eisen Sie durch Rech[illegible] [illegible] die Stelle R für die Bohrung am günstig[illegible] ist.



[illegible]nde Übungen: ______________________________

Die Definition des Einheitsvektors

Aufgabe 4.6

Zeigen Sie mit Hilfe der folgenden Definition, dass die Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$, $= \begin{pmatrix} 6 \\ \\ 8 \end{pmatrix}$ d $\vec{w} = \frac{1}{19}\begin{pmatrix} 6 \\ -10 \\ 15 \end{pmatrix}$

Einheitsvektoren sind.

Definition Einheitsvektor:
Ein Vektor der Länge 1 bzw. mit dem Betrag wird als nheitsvekt eichnet. Da gilt:
in der Ebene: $|\vec{a}| = 1$ **also** $+ a_2^2$
im Raum $|\vec{a}| = 1$ **also** $+ a_3^2 = 1$

Ergä gen:

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Alge ra

selbstorganisiert rle en

Ka

Rechnen mit Vekt

Lineare Gleichungssysteme

Einführung in die Vektorrechnung

Geraden in der Ebene und i Rau

Eben un

Lineare Abbildungen

Gesa ebra selbstorganisiert erlernen (-031-266)
St

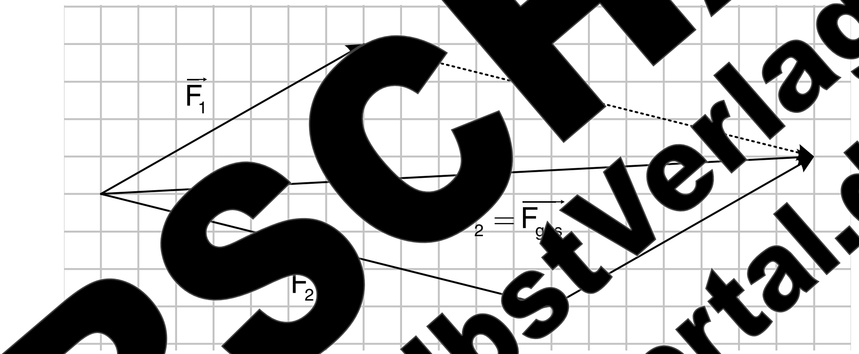
SelbstVerlag
tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ
lehrerselbstverlag.de
www.f-druck.de

Kapitel 5: Rechnen mit Vektoren

Addition und Subtraktion von Vektoren

Aufgabe 5.1

Aus dem Physikunterricht ist Ihnen bereits die Addition und ubtrakt zw fte mit Hilfe von Kräfteparallelogrammen bekannt. Die Addition und Subtra von V beruht auf dem gleichen Prinzip.

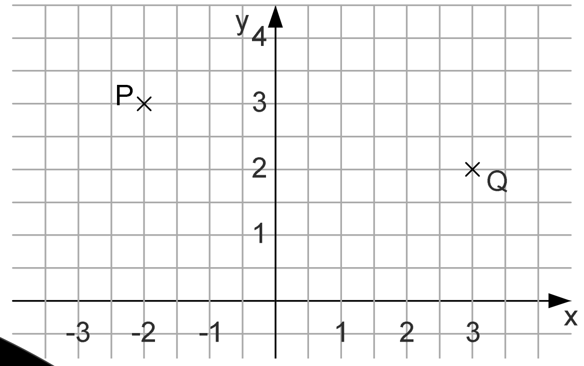


1. Addition von Ve

a) Z ne Ad n in der Ebene

Z nen Sie e Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ausg on Pun as oordinatensystem ein.

chnen Sie nach den Vekt a ausgehend von der Spitze des Vektors nd den Vektor $\vec{b}$ ausgehend von der Spitze des Vektors $\vec{a}$ ein zweites Mal ein. Diese beiden Repräsentanten von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ treffen mit ihren Spitzen den Punkt Q. Verbin tor



b) Rechnerische Addition in der Ebene

Rechnerisch kann man zwei Vektoren addieren, indem ma ten der Vektoren komponent ühren Sie dies anhand der We eispiel oben durch und vergl nen Wert.

$2 \Big) = \begin{pmatrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{pmatrix}$

gleich: ______________________________

2. Subtraktion von Vektoren $\vec{a}-\vec{b}=\vec{d}$

a) Zeichnerische Subtraktion

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$. Zeichnen Sie den Vektor $\vec{a}$ ausgehend von Punkt P in das Koordinatensystem ein.

Zeichnen Sie danach den Gegenvektor vo[illegible] also $-\vec{b}=\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ ausgehend von der Spitz[illegible]es Vektors $\vec{a}$ ein. Die Spitze des [illegible]vektors von $\vec{b}$ liegt im Punkt Q. Verbi[illegible] d Q durch den Vektor $\overrightarrow{PQ}=$ [illegible] und [illegible] Sie d[illegible] Koordinaten von $\vec{d}$ [illegible]eichnu[illegible]

$\vec{d}=\begin{pmatrix}\_\_\_\\\_\_\_\end{pmatrix}$

b) Re[illegible]che Su[illegible]aktion in der [illegible]

[illegible] Sub[illegible]ion e[illegible]pricht der A[illegible] des Ge[illegible]ktors. Berechnen Sie $\vec{d}$ und vergleichen Sie m[illegible] em Z[illegible]ch ermi[illegible] Wert.

$[illegible]=\vec{a}+(-[illegible])=\begin{pmatrix}\_\_\_\\\_\_\_\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\_\_\_\\\_\_\_\end{pmatrix}[illegible]\begin{pmatrix}\_\_\_\\\_\_\_\end{pmatrix}$

Vergleich: ____

Die in der [illegible] Subtraktion von Vektoren können direkt auf B[illegible] die Merksätze.

[illegible]n Vektoren:
[illegible] Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ werden addiert, indem man die Koordina[illegible]nweise addiert:

Ebene: = $\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1\\ [illegible]\end{pmatrix}$ [illegible] Raum: $\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+$ [illegible] $\begin{pmatrix}\_\_\_+\_\_\_\\\_\_\_+\_\_\_\\\_\_\_\end{pmatrix}$

Subtr[illegible]ektoren:
Der [illegible]d vom Vektor $\vec{a}$ subtrahiert, indem man zu $\vec{a}$ den ____________________
vo[illegible]

Aufgabe 5.2

Addiert man zu einem Vektor seinen Gegenvektor, so erhält man in der [illegible]ne un[illegible] Raum den Nullvektor. Ergänzen Sie die fehlenden Angaben:

$\vec{a}+(-\vec{a})=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-a_1\\-a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\vec{0}$ [illegible]ullvekt[illegible] [illegible]e

$\vec{a}+(-\vec{a})=\begin{pmatrix}\_\_\_\\\_\_\_\\\_\_\_\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\_\_\_\\\_\_\_\\\_\_\_\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\_\_\_+\_\_\_\\\_\_\_+\_\_\_\\\_\_\_+\_\_\_\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\_\_\_\\ [illegible]\\ [illegible]\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{\_\_}$ Nullve[illegible]r im Ra[illegible]

Aufgabe 5.3

Für das Rechnen mit reelle[illegible]ahl[illegible]ten [illegible] Kommu[illegible]tiv[illegible]nd das As[illegible]ivgesetz. Prüfen Sie anhand der Informationen in I[illegible]h oder andere[illegible]eigneten Q[illegible], ob diese Gesetze auch für das Rechnen mit V[illegible]n Gültigkeit h[illegible]en, und noti[illegible] Sie diese [illegible]e.

Kommutativgesetz: ____

A[illegible]ozi[illegible]esetz: ____

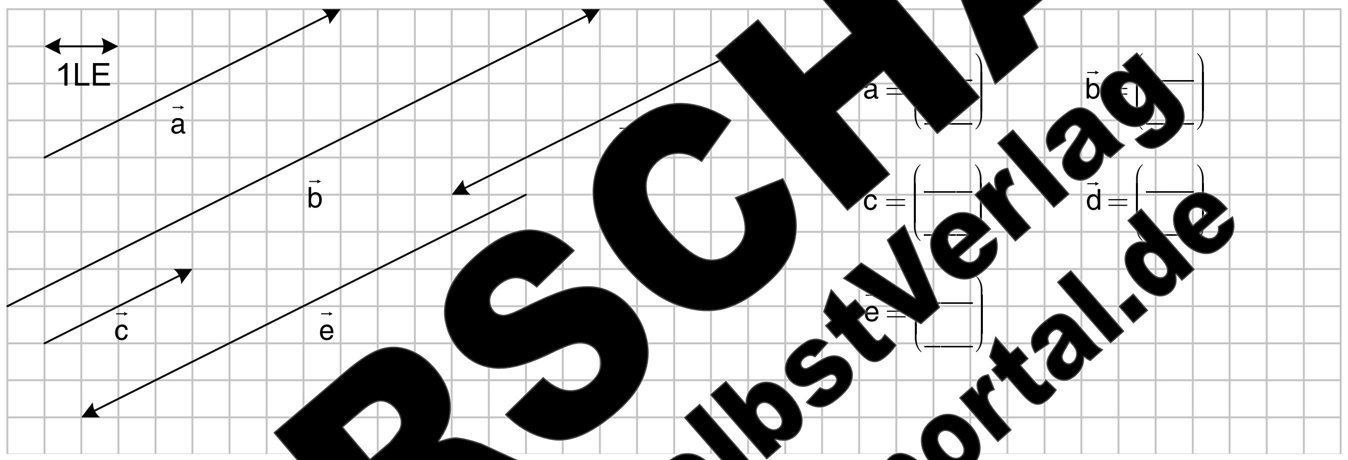
Ergänzende Übungsaufgaben: ____

____

Multiplizieren von Vektoren mit reellen Zahlen

Aufgabe 5.4

1. Bestimmen Sie die Koordinaten der abgebildeten Vektoren durch Abl der Z ng und tragen Sie die Werte ein.



a) Nennen Sie eins eit zwischen em Vektor $\vec a$ und n ktoren $\vec b$ bis $\vec e$.

b) Geb Sie de zwisch em Vektor $\vec a$ nd den Vektoren $\vec b$ bis $\vec e$ an.

c) Stellen ie die Vektore bis $\vec e$ wie m eispiel für Vektor $\vec b$ durch das Vielfache des Vektors $\vec a$ dar.

$\vec b = 2\vec a = 2\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}$

$\vec c = \_\_\_\_ = \_\_\begin{pmatrix}\_\_\\\_\_\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\_\_\\\_\_\end{pmatrix}$

$\vec d = \_$

$= \_\_\begin{pmatrix}\_\_\\\_\_\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\_\_\\\_\_\end{pmatrix}$

zen Sie im Merksatz die Angaben für den Raum.

Vektoren werden vervi r reellen Zahl r multipliziert, in
Komponente mit d

Für die $\begin{pmatrix}\\a_2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}\\ra_2\end{pmatrix}$ Für den Raum gilt: $r\vec a = \_\_\begin{pmatrix}\_\_\\\_\_\\\_\_\end{pmatrix}$

Aufgabe 5.6

Erarbeiten Sie sich mit Hilfe Ihres Schulbuchs oder anderen geeigneten Qu weite echenregeln hinsichtlich der Multiplikation von Vektoren mit reellen Zahlen, und n ren Sie n hier.

Übunge

Ü5.1 S eiben S die Vektoren odukt aus e reellen Zahl und einem Vektor mit möglichst kl n ganz ligen Koordi :

) $\begin{pmatrix}100\\200\\500\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}6\\-84\\144\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}2,5\\0,5\\1,5\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{3}{2}\\\frac{7}{2}\end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix}\frac{1}{6}\\\frac{3}{2}\\\frac{7}{3}\end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\3\\\frac{5}{2}\end{pmatrix}$

nde Übungen: ________________

Berechnen des Einheitsvektors zu einem gegebenen Vektor

Aufgabe 5.7

Verdeutlichen Sie sich die folgenden Informationen und berechnen Sie a ßend $\overrightarrow{b_0}$.

Informationen:

- In der Abbildung nebenan sind Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sowie die zugehörigen Einheitsvektoren $\overrightarrow{a_0}$ und $\overrightarrow{b_0}$ eingezeichnet.
- Den Einheitsvektor zum Vektor $\vec{a}$ bezeichne n mit $\overrightarrow{a_0}$.
- Der Vektor $\vec{a}$ bzw. $\vec{b}$ und ihr Ein bzw. $\overrightarrow{b_0}$ zeigen in die Richtung
- Der Einheitsvektor a 1, also gilt:

  $|\overrightarrow{a_0}| = 1$

- Ma rec den E eitsvektor zu ektor $\vec{a}$ inde an den Vektor $\vec{a}$ durch seinen Betrag divid

  $$\frac{a \quad 1}{} \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{6^2 + 8^2}} \begin{pmatrix} 6 \\ \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{100}} \begin{pmatrix} 6 \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,8 \end{pmatrix}$$

  Berechnen Sie $\overrightarrow{b_0}$ analog:

  $\overrightarrow{b_0} =$

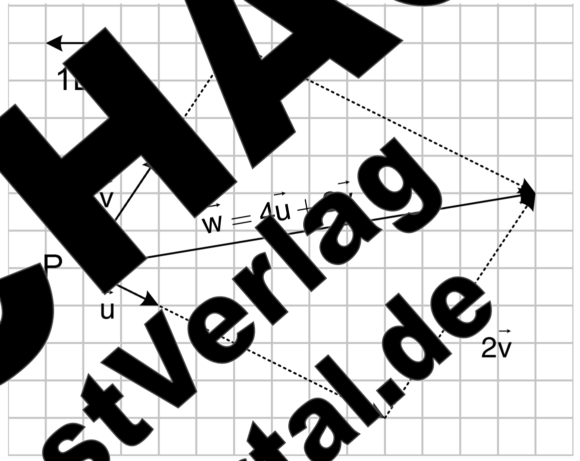
Übung:

e Einheitsvektoren zu $u = \begin{pmatrix} \\ 4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Addition vervielfachter Vektoren

Aufgabe 5.8

Beispiel



In der Abbildung neben wird der Vektor $\vec{w}$ durch eine Kombination aus den Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ erzeugt, indem man das Vierfache des Vektors $\vec{u}$ zum Zweifachen des Vektors $\vec{v}$ addiert. Durch Abzählen der Kästchen erhält man folgende

Koordinaten für $\vec{w}$: $\vec{w} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

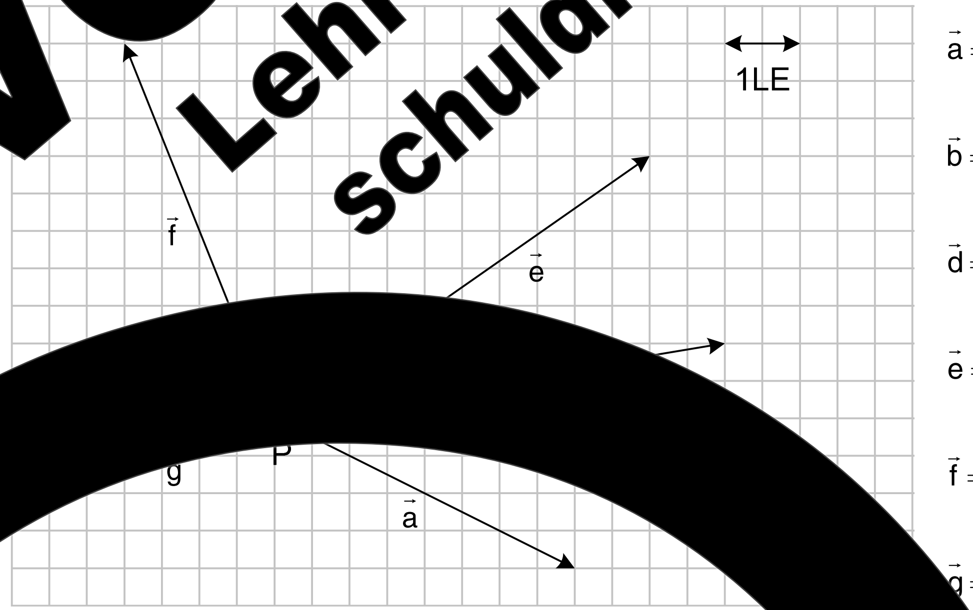
Rechnerisch lässt sich der Vektor wie f ermitteln:

$$\vec{w} = 4\vec{u} + 2\vec{v} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ -0,5 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabens llung

Gegeb bge en Vektoren a, b, d, $\vec{e}$, $\vec{f}$ und g

1. Geb Sie die rdinaten der bgebildeten Ve en durch Ablesen aus der Abbildung an



$\vec{a} = \begin{pmatrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{pmatrix}$

$\vec{b} = \begin{pmatrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{pmatrix}$

$\vec{d} = \begin{pmatrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{pmatrix}$

$\vec{e} = \begin{pmatrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{pmatrix}$

$\vec{f} = \begin{pmatrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{pmatrix}$

$\vec{g} = \begin{pmatrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{pmatrix}$

2. Zeich wie im Beispiel durch Vektorad Abbildung ein.
3. Re n von Vektor $\vec{c}$ durch Rechnung

   $\Big) + 3\begin{pmatrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{pmatrix}$ und prüfen Sie durch Ab Kästchen, ob das nis mit der Zeichnung übereinstimmt.

4. In Aufgabe 2 und 3 wurde der Vektor $\vec{c}$ mit Hilfe der gegeben Beziehung $\vec{c} = \vec{a}$ 3$\vec{b}$ zu t eingezeichnet und dann berechnet. Nun sollen Sie umgekehrt vorgehen. Ermi Sie, wie die bereits gezeichneten Vektoren $\vec{d}$, $\vec{e}$, $\vec{f}$ und $\vec{g}$ aus einer Kombination der ektoren d $\vec{b}$.
   Vielfachen von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellen lassen. Zeichnen Sie dazu wie im ben chende Hilfslinien ein und überprüfen Sie die Ergebnisse mit den unter 1. bere erm Koordinaten.

$\vec{d} =$ ____

$\vec{e} =$ ____

$\vec{f} =$ ____

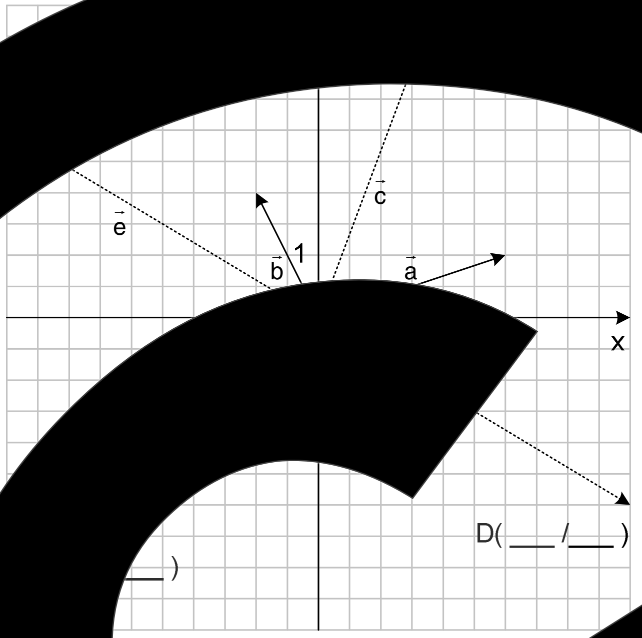
$\vec{g} =$ ____

Fachbegriff fü sum us vervielfa ektoren:

Definiti Li ombina n:
Eine Su e ra + ... für d reellen Zahl r, , t, … und die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, ...nennt eine **earkombination** de ektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, ...

Übungen

Ü5.3 Gegeben sind die Ortsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Stellen Sie alle anderen eingezeichneten Ortsvektoren, wie im Beispiel für $\vec{c}$, als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dar. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis, inde te D, E und F eintragen.



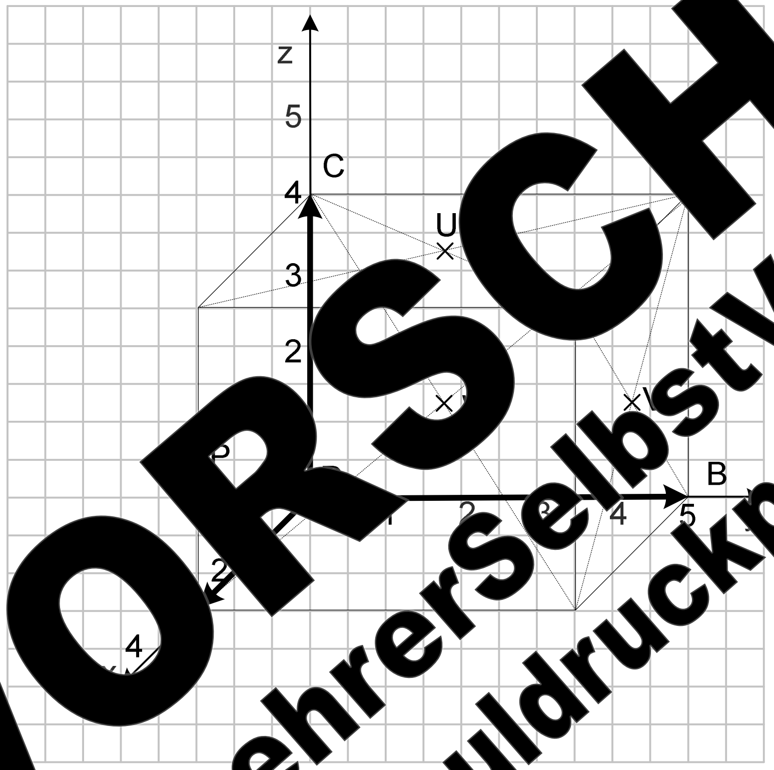
$$= \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + 1,5\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1,5\\4\end{pmatrix}$$

$\vec{d} =$ ____________________________

$\vec{e} =$ ____________________________

$\vec{f} =$ ____________________________

Ü5.4 Gegeben sind die Ortsvektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ zu den Punkten A, B und C. Ermitte durch Abzählen zunächst die Koordinaten aller eingetragenen Punkte. Stelle ansch end die Ortsvektoren zu den Punkten U, V und W, wie im Beispiel für $\vec{p}$ dargeste Li kombination der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ dar. Überprüfen Sie das Ergebnis je end ge gelesenen Koordinaten.



___/___/___) ⇒ $\vec{a} = \begin{pmatrix}\_\_\_\\\_\_\_\\\_\_\_\end{pmatrix}$

B(___/___/___) ⇒ $\vec{b} = \begin{pmatrix}\_\_\_\\\_\_\_\\\_\_\_\end{pmatrix}$

C(___/___/___) ⇒ $\vec{c} = \begin{pmatrix}\_\_\_\\\_\_\_\\\_\_\_\end{pmatrix}$

P(3/0/2)

U(___/___/___)

V(___/___/___)

W(___/___/___)

eispiel für $\vec{p}$:

$$\vec{p} = 1 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} + 0,5 \cdot \vec{c} = 1 \cdot \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix} + 0,5 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}$$

____

$\vec{v} =$ ____

____

e Übungen: ____

____

Raum für Notizen

Kapitel 6: Lösen von Vektorgleichungen bei Linearkombinati[illegible]nen

1. Lösen einer Vektorgleichung durch "genaues Hinsehen"

Die folgenden Vektorgleichungen haben so einfache Lösungen, [illegible]sie du[illegible]genaues Hinsehen ohne größeren Rechenaufwand lösen kann.

Beispiele:

a) $\begin{pmatrix}9\\12\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ Man erkennt sofort, da[illegible] **r = 3** [illegible]eichu[illegible]erfüllt.

b) $\begin{pmatrix}-3\\5\\-1\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}15\\-25\\5\end{pmatrix}$ Man erkennt sofo[illegible]ss **s =** [illegible] die Gleichu[illegible]üllt.

c) $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}6\\3\\-4\end{pmatrix}$ M[illegible] erk[illegible] sofo[illegible]ass es **kei**[illegible] Za[illegible] r gibt, w[illegible]e Gleichung erfüllt.

d) $\begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix}=$ [illegible] [illegible]n ka[illegible]keinen V[illegible]kt[illegible]d[illegible]r Ebene mit [illegible]m Vektor des Raumes verknüpfen.

[illegible]ufg[illegible]n 6.1

[illegible]ben S[illegible] Lösunge[illegible]folgenden [illegible]gleichungen ohne ausführliche Rechnungen an:

a) $\begin{pmatrix}[illegible]6\\[illegible]\\8\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}-12\\-34\\-16\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1\\0\\[illegible]\end{pmatrix}=$ [illegible] c) $\begin{pmatrix}13\\17\\-23\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}117\\-153\\207\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}12\\16\\8\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix}$

t =____ s =____ r = ____ s = ____

2. Lösen vo[illegible]ung

Bei[illegible]erhältnisse jedoch nicht so einfach, dass man die [illegible]

[illegible] für Vektorgleichungen mit [illegible]

Beispiel 1:

$\begin{pmatrix}12\\16\\8\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}9\\12\\[illegible]\end{pmatrix}$

Man löst die Klammern [illegible]o auf, dass sich drei Gleichungen ergeben, als[illegible] Gleichungssystem (LGS) entsteht.

[illegible] $= 12r \quad \Rightarrow r=\frac{4}{3}$

$8 = 6r \quad \Rightarrow r=\frac{4}{3}$

Da ein überbestimmtes LGS vorlie[illegible]erprüft werden, ob alle drei Gleichungen das gleich[illegible]efern.
Das ist für r = $\frac{4}{3}$ erfüllt. Damit ist r = [illegible] des LGS.

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Alge[illegible]ra
selbstorganisiert [illegible]rlernen

Kap[illegible]

Lösen von Vektorgl[illegible]
[illegible]bei Linearkombinatio[illegible]

Lineare Gleichungssysteme

Einführung in die Vektorrechnung

Geraden in der Ebene und [illegible]Rau[illegible]

Eben[illegible]un[illegible]

Lineare Abbildungen

Gesa[illegible]ebra selbstorganisiert erlernen ([illegible]-031-266)
S[illegible]

[illegible]rSelbstVerlag
[illegible]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[illegible]
[illegible]lehrerselbstverlag.de
[illegible]www.f-druck.de

Kapitel 6: Lösen von Vektorgleichungen bei Linearkombina[illegible]nen

1. Lösen einer Vektorgleichung durch "genaues Hinsehen"

Die folgenden Vektorgleichungen haben so einfache Lösungen, [illegible] sie du[illegible] genaues Hinsehen ohne größeren Rechenaufwand lösen kann.

Beispiele:

a) $\begin{pmatrix}9\\12\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ Man erkennt sofort, das[illegible] r = 3 [illegible] eichu[illegible] erfüllt.

b) $\begin{pmatrix}-3\\5\\-1\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}15\\-25\\5\end{pmatrix}$ Man erkennt sofo[illegible] ss **s =** [illegible] die Gleichu[illegible] e[illegible]füllt.

c) $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}6\\3\\-4\end{pmatrix}$ Ma[illegible] erk[illegible] sofo[illegible] ass es **kein** Za[illegible] r gibt, w[illegible] die Gleichung erfüllt.

d) $\begin{pmatrix}1\\0\\[illegible]\end{pmatrix}=[illegible]\begin{pmatrix}1\\[illegible]\end{pmatrix}$ [illegible] n ka[illegible] einen Vekt[illegible] r Ebene mit [illegible] m Vektor des Raumes verknüpfen.

[illegible]uf[illegible]n 6.1

[illegible]ben S[illegible] Lösunge[illegible] folgenden [illegible] gleichungen ohne ausführliche Rechnungen an:

a) $\begin{pmatrix}[illegible]6\\[illegible]\\8\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}-12\\-34\\-16\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1\\0\\[illegible]\end{pmatrix}=[illegible]$ c) $\begin{pmatrix}13\\17\\-23\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}117\\-153\\207\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}12\\16\\8\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix}$

t =____ s =____ r = ____ s = ____

2. Lösen vo[illegible]ung

Bei[illegible] Verhältnisse jedoch nicht so einfach, dass man die [illegible]

[illegible] für Vektorgleichungen mit [illegible]

Beispiel 1:

$\begin{pmatrix}12\\16\\8\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}9\\12\\[illegible]\end{pmatrix}$

Man löst die Klammern [illegible] o auf, dass sich drei Gleichungen ergeben, als[illegible] Gleichungssystem (LGS) entsteht.

[illegible] $= 12r \quad \Rightarrow r=\frac{4}{3}$

$8 = 6r \quad \Rightarrow r=\frac{4}{3}$

Da ein überbestimmtes LGS vorlie[illegible] erprüft werden, ob alle drei Gleichungen das gleich[illegible] efern.
Das ist für r = $\frac{4}{3}$ erfüllt. Damit ist r = $\frac{4}{3}$ [illegible] des LGS.

Beispiel 2:

$\begin{pmatrix}12\\16\\8\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}9\\12\\15\end{pmatrix}$

Man löst die Klammern der Vektore[illegible] uf, das[illegible] Gleichungen ergeben, also ein linea[illegible] ungs[illegible] m (LGS) entsteht.

I: $12=9r \quad \Rightarrow r=\frac{4}{3}$

II: $16=12r \quad \Rightarrow r=\frac{4}{3}$

III: $8=15r \quad \Rightarrow r=\frac{8}{15}$

Aus I und II f[illegible] r = $\frac{[illegible]}{3}$ [illegible] i Gleichung III er[illegible] sich für r = $\frac{8}{15}$ also ein W[illegible] spruch. Dam[illegible] die Vektorg[illegible] ng nicht lösbar.

b) Beispiele für Vektorgle[illegible] zw[illegible] Variablen

Beispiel 1:

$r\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\[illegible]\\[illegible]\end{pmatrix}[illegible]\begin{pmatrix}3\\[illegible]\\0\end{pmatrix}$

Auflösen de[illegible] ekt[illegible] gleichung in drei einzelne Gleichun[illegible] en

I [illegible] $2r+s$ [illegible] weglas[illegible]

II [illegible] $+s \ =1$

[illegible] $2s=0$ II-II[illegible]

IV $-s=1$

$s=-1$ einsetzen [illegible] II ⇒ $r=2$

Da es sich um ein überbestimmtes LGS handelt, müssen die Lösungen in der für die Rechnung bisher nicht verwendeten Gleichung I überprüft werden. Da sich kein Widerspruch ergibt, sind s = –1 und r = 2 Lösungen des LGS.

Einsetzen von r und [illegible]

[illegible] $\begin{pmatrix}[illegible]\\[illegible]\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}[illegible]\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}$

Auflösen d[illegible] g in drei einzelne Gleichungen

I $2r+s$ [illegible]

II $r+$ [illegible]

III [illegible]

[illegible] $=-1$ einsetzen in II ⇒ $r=2$

[illegible]tzen in I: 3 = 4

Auch hier ergibt sich a[illegible] II und III das Ergebnis r = 2 und s = [illegible]
Einsetzen in I ergibt hier [illegible] also einen **Widerspruch**. Damit ist d[illegible] chung nicht lösbar.

Kei[illegible]g

3. Lösen Sie die folgenden Vektorgleichungen:

a) $\begin{pmatrix} 6 \\ 21 \\ -9 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 15 \\ 49 \\ -21 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 6 \\ 21 \\ -9 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 14 \\ 49 \\ -21 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} \text{[illegible]} \\ 18 \\ \text{[illegible]} \end{pmatrix} \text{[illegible]} \begin{pmatrix} 1 \\ \text{[illegible]} \\ 1 \end{pmatrix} \text{[illegible]} s \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{[illegible]} \begin{pmatrix} 1 \\ \text{[illegible]} \\ \text{[illegible]} \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} \text{[illegible]} \\ \text{[illegible]} \\ \text{[illegible]} \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ \text{[illegible]} \end{pmatrix} \text{[illegible]} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 2 \\ \text{[illegible]} \\ \text{[illegible]} \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

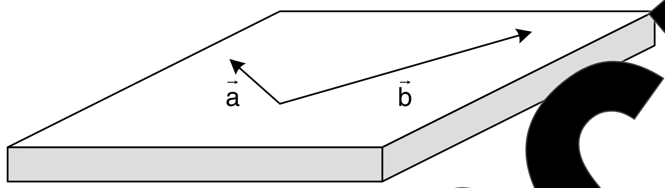
Lösungen in unsortierter Reihe[illegible]

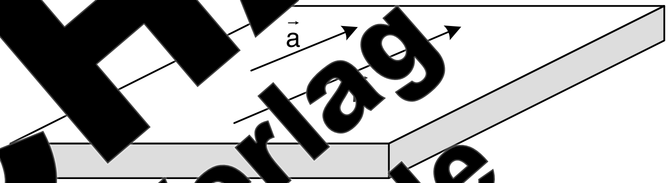
keine Lösung
keine Lösung
r = 15 und s = [illegible]

[illegible] Lösung
r = 3 und s [illegible]
r = 2/7 [illegible]

keine Lösung
r = 0,5 und s = 0,5
r = –3 und s = 1

Kapitel 7: Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit

<table>
<tr><th colspan="2">Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit i[illegible] der Eb[illegible]</th></tr>
<tr>
<td>Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$


Der Ansatz $r\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ bedeut[illegible] dass der Vektor $\vec{b}$ als [illegible] des [illegible] $\vec{a}$ dargestellt wer[illegible] führt zum folgenden LGS:
LGS: 0= [illegible]
r = 2 [illegible] ⇒ Widersp[illegible]
[illegible] ________ [illegible] welc[illegible]s das LG[illegible].
Vektor $\vec{b}$ kann ________________ durch Vervielfachen von Vektor $\vec{a}$ erzeugt werden.</td>
<td>Geg[illegible]n sind [illegible] $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}$


Der An[illegible] $r\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}$ [illegible]eutet anschaulich, dass [illegible] Vektor $\vec{b}$ als [illegible] Vielfaches des Vektors $\vec{a}$ dargestellt [illegible]en kann und führt zum folgenden LGS:
L[illegible]S: 2r = 4
4r = 8
Das LGS ist für r = _____ erfüllt.
Vektor $\vec{b}$ ist ein ______________________ von Vektor $\vec{a}$. Man sagt auch, die Vektoren sind **kollinear**.</td>
</tr>
<tr>
<td>[illegible] erden kann, sind die Vekto[illegible]
$\vec{a}$ und $\vec{b}$
linear unabhängig.</td>
<td>[illegible]enn in der Ebene ein Vektor $\vec{b}$ durch ein [illegible]ches eines Vektors $\vec{a}$ dargestellt [illegible]n kann, sind die Vektoren
$\vec{a}$ und $\vec{b}$
[illegible]r abhängig.</td>
</tr>
<tr><td colspan="2">**Mathematischer Ansatz für die Untersuchung au[illegible]hängigkeit und Abhängigkeit in der Eben[illegible]**</td></tr>
<tr><td>[illegible]</td><td>**$r\cdot\vec{a}=\vec{b}$ [illegible]sung für r**</td></tr>
<tr><td colspan="2">**[illegible]e: Drei Vektoren in einer Ebene sind immer linear ________________________.**</td></tr>
</table>

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Alge[illegible]
selbstorganisiert [illegible]rlernen

Kap[illegible]

Lineare Abhängigk[illegible]
Unabhängigkeit

02-031-266

Lineare Gleichungssysteme

Einführung in die Vektorrechnung

Geraden in der Ebene und i Rau

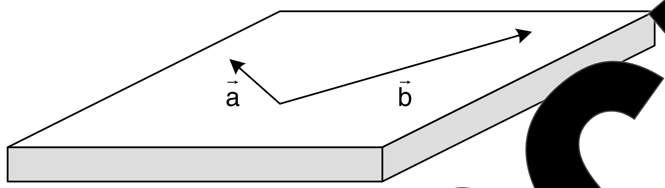
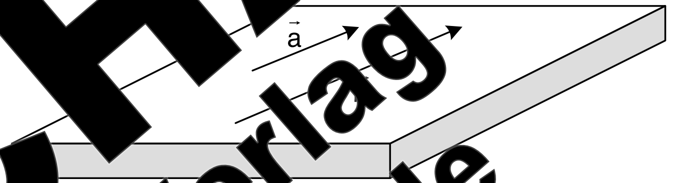
Ebe un

Lineare Abbildungen

Gesa ebra selbstorganisiert erlernen (-031-266)
St

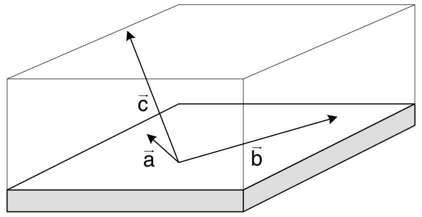
SelbstVerlag
tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ
lehrerselbstverlag.de
www.f-druck.de

Kapitel 7: Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit

Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit i der Eb	
Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$	Geg n sind $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}$
	
Der Ansatz $r\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ bedeut dass der Vektor $\vec{b}$ als eli es de rs $\vec{a}$ dargestellt wer ührt zum folgenden LGS:	Der An $r\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ \end{pmatrix}$ eutet anschaulich, dass Vektor $\vec{b}$ als Vielfaches des Vektors $\vec{a}$ dargestellt en kann und führt zum folgenden LGS:
LGS: 0= r = 2 ⇒ Widersp	LGS: 2r = 4 4r = 8
_______ welc s das LG .	Das LGS ist für r = _____ erfüllt.
Vektor $\vec{b}$ kann _______________ durch Vervielfachen von Vektor $\vec{a}$ erzeugt werden.	Vektor $\vec{b}$ ist ein ______________________ von Vektor $\vec{a}$. Man sagt auch, die Vektoren sind **kollinear**.
erden kann, sind die Vekto $\vec{a}$ und $\vec{b}$ **linear unabhängig.**	enn in der Ebene ein Vektor $\vec{b}$ durch ein ches eines Vektors $\vec{a}$ dargestellt n kann, sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ **r abhängig.**
Mathematischer Ansatz für die Untersuchung au hängigkeit und Abhängigkeit in der Eben	
	$r\cdot\vec{a}=$ sung für r
e: Drei Vektoren in einer Ebene sind immer linear ________________________.	

Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit im Raum

Gegeben sind: $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{c}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$



Der Ansatz $r\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ bede anschau-lich, dass der Vektor $\vec{c}$ als L ombination a den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ d este erde und führt zum folgenden

r + s = –1
s =
0 Wide uch

Es gib nd s che das LGS füllen.

Ve $\vec{c}$ kann ______ us einer Line ation der Vektor $\vec{a}$ und $\vec{b}$ e gt wer

Gegeben sind: $\vec{a}=$ 1 1 2 0

satz r 1 + 1 = $\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$ bedeu anschau-lich, dass Vektor $\vec{c}$ a inearkombination aus d ren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ rgestellt werden kann und ührt zum fol n LGS:

r + s = 3
2
0 = 0

Da LGS ist für s = _____ und r = _____ erfüllt.

Vektor $\vec{c}$ kann als ______________________ der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dargestellt werden, da alle drei Vektoren in einer Ebene liegen. Man sagt auch, die Vektoren sind **komplanar**.

Wenn ein Vektor $\vec{c}$ im Raum nicht durch eine Linearkombination zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dargestell in der **bhängig.**

Wenn ein Vektor $\vec{c}$ im Raum durch eine Linearkombination zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dargestellt werden kann, da er in der n Ebene wie $\vec{a}$ und $\vec{b}$ liegt, sind die ektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ **ar abhängig.**

athematischer Ansatz für die Untersuchung ängigkeit und Abhängigkeit im Raum

$r\cdot\vec{a}+s\cdot\vec{b}=\vec{c}$ **hat keine Lösung**	$r\cdot\vec{a}+s\cdot\vec{b}=\vec{c}$ **ung für r und s**

Ergänzen Sie: d linear __________________ .

sind linear __________________, w nplanar sind.

ei Vektoren im aum sind linear __________________, we in einer Ebene liegen.

E bungen: ____

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Alge ra
selbstorganisiert rle en

Ka

Parameterdarstellung v den

Lineare Gleichungssysteme

Einführung in die Vektorrechnung

Geraden in der Ebene und i Rau

Ebe un

Lineare Abbildungen

Gesa ebra selbstorganisiert erlernen (-031-266)
St

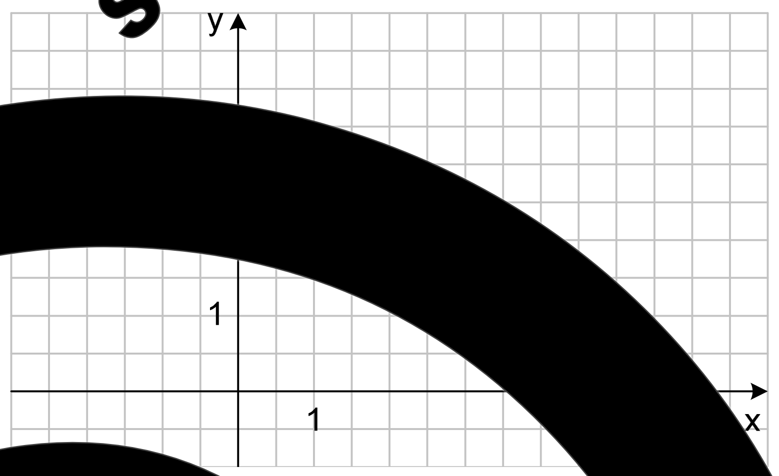
SelbstVerlag
tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ
lehrerselbstverlag.de
www.f-druck.de

Kapitel 8: Parameterdarstellung von Geraden

Aufgabe 8.1

Der Vektor $\vec{p}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ sei ein Ortsvektor. Bestimmen Sie für d Tabelle benen Werte von r jeweils die Koordinaten der Ortsvektoren $\vec{p}$ und die rdinat ektor $\vec{p}$ jeweils zugehörigen Endpunkte P(x/y). Zeichnen Sie jeden Ortsvekt und d Punkt P(x/y) in ein Koordinatensystem ein.

Parameter r∈IR	Ortsvekto unkt P	Ko es Punktes P(x/y)
r = –1	$\vec{p}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}+\_\begin{pmatrix}2\\ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\_\_\\ \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\_\_\\ \_\_\end{pmatrix}$	P(____ / ____)
r = 0	$\begin{pmatrix}3\\ \end{pmatrix}+\_\begin{pmatrix}\\ \_\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\_\_\\ \_\_\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\_\\ \end{pmatrix}$	____ / ____)
r = 0,5	$+\_\begin{pmatrix}\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ \end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\\ \_\_\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\_\_\\ \_\_\end{pmatrix}$	P(____ / ____)
r =	$\vec{p}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}+\_\begin{pmatrix}\\ \_\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\_\_\\ \_\_\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\\ \_\_\end{pmatrix}$	P(____ / ____)
,5	$\vec{p}+\_\begin{pmatrix}2\\ \_\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\_\_\\ \_\_\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\_\_\\ \_\_\end{pmatrix}$	P(____ / ____)



Bes n Ort aller Endpunkte P:

____

____

n Sie diesen geometrischen Ort grafisch im atensystem dar, die Punkte ll verbinden.

Information: Parameterdarstellung der Gerade

Parameterdarstellung einer Geraden: $\boxed{\vec{x} = \vec{p} + r\vec{u}}$

Der Param[illegible] dient [illegible]änderung und bei nega[illegible] Vor[illegible]en auch zur Um[illegible] [illegible]ungsvektors $\vec{u}$. Setzt man [illegible] Za[illegible], gelangt man zu [illegible]em P[illegible] X auf der Gerade[illegible]

Stützvektor $\vec{p}$

Der Stützvektor $\vec{p}$ ist ein Ortsvektor zu einem beliebigen, aber bekannten Punkt auf der Geraden. Der Stützvektor l[illegible] damit die Position der Geraden im Koordinatensystem fe[illegible]

Richtung[illegible]vektor $\vec{u}$

Der Richtungsvektor $\vec{u}$ [illegible] die Richtung (S[illegible]igung) der Geraden im Koordinatensystem fest. Man zeichnet $\vec{u}$ in der Regel ausgehend von P ein.

Man kann $\vec{u}$ berechnen, wenn zwei Punkte A und B auf der Geraden bekannt sind.
$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$

Der Vekto[illegible] ist ein Orts[illegible]vektor [illegible] einem belieb[illegible] Punkt X auf der Geraden.

Parameterdarstellun[illegible]nten der Vektoren

Gerade[illegible] | **[illegible]Gerade im Raum**

$$[illegible] = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

[illegible]er

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} u_1 \\ [illegible] \end{pmatrix}$$

$$[illegible]\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ [illegible] \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

oder

$$\begin{pmatrix} [illegible] \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} [illegible] \begin{pmatrix} u_1 \\ [illegible] \end{pmatrix}$$

Anm[illegible] [illegible] in der Analysis verwendete Form y = mx + b findet in der linear[illegible] [illegible]blicherweise keine Anwendung, da diese Form [illegible]er Geradendarste[illegible] [illegible] Geraden [illegible]n der Ebene und nicht für Geraden im Rau[illegible] ist.

Aufgabe 8.2

Standardaufgaben bei Geraden

Arbeiten Sie die unten aufgeführten Beispiele zu den Standardaufg[illegible] Gerad[illegible]urch und lösen Sie anschließend mit Hilfe dieser Beispiele Aufgaben aus dem Schu[illegible]ch.

1. **Erstellen der Parameterdarstellung der Gerad[illegible] bekannte P[illegible]kte P(1/0/2) und Q(1/2/3)**

Der Richtungsvektor $\vec{u}$ entspricht dem V[illegible]ter von P nach Q[illegible]

[illegible] $= \vec{p} + r\vec{u}$ mi[illegible] als Stützvekt[illegible] $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ergibt sich als Richtungsvektor

$$\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} [illegible] \\ 2-0 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A[illegible]als Richtungsvektor wählen.

[illegible] $\vec{q} + r\vec{u}$ mit $\vec{q}$ als Stützvektor $\vec{q} = \begin{pmatrix} [illegible] \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ [illegible]htungsvektor

$$\vec{u} = \overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 0-2 \\ [illegible] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

D[illegible]ene, jedoch gleichwertige Lösungen:

$[illegible] + r\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ oder $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

2. Die Koordinaten eines Punkte B auf der Geraden berechnen, indem man f[illegible] den P[illegible]eter r einen vorgegebenen Wert einsetzt

g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ Für r = 4 folgt: $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+4\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0\\0+8\\2+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}[illegible]\\[illegible]\\6\end{pmatrix}$ [illegible]o B(1/8/6)

Der Vektor $\overrightarrow{PB}$ ist viermal so lang wie der Vektor $\vec{u}$, wenn man für r den Wert 4 einsetzt.

3. Punktprobe: [illegible] prüfe[illegible] [illegible] ein [illegible]nkt auf [illegible] Geraden g lieg[illegible]

a) [illegible]eb[illegible] sind die [illegible]ade g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ und de[illegible] [illegible]t A(1/4/4)

Sch[illegible] 1:

$\vec{a}=\vec{p}+r\vec{u}$

Für $\vec{x}$ wird der Ortsvektor $\vec{a}$ zum Punkt A eingesetzt.

$$\begin{pmatrix}1\\4\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$$

Schritt 2:

[illegible] die Vektorgleichung [illegible] und prüft ob [illegible]sfrei gelöst [illegible]

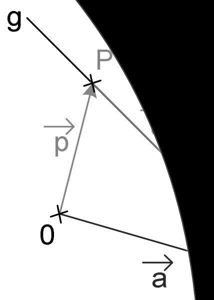
$[illegible]=0+2r \quad \Rightarrow r=2$

$4=2+r \quad \Rightarrow r=2$

Ergebnis: Kein Widerspruch, also liegt der Punkt A auf der Ger[illegible]

[illegible] des Ergebnisses:

[illegible] wurde, ist der Vektor [illegible] nach A de[illegible] so lang wie der [illegible]ichtungsvektor $\vec{u}$.



---

b) Gegeben sind die Gerade g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ und der Punkt B(1/2/2)

Schritt 1:

$\vec{b}=\vec{p}+r\vec{u}$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$$

Schritt 2:

$1=1$

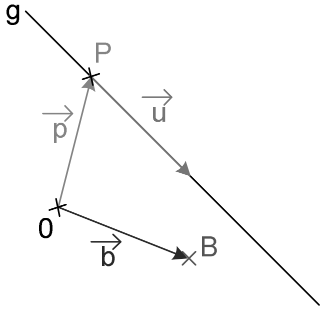
$2=0+2r \quad [illegible]=1$

$2=2+r \quad [illegible]$

Ergebnis: W[illegible]erspr[illegible], als[illegible] [illegible]der Pun[illegible] [illegible]ht auf der G[illegible]den g.

[illegible]Zeich[illegible]sche Interpre[illegible] des Ergebnis[illegible]:

[illegible] Punkt B ka[illegible] [illegible]rch Vervie[illegible] des [illegible]tungsvekto[illegible] [illegible]ie errei[illegible]t [illegible]en.



Übungen

Ü8.1 Begründen [illegible] beliebig viele Gleichungen in Parameterdarstellung haben ka[illegible] [illegible]hiedlich und die Richtungsvektoren kollinear sind.

____

____

____

____

[illegible]e Übungen: ______________________________

____

Raum für Notizen

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Alge

selbstorganisiert le en

Ka

Lagebeziehung von

Lineare Gleichungssysteme

Einführung in die Vektorrechnung

Geraden in der Ebene und [illegible] Rau[illegible]

Ebe[illegible]

Lineare Abbildungen

Gesa[illegible]ebra selbstorganisiert erlernen ([illegible]-031-266)
St[illegible]

[illegible]SelbstVerlag
[illegible]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[illegible]
[illegible]lehrerselbstverlag.de
[illegible]www.f-druck.de

Kapitel 9: Lagebeziehung von Geraden

Aufgabe 9.1

Sie wissen aus Untersuchungen in der Ebene bereits, dass sich zw[illegible] schn[illegible]en können und dass sie parallel oder identisch sein können. Im Raum kommt eine w[illegible]ere[illegible]ziehung hinzu, die man als **windschief** bezeichnet. Die Lagebeziehungen vo[illegible]raden [illegible]ssen sich anschaulich an Flugrouten von Flugzeugen, die sich hier zur Vereinfach[illegible]eradl[illegible]bewegen, veranschaulichen. Ergänzen Sie dazu in den folgenden Texten fehlend[illegible]form[illegible]n:

Die Geraden g und[illegible]________.

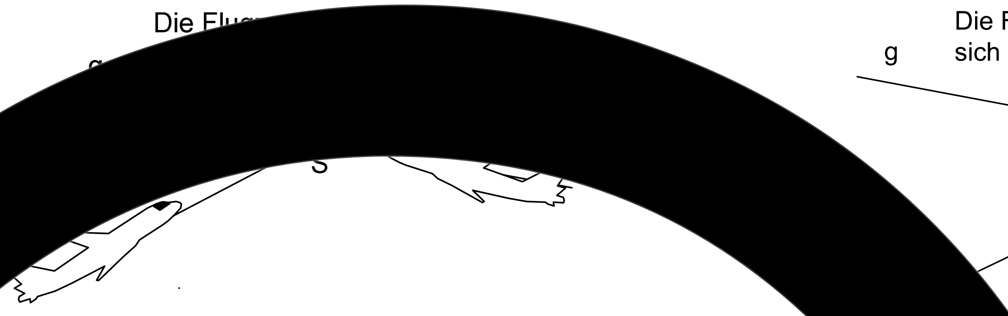
Die Ric[illegible]ren [illegible] und h sind

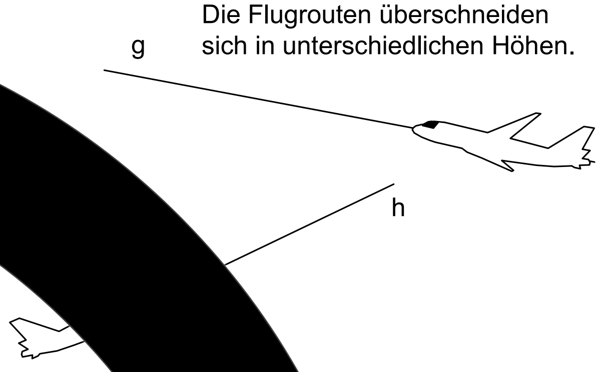
[illegible]ar ____________________.

Die G[illegible]n g und h sind ________________.

[illegible]e Richtungsvektoren von g und h sind

linear ____________________.





Die Ge[illegible]____________
______________________________.

[illegible]gsvektoren von g und h sind

[illegible]____________________.

Die Geraden [illegible]____________
______________________________.

Die Richtungsve[illegible] und h sind

[illegible]near ____________________.

Um rechnerisch zu bestimmen, welche Lagebeziehung bei zwei Geraden vorliegt, [illegible]ibt es m[illegible]re Wege. Hier soll der Weg beschritten werden, der den geringsten Rechenaufwan[illegible] sich bri[illegible]und damit am wenigsten anfällig für Rechenfehler ist.

Schema für die Untersuchung der Lagebeziehung [illegible]den


Untersuchung der Richtungsvekto[illegible]uf lineare Abhängigkeit bzw. Unabhäng[illegible]

Die Richtungsvektoren sind linear abhängig.

Die Rich[illegible]gsvektoren s[illegible]near unabhä[illegible]g

Durch Punktprobe [illegible]b die Gerade parallel oder i[illegible]sch[illegible]. Da[illegible] der Stützve[illegible]en in die andere G[illegible]

[illegible] Gleichsetzen prüfen, ob die G[illegible]en sich sch[illegible] oder windschief [illegible]d.

Aufga[illegible].2

[illegible]spiel[illegible]r Berechnungen zu[illegible]agebeziehung [illegible] Geraden

Ergän[illegible]bei den fo[illegible]enden Untersu[illegible] zur der Lagebeziehung von Geraden fehlende Angaben b[illegible]. Rechnunge[illegible]

a) Untersuchen Sie die Lagebeziehung der Geraden g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix}$ und h: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\5\\-4\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$

1. U[illegible] ______________________

$$\begin{pmatrix} \\ 1\\ -3\end{pmatrix} - = \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} -2r = 2 \\ r = -1 \\ -3r = 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \Rightarrow r = - \\ \Rightarrow r = -1 \\ \Rightarrow r = -1 \end{array}$$

[illegible]ier muss man nicht [illegible]dingt ausführlich [illegible], da die lineare [illegible]keit schon [illegible]ues Hinsehen

Die Richtungsvekt[illegible] ______________________.

2. Punktpr[illegible] h einsetzen

$$\begin{pmatrix}5\\ \\ \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \\ 5\\ -4\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} r = 1 \\ 3+ r = 5 \\ 2+-3r=-4 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} r = \_\_ \\ r = \_\_ \\ r = \_\_ \end{array}$$

[illegible]: Kein Widerspruch ⇒ g ist ______________________ h.

---

b) Untersuchen Sie die Lagebeziehung der Geraden g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-2\\1\\ \end{pmatrix}$ un[illegible] $\vec{x}=$ [illegible] s $\begin{pmatrix}4\\-2\\6\end{pmatrix}$

1. Wie bei a) erkennt man auch ohne Rechnung, dass di[illegible] Richtu[illegible]ve[illegible]linear abhängig sind.

Zur Erinnerung: Sowie ein Widerspruch auftauch[illegible] wird nicht weitergerech[illegible].

2. Punktprobe

$$\begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 5+-2r = \_\_\_ \\ 3+\ r = \_\_\_ \\ 2+- \end{array} \quad \begin{array}{l} -2r = \\ = 0 \\ \end{array} \Rightarrow \text{Wide[illegible]}$$

3. Ergebnis: Widerspruch [illegible] ______________________ k. (kurz[illegible]k)

c) [illegible]nt[illegible]chen S[illegible]e Lagebezie[illegible] der Gerade[illegible] $\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix}$ und n: $\vec{x}=\begin{pmatrix}7\\2\\5\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$

[illegible]urch genaues Hinse[illegible]rkennt ma[illegible] Rechnung, dass die Richtungsvektoren linear ________________ sind.

2. Gleichsetzen g = n ergibt: $\begin{pmatrix} \\3\\2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\2\\5\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$

LGS [illegible] 7 + 3s
[illegible]2s
[illegible] ⇒ –3r = 3 ⇒ r = ____

r in II ⇒ __ = 2 +

r und s in I ⇒ 7 = 7

Kein Widerspruch ⇒ die Geraden______________________

3. Sch[illegible]er s in n einsetzen.

[illegible]nnittpunkt: S(___ /___ /___)

$\begin{pmatrix} \\ \\ 0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \\ \\ 5\end{pmatrix}$

[illegible]n, dass so [illegible]naufwand w[illegible]ntsteht; hie[illegible]ie Gerade n ein[illegible]

d) Untersuchen Sie die Lagebeziehung der Geraden $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix}$ und m: $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+s$

1. Untersuchung der Richtungsvektoren auf ______________________

$r\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}r=0{,}5\\r=2\end{matrix}$ ⇒ Wider

Widerspruch
e nt man auch durch
ge aues Hi ehen.

2. Gleichsetzen g = n ergibt: $\begin{pmatrix}5\\ \\ \end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\1\\ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\\0\\2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}\\ \\-3\end{pmatrix}$

LGS lösen:

I 5 – = 1 –
II + r = 0 s
3r = 3s

–2r + s –4 – | w ssen
II r – 2 = –3
III 3r + s = 0 | II–III

IV __s =
s

s in II ⇒ r – 2 = –3 ⇒ r = –1

r und s in I ⇒ ______ = ___

= ___ Widerspruch

Di ___ .

albüchern gibt es eine große Anzahl von Aufgabe von Lagebeziehungen
aden. Lösen Sie diese Aufgaben mit Hilfe der Beispiele

Ergänz ______________________

____

____

Kapitel 10: Skalarprodukt

1. Physikalische Betrachtungen und Begründung des Ausdru larpro

Wie viele andere mathematische Verfahren, findet das Produkt z er v n eine Anwendung in der Physik. Aus dem Physikunterricht wissen Sie, dass die A de Formel $W=F\cdot s$ berechnen kann. Diese Formel gilt in dieser Form jedoch unter Bedingung, dass F und s die gleiche Richtung haben, da man in diesem Sond ll de iell harakter von F und s vernachlässigen darf.

Im allgemeinen Fall muss man berücksi , dass rößen F un s V oren sind, und damit in unterschiedliche Richtungen zeigen kö en. Man schrei ie Formel da n wie folgt:

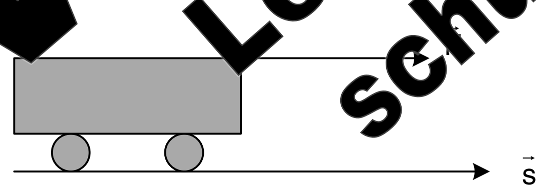
rbeit: $=\vec{F}\cdot\vec{s}$

Das Produkt der beiden Ve en in dungsfa bt keinen ktor, sondern einen so genannten **Skalar**, da die A Richtung hat. A dieser Eigens bei der Multiplikation zweier Vektoren leite n de usdru **Skalarprod** ab.

2. Eigenschaften dukts verans licht am B i der Kraft

Die f bbil n zeigen jew inen Wagen, waagerecht nach rechts in Richtung des eges $\vec{s}$ gt u mit der Kr t $\vec{F}$ gezogen w . Die Wirkung der Kraft für die gewünschte ng ist i n drei Fällen ings unters lich groß. Ergänzen Sie fehlende Angaben:

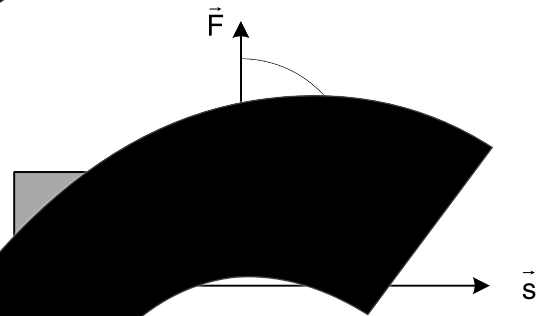
1: $\vec{F}\parallel\vec{s}$



$\vec{F}$ zeigt in die Richtung des Weges $\vec{s}$, d.h.
Die Kraft $\vec{F}$ und der Weg $\vec{s}$ schließen einen Winkel von α = ___° ein. Die gesamte Kraft ist für die Bewegung wirksam und man kann ohne Beachtung des Vektorcharakters mit den Beträgen rechnen.

$W=|\vec{F}|\cdot|\vec{s}|$, wenn $\vec{F}\parallel\vec{s}$

$F\perp\vec{s}$



Mit eine echt nach oben zeigt, kann man den W e Richtung des horizontalen Weges $\vec{s}$ zieh hochheben. Damit ist die Kraft für die gew gung nicht wirksam und es wird in physikali eine Arbeit verrichtet.

Es gilt: $W=\vec{F}\cdot\vec{s}=$ ______ $\perp\vec{s}$

Dieses Anwendungsbei ich anschaulich eine wichtige Eigenschaft rodukts:

Das Skalarprodukt zweier or oren ist immer

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Alge[illegible]
selbstorganisiert [illegible]rlernen

Kap[illegible]

Skalarproduk[illegible]

02-031-266

Gesa[illegible] [illegible]bra selbstorganisiert erlernen ([illegible]-031-266)
S[illegible]

[illegible]rSelbstVerlag
[illegible]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[illegible]
[illegible]lehrerselbstverlag.de
[illegible]www.f-druck.de

Kapitel 10: Skalarprodukt

1. Physikalische Betrachtungen und Begründung des Ausdru[illegible]alarpro[illegible]

Wie viele andere mathematische Verfahren, findet das Produkt z[illegible]er V[illegible]n eine Anwendung in der Physik. Aus dem Physikunterricht wissen Sie, dass [illegible] die A[illegible] [illegible] Formel $W = F \cdot s$ berechnen kann. Diese Formel gilt in dieser Form jedoch [illegible] unter [illegible] Bedingung, dass F und s die gleiche Richtung haben, da man in diesem Sond[illegible]ll de[illegible]ielle[illegible]charakter von F und s vernachlässigen darf.

Im allgemeinen Fall muss man berücks[illegible], dass [illegible]rößen F un[illegible] s Ve[illegible]oren sind, und damit in unterschiedliche Richtungen zeigen kö[illegible]en. Man schrei[illegible]e Formel da[illegible]n wie folgt:

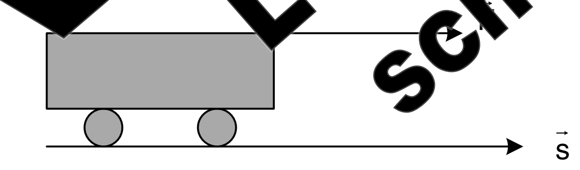
$$\textbf{[illegible]rbeit:}\ [illegible] = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

Das Produkt der beiden Ve[illegible]en in [illegible] [illegible]dungsfa[illegible] [illegible]bt keinen [illegible]ektor, sondern einen so genannten **Skalar**, da die A[illegible] [illegible] Richtung hat. A[illegible] dieser Eigens[illegible] bei der Multiplikation zweier Vektoren leite[illegible] [illegible]n de[illegible] Ausdru[illegible] **[illegible]kalarprod[illegible]** ab.

2. Eigenschaften [illegible]dukts verans[illegible]licht am B[illegible]spiel der Kraft

Die f[illegible] [illegible]bbil[illegible]en zeigen jew[illegible] [illegible]inen Wagen, [illegible] sich waagerecht nach rechts in Richtung des [illegible]eges $\vec{s}$ [illegible]egt u[illegible] mit der Kr[illegible]ft $\vec{F}$ gezogen w[illegible]d. Die Wirkung der Kraft für die gewünschte [illegible]ew[illegible]ng ist i[illegible] [illegible]n drei Fällen [illegible] unters[illegible]lich groß. Ergänzen Sie fehlende Angaben:

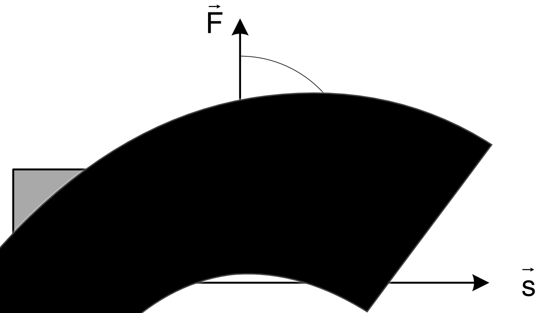
[illegible]1: $\vec{F} \parallel \vec{s}$



$\vec{F}$ zeigt in die Richtung des Weges $\vec{s}$, d.h.
Die Kraft $\vec{F}$ und der Weg $\vec{s}$ schließen einen Winkel von α = ___° ein. Die gesamte Kraft ist für die Bewegung wirksam und man kann ohne Beachtung des Vektorcharakters mit den Beträgen rechnen.

$$[illegible]W = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}|, \text{ wenn } \vec{F} \parallel \vec{s}$$

$\vec{F} \perp \vec{s}$



Mit eine[illegible] [illegible]echt nach oben zeigt, kann man den W[illegible] [illegible]e Richtung des horizontalen Weges $\vec{s}$ zieh[illegible] [illegible]hochheben. Damit ist die Kraft für die gew[illegible]gung nicht wirksam und es wird in physikali[illegible] [illegible]eine Arbeit verrichtet.

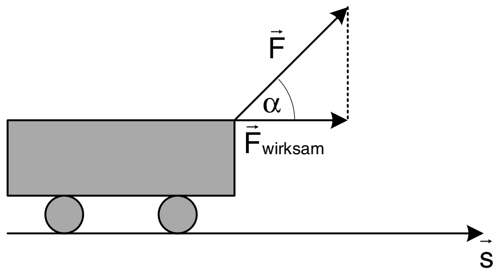
Es gilt: $W = \vec{F} \cdot \vec{s} = $ ___[illegible] $\perp \vec{s}$

Dieses Anwendungsbeis[illegible] [illegible]ich anschaulich eine wichtige Eigenschaft [illegible]produkts:

Das Skalarprodukt zweier or[illegible] [illegible]oren ist immer [illegible]

Allgemeiner Fall:

Die Kraft $\vec{F}$ und der Weg $\vec{s}$ schließen einen beliebigen Winkel ein



Nur der Teil der Kraft, der in die [illegible]ng de[illegible]eges $\vec{s}$ zeigt, also $\vec{F}_{wirksam}$ is[illegible] [illegible] Bewe[illegible] damit für die verrichtete Arbe[illegible] [illegible]m und [illegible] gilt somit entsprechend z[illegible]m Fall [illegible] $[illegible] = [illegible]\vec{s}$

Der wirk[illegible]me Te[illegible] Kra[illegible] [illegible]rksam hängt vom ______ [illegible]wi[illegible] dem Weg [illegible] und der Kraft $\vec{F}$[illegible]

[illegible]Winkelbez[illegible]hu[illegible] für α:

$$\cos[illegible] = \frac{[illegible]_{wirksam}|}{|\vec{F}|}\ [illegible]\ \vec{F}_{wirksam} = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

Für die [illegible]chnung der A[illegible]eit gilt daher allgemein:

$$\mathbf{W = [illegible] \cdot s = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cos\alpha}$$

Aufgabe [illegible]

Erlä[illegible]n S[illegible] [illegible] Formel $W = [illegible] \cdot s = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cos[illegible]$ zur Berechnung der Arbeit hergeleitet werden kann.

____

____

____

Aufgabe 10.[illegible]

Ze[illegible] Fälle 1 und 2 in der Formel für den [illegible]en sind:

[illegible] $\Rightarrow W =$ ______________________________

$\alpha = 90^\circ \Rightarrow W =$ ______________________________

3. Die Definition[illegible]

Ersetzt[illegible] [illegible]bige Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, gilt für das S[illegible]

$$\boxed{\textbf{Skalarprodukt: } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\alpha}$$

4. Die Koordinatenform des Skalarprodukts

Aufgabe 10.3

In der Ebene sind die Ortsvektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} \text{ gegeben.}$$

a) Zeichnen Sie die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ [illegible] m Lineal in das Koordinatensystem ne[illegible]an ein.

b) Messen Sie den von den V[illegible] $\vec{a}$ [illegible] eingeschlossenen Winke[illegible] ge[illegible]ie me[illegible] mit dem Geodreieck:

α = ____________

c) Berechn[illegible] de[illegible]ag (L[illegible]ge) de[illegible].

$|\vec{a}| =$ ____________

[illegible]$| =$ ____________

[illegible] Be[illegible]chnen Sie das S[illegible]arprodukt der Ve[illegible]toren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit Hilfe der berechneten Längen und des [illegible]ssenen Wi[illegible]kels:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\alpha =$ ____

e) Berechnen Si[illegible]r Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die folgende Summe:

____

[illegible] das Ergebnis mit dem unt[illegible]arprodukt.

[illegible]e Ergebnisse sind ____

f) Begründen Sie auf Basis des Ergebnisses in e), warum das Sk[illegible]ch wie folgt berechnet werden kann: [illegible]

____

____

____

____

---

5. Überblick zur Definition des Skalarprodukts

Definition des Skalarproduktes zweier Vektoren mit Hilfe des eingeschlosse[illegible] Win[illegible]:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\alpha$$

Definition des Skalarproduktes zweier Vektoren in Koordi[illegible]form

Ebene: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$ **Raum:** [illegible] a_2 [illegible] a_3 [illegible] b_3 $= a_1 \cdot b$[illegible]$_2 + a_3 \cdot b_3$

Aufgabe 10.4

a) Lesen Sie in einer geeignete[illegible]uelle [illegible] Bew[illegible] die Gülti[illegible] der Regel im Kasten oben nach.

b) Informieren Sie sich m[illegible]e einer geeig[illegible]en Quelle ü[illegible]die Recheng[illegible]e für das Skalarprodukt.

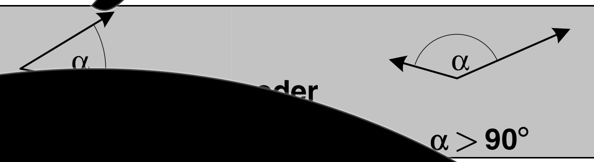
6. Folgerungen [illegible]dem [illegible]arprodukt

a) Mit Hil[illegible]es Ska[illegible]odu[illegible] kann man [illegible]berprüfen, ob zwei Vektoren orthogonal sind.

W[illegible]n $\vec{a}$ [illegible] ist, dann [illegible]lt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ [illegible] $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$

b) [illegible]an die Formel z[illegible]efinition d[illegible]alarprodukts nach cos α um, so kann man den eing[illegible]chlossenen W[illegible]el zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ berechnen. Die berechneten Werte für die Winkel liegen im Intervall [0°; [illegible]°]

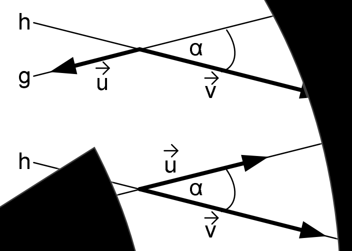
Winkel zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:



$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

[illegible]chnittwinkel von Geraden:

[illegible]hnittwinkel von Geraden berechnet man mit [illegible]ektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ der [illegible]iden Geraden. Beim Schnitt von zwei Geraden g und h [illegible]inkel, von denen einer größer als 90° und einer kleiner als 90° ist. Den kleineren Wi[illegible]**chnittwinkel von Geraden** bezeichnet wird, erhält man, wenn man im Zähler den [illegible]alarprodukts verwendet. Ohne Betr[illegible]erhält man den von den Vektoren [illegible]enen Winkel, und der kann dann [illegible]



[illegible] liefert in beiden Fällen α

[illegible]$|\vec{v}|$

Aufgabe 10.5

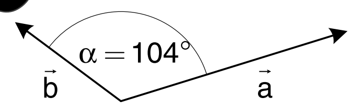
Die folgenden Beispiele zeigen grundlegende Anwendungen und den Umga… den A…endungen des Skalarprodukts. Ergänzen Sie fehlende Anmerkungen und Rec… …chritte.

1. Berechnen des Winkels zwischen zwei Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}$ …d $\vec{b}=$ …

Man setzt beide Vektoren in die Formel für die Be… …inkels ein.

$$\cos\alpha=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{\begin{pmatrix}\_\_\\\_\_\\\_\_\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\_\_\\\_\_\\\_\_\end{pmatrix}}{\sqrt{\_\_+\_\_+\_\_}\cdot\sqrt{\_\_+\_\_+\_\_}}$$

$$=\frac{\;}{\sqrt{\_\_}} \ldots -0,24$$



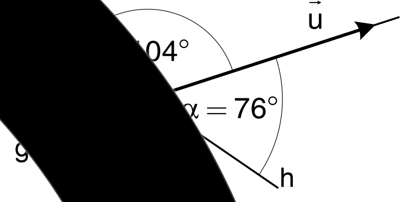
$$\Rightarrow \alpha = \ldots^{-1}(-0.24)\approx \ldots 04$$

…hnen des Schni…inkels zw… …den Geraden g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\-3\\3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}$ und h: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\6\\10\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\-3\\-4\end{pmatrix}$

Man setzt die Richtungsve… …n der Geraden in die Formel ein. (Beachten Sie dabei, dass die Richtungsvektoren mit den V…ktoren aus 1. übereinstimmen.)

$$\ldots\sqrt{\_\_+\_\_+\_\_}\cdot\sqrt{\_\_\ldots}$$

$$=\frac{|\_\_+\_\_\_+\_\_|}{\sqrt{\_\_\_}\ldots}=0,24$$



…e die Wirkung de… Betragsstriche im Zähler des Bruchs:

---

3. Prüfen, ob zwei Vektoren oder zwei Geraden orthogonal sind.

a) Erläutern Sie folgende Rechnung:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \quad\Rightarrow\quad \cos\alpha=\frac{0}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=0 \;\Rightarrow\; \alpha=\cos^{-1}(0)=90^\circ$$

4. Gegeben sind die Geraden g: $\vec{x}=\ldots\begin{pmatrix}\ldots\\\ldots\\6\end{pmatrix}\ldots\begin{pmatrix}1\\\ldots\\-1\end{pmatrix}$ …h: $\vec{x}=\begin{pmatrix}\ldots\\-1\\9\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-\ldots\\\ldots\\0\end{pmatrix}$ und die Ger…e … $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$.

Alle drei Geraden lie… …n e… Ebe… …aben jew…s …inen Schnitt…nkt. Geben Sie an, welche der Geraden orthogo… …ind… …m Sie die folgende… R…chnungen u… …en Text ergänzen:

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\ldots\\3\\0\end{pmatrix}=\_\_\_\_+\_\_\_\_+\_\_\_\_=8$ Die Geraden ___ und ___ sind ____________________

$\ldots=\begin{pmatrix}\ldots\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}=\_\_\_\_+\_\_\_\_+\_\_\_\_=0$ Die Geraden ___ und ___ sind ____________________

$\vec{v}\cdot\vec{w}=\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}=\_\_\_\_+\_\_\_\_+\_\_\_\_=3$ Die Geraden ___ und ___ sind ____________________

Er…

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Algebra
selbstorganisiert erlernen

Kap

Vektor- oder Kreuzp

02-031-266

Lineare Gleichungssysteme

Einführung in die Vektorrechnung

Geraden in der Ebene und

Eben

Lineare Abbildungen

Gesa ebra selbstorganisiert erlernen (031-266)
St

SelbstVerlag
tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ
lehrerselbstverlag.de
www.f-druck.de

Kapitel 11: Vektor- oder Kreuzprodukt

Neben dem Skalarprodukt, bei dem das Ergebnis der Multiplikation ein Skala[illegible] gibt es [illegible]e weitere Möglichkeit Vektoren miteinander zu multiplizieren. Wie der Name [illegible]produ[illegible], ist das Ergebnis dieser Multiplikation ein Vektor.

Eine Anwendung dieser Multiplikation ist in der Physik bei [illegible]chnu[illegible]zkraft, die bei der Bewegung geladener Teilchen im Magnetfeld auftritt, zu find[illegible]

Die Definition des Vektor- oder Kreuzprodukts zwei[illegible] [illegible]aums $\vec{a} \times \vec{b}$ (s[illegible]ich: a kreuz b) kann in jedem Tafelwerk nachgeschlagen w[illegible]nd [illegible]

Definition Vek[illegible]dukt [illegible] $= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$

Neben der Anwend[illegible] Form[illegible] man a[illegible]geeignete Taschenrechner einsetzen, um das Vektorprodukt zu [illegible]tteln[illegible] besteht zudem die M[illegible]keit dies[illegible] Produkt manuell zu berechnen. Hierbei wird ersicht[illegible] dieses Pro[illegible] auch als Kr[illegible]odukt bezeichnet.

Berech[illegible] Kreu[illegible]dukts ohne [illegible]endung der [illegible] oder des Taschenrechners:

[illegible] Sch[illegible]
[illegible]te
K[illegible]ponente
be[illegible]
[illegible]en unten
an[illegible]ngen.

2. Schri[illegible]
x-Ko[illegible]ponente bere[illegible]:

$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow -1 \cdot 1 - 3 \cdot 1$
2 3

y- und z-Komponenten werden [illegible]ltipliziert.

3. Schritt
y-Komponente berechnen:

$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 3 \cdot 3 - 2 \cdot 1$
2 3

z- und angehängte x-Komponenten werden über Kreuz multipliziert.

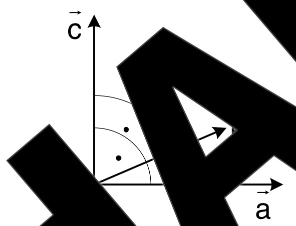
$\begin{pmatrix} -1 \cdot 1 - 3 \cdot 1 \\ [illegible] \cdot 3 - 2 \cdot 1 \\ [illegible] - (-1) \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - 3 \\ 9 - 2 \\ 2 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$

2

4. Schritt
z-Ko[illegible]en:
[illegible] 3
2 3
x- und y-Komponenten werden über Kreuz multipliziert.

Eigenschaften des Vektorprodukts $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$

1. Der Vektor $\vec{c}$ ist orthogonal zu den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$



Aufgabe 11.1

Ergänzen und erläutern und Sie die folgende Rechnun[illegible]

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \_\_\_\_ + \_\_\_\_$ [illegible]

$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \_\_\_\_ + \_\_\_\_$ [illegible]0

2. Das [illegible]kto[illegible] [illegible] ein Recht[illegible]ystem.

D[illegible]ektor an der zw[illegible]n Po[illegible]tion, hier [illegible] zeigt in [illegible]ichtung Ze[illegible]ger.

Der Vektor an der ersten Position, hier $\vec{a}$, zeigt in Richtung Daumen.

$\vec{c}$ zeigt in Richtung Mittelfinger.

$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$

Vertauschen von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bewirkt Umkehrung von $\vec{c}$.

$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{c}$

Die Rich[illegible] ab[illegible] [illegible]net, und kann m[illegible] [illegible]and-Regel** ermittelt werden.

Aufgabe 11.2

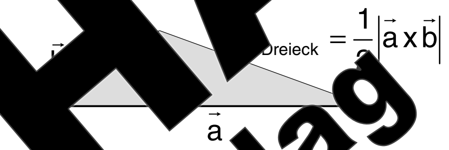
Weisen Sie dur[illegible]h, dass gilt: $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ [illegible] \\ [illegible] \end{pmatrix}$

=

3. Mit dem Vektorprodukt kann man Flächen berechnen.

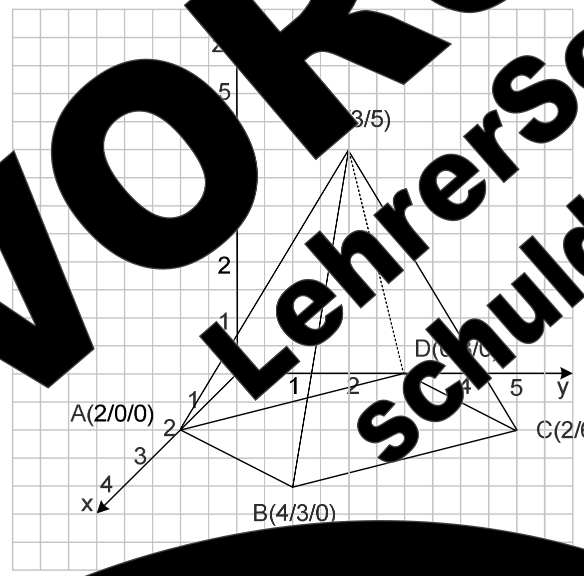
Für die Fläche eines Parallelogramms, das durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird, gilt:



Für das markierte Dreieck gilt demnach:

Aufgabe 11.3

Zeigen Sie, dass die Grund… ebildeten Pyram… eine Raute … und ergänzen bzw. erläutern Sie die B… g der nachf… enden drei B… chnungen:



Berechnung 1:

Erläu…

$$\_\_\_\_\_ = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \dots \end{pmatrix} \ \begin{pmatrix} -2 \\ \dots \end{pmatrix}\right|$$

$$= \sqrt{144} = 12$$

Berechnung 2:

Erläuterung:

$$\_\_\_\_\_ = 4 \cdot \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}\right|$$

$$= 2 \cdot \left|\begin{pmatrix} \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{pmatrix}\right| = 2\left|\begin{pmatrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{pmatrix}\right|$$

$$= 2\sqrt{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} = 2\sqrt{361}$$

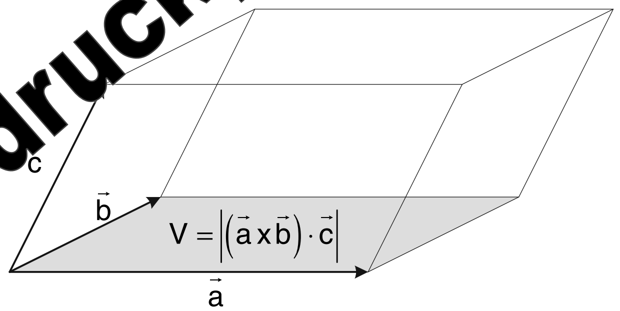
Berechnung 3:

…äuterung

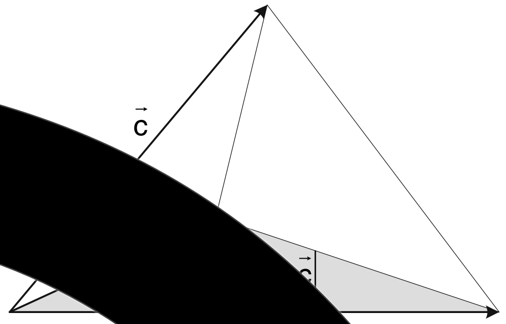
A = 12 + 38 = 50

3. Mit dem Vekt… produkt… n man Volumen berechnen

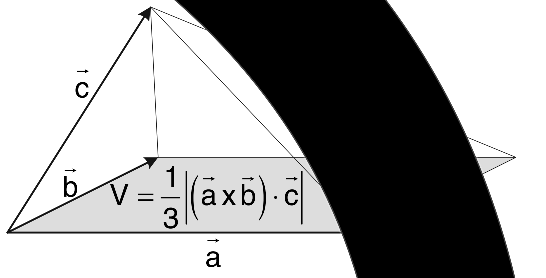
a) Vol… n eines Spats



b) Volume…
Gr…



c) Volumen einer beli… deren Grundfläche … $\vec{a}$ und $\vec{b}$ … Paral… ein Qu…



Er… ungen:

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Alge[illegible]
selbstorganisiert [illegible]lernen

Kap[illegible]

Darstellung von E[illegible]

02-031-266

Lineare Gleichungssysteme

Einführung in die Vektorrechnung

Geraden in der Ebene und [illegible]Ra[illegible]

Ebe[illegible]un[illegible]

Lineare Abbildungen

Gesa[illegible]ebra selbstorganisiert erlernen ([illegible]-031-266)
St[illegible]

[illegible]SelbstVerlag
[illegible]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[illegible]
[illegible]lehrerselbstverlag.de
[illegible]www.f-druck.de

Kapitel 12: Darstellung von Ebenen

Aufgabe 12.1

Während Geraden im Raum in der linearen Algebra nur mit Hilfe de[illegible]tergleichung angegeben werden, kann man Ebenen mit drei verschiedenen Darstellungsform[illegible] besch[illegible]n. Erarbeiten Sie sich mit Hilfe der folgenden Informationen und Aufgabenstellun[illegible] die Eb[illegible]stellung im Raum.

1. Ebenen in Parameterdarstellung

Sie wissen bereits, dass eine Gerade durch zwei P[illegible] und [illegible]it Hilfe der Parametergleichungen $g\colon\ \vec{x} = \vec{p} + s\overrightarrow{PQ}$ oder $g\colon\ \vec{x} = \vec{p} + s\vec{u}$ ange[illegible] wird. [illegible]an aus der folge[illegible]bildung erkennt, kann durch Hinzufügen eines dritten P[illegible]tes R und dan[illegible]rch Hinz[illegible] eines zweiten Vektors von P nach R eine Ebene festgelegt w[illegible]n (vgl. [illegible]itel 7 Lineare U[illegible]abhängigkeit[illegible]urch Linearkombination der beiden [illegible]ren [illegible]d $\vec{v}$ [illegible]steht ent[illegible]end zur Ge[illegible]engleichung eine Ebenengleichung in Param[illegible]rdarstellung.

$$E\colon\ \vec{x} = \vec{p} + r\vec{u} + s\vec{v}$$

Bezeichnungen:

$\vec{x}$: Ortsvektor zu einem beliebigen Punkt auf der Ebene

$\vec{p}$: Stützvektor der Ebene = Ortsvektor zum Punkt P

$\vec{u}$: Spannvektor $\vec{u} = \overrightarrow{PQ}$

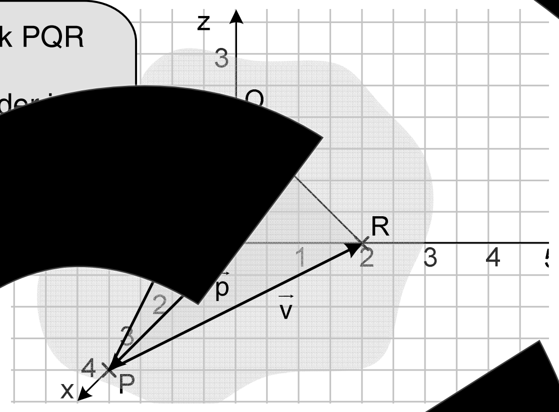
$\vec{v}$: Spannvektor $\vec{v} = \overrightarrow{PR}$

Man spricht bei Ebenen nicht mehr von einem Richtungsvektor, sondern von zwei Spannvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$, welche die Ebene aufspannen.

Um die [illegible] darzustellen, werden Ebenen, wie im folgenden B[illegible]atensystem dargestellt.

[illegible]geben ist eine Ebene, welche die folgenden Pu[illegible]/0), Q(0/2/0) und R(0/0/2)

Das Dreieck PQR ist nur ein Ausschnitt de[illegible] unendli[illegible] aus[illegible] E[illegible]



$[illegible]\overrightarrow{Q} + s\overrightarrow{PR}$

$$E\colon [illegible] \begin{pmatrix} -4 \\ [illegible] \\ [illegible] \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

oder mit g[illegible]pannvektoren

$$E\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} [illegible] \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

---

2. Ebenen in Normalendarstellung

Für die Normalendarstellung der Ebene benötigt man einen Stützvektor $\vec{p}$ und [illegible] belie[illegible]n Repräsentanten des Vektors, der orthogonal zur Ebene E verläuft. Di[illegible] Vektor [illegible] **Normalenvektor $\vec{n}$** der Ebene bezeichnet. Wie man den folgenden A[illegible]n ent[illegible]en kann, legen der Stützvektor die Position der Ebene und der Normalenvektor [illegible] La[illegible] Ebene im Raum fest.

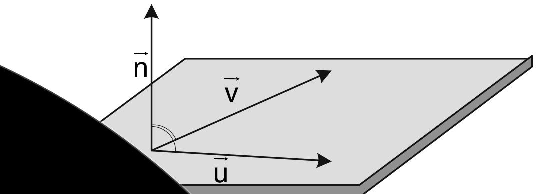
Der Stützvektor $\vec{p}$ ist der Ortsvektor eines beliebigen bekannten Punktes auf E.

Die Lage der [illegible] wird [illegible]h den Normalenvektor best[illegible]. Ände[illegible]r Normalenvekto[illegible] ine[illegible] R[illegible]ung, verände[illegible]h auch die [illegible]age der Ebene.

Begr[illegible]n Sie, waru[illegible] m[illegible]n den Norma[illegible]vektor einer Ebene mit Hilfe des Vektorprodukts bestimmen kann, in dem Sie den fo[illegible]den Satz vervollständigen:

Das Vektorprodukt aus zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$

erzeugt einen Vekto[illegible] zu den beide[illegible] sen[illegible] [illegible]gespannt wird. Damit gilt für d[illegible] [illegible]vektor $\vec{n}$ der Ebene:



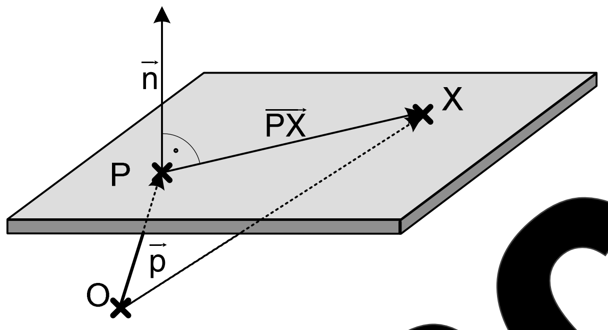
$$\vec{n} = \vec{u} \text{ x } \vec{v}$$

[illegible]nvektoren [illegible]genau [illegible]vektoren

Für di[illegible] gilt damit:

$$[illegible]\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{x} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ [illegible] \end{pmatrix}$$

Anhand der folgenden Abbildung wird nun die Überlegung, die der Ebene darstell n Normalenform zugrunde liegt, erläutert:



Bezeichnun

$\vec{x}$: Ortsvek zu beliebigen bekan nk auf der Ebene

$\vec{p}$: ktor er Ebene = Ortsvektor zum Punk

$\vec{n}$: liebiger Rep äsentant des Normalenv ktors der Ebe E

$\overline{PX}$: ktor vom Punkt P(p_1/ p_2/ p_3) zum Punkt (x_1/ x_2/ x_3)

Die Ebenengleich rgib aus der Zusammenfassung drei Überlegungen:

er Vekt und der ktor $\overline{PX}$ nd

Bei orthogo Vektoren das Skala dukt Null: $\overline{PX}$

3. Für den Vektor $\overline{PX}$ gilt: $\overline{PX} = \vec{x} - \vec{p}$

$$E : (\vec{x}-\vec{p})\cdot\vec{n}=0 \quad \text{oder} \quad \left[\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}=0$$

Für das Beispiel 1 gilt damit:

E_N :

$$E_N : \left[\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}=0$$

---

3. Darstellung einer Ebene in Koordinatenform

Multpliziert man das Skalarprodukt der Ebene aus der Normalendarstellung aus rhält die Ebene in Koordinatendarstellung.

$$\left[\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}=0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}=0$$

$$\Rightarrow n_1x+n_2y+n_3z-(n_1p_1+n_2p_2 \quad p_3)=0$$

$$\Rightarrow n_1x+n_2y+n_3z=d$$

Wichtig:
Die Vorf en vo y und z en chen d Komp n de rs.

Da man die Zah rte von n_i d p kennt, ergibt iese Summe eine lenwert, de n mit d bezei et.

In Tafelwerken findet m Ko atendarstel in der Rege er folgenden Form:

$$E \quad +by+c \quad \text{mit} \quad \vec{n}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

Zeigen Sie durch Ausmultipliziere r Normalendarstellung, dass sich die Ebene aus Beispiel 1, wie unten angegeben, darstellen lässt:

$$\begin{pmatrix}\_\_\_\\\_\_\_\\\_\_\_\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\_\_\_\\\_\_\_\\\_\_\_\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\_\_\_\\\_\_\_\\\_\_\_\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\_\_\_\\\_\_\_\\\_\_\_\end{pmatrix}=0$$

⇒ _____+ _____ _____+ _____) = 0

E_K : x + 2

Aufgabe 12.2

Eine Ebene F ist durch die Punkte A(–4 / 1 / 3), B(1 / 0,5 / 1) und C(2 / –3 / egebe

a) Zeigen Sie durch Rechnung, dass sich bei der Wahl von Punkt punkt ie Ebene die folgende Ebenengleichung in Parameterdarstellung erg $E_P :$ $\begin{pmatrix} - \\ \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

eln Sie di Nor endarste er Ebene F. (Zur Kontrolle: $E_N : \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 17 \\ 34 \\ 34 \end{pmatrix} = 0$)

---

c) Ermitteln Sie die Gleichung der Ebene F in Koordinatendarstellung und zeigen ie, dass Ergebnis mit der Koordinatendarstellung der Ebene E im Beispiel 1 von Aufg .1 übe timmt.

Au

Vergleichen Sie die Ergeb se aus de aben 12.1 und 12.2 und ergänzen Sie:

- Die Parameterdarstellungen Ebenen E und F weisen ______________ Gemeinsamkeiten auf und man kann ______ erkennen, dass es sich um die gleichen Ebenen handelt.
- D ______________________________ ie Normalenvektoren sin ____.
- Die Koordinatendarstellung der Ebenen E und F ist ____________________.
- Wenn man über zwei Ebenen identisch sind, gl

  Die __ g ist dafür ungeeignet, da ein un ene

  ve kann.

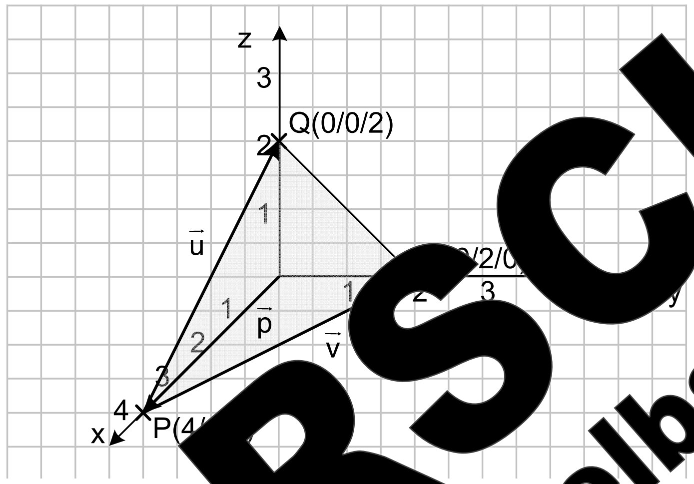
  ____________darstellung ist am besten geeignet, da gleiche tische

  ngen haben.

Aufgabe 12.4

Zusammenhang der Koordinatendarstellung einer Ebene und ihrer Achs… …schn…

Die Ebene aus dem Einstiegsbeispiel in Aufgabe 12.1 soll hier erne… …rstellung der Zusammenhänge herangezogen werden.



…dina… …leichung in der einfachsten …Da… …llung:

E_K: x + 2… + 2z = 4

Umfor…g der K…dinatengleichung

W… ma… …telte Koordinatendarstellung der Ebene E so umformt, dass auf der rechten Seite de… …eichn… …eichens ei… …teht, erhä… …n die Gleichung:

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=1$$

Formulieren Sie einen Zusammenhang zwischen den Nennern der umgeformten Koordinatendarstellung der Ebene E sowie den Koordinaten der Achsenabschnitte, indem Sie die folgenden Lücken vervollständigen:

$\frac{z}{}=1$

…abschnitt auf der-
___-Achse P(4/0/0)

Achse…
___-Achse …

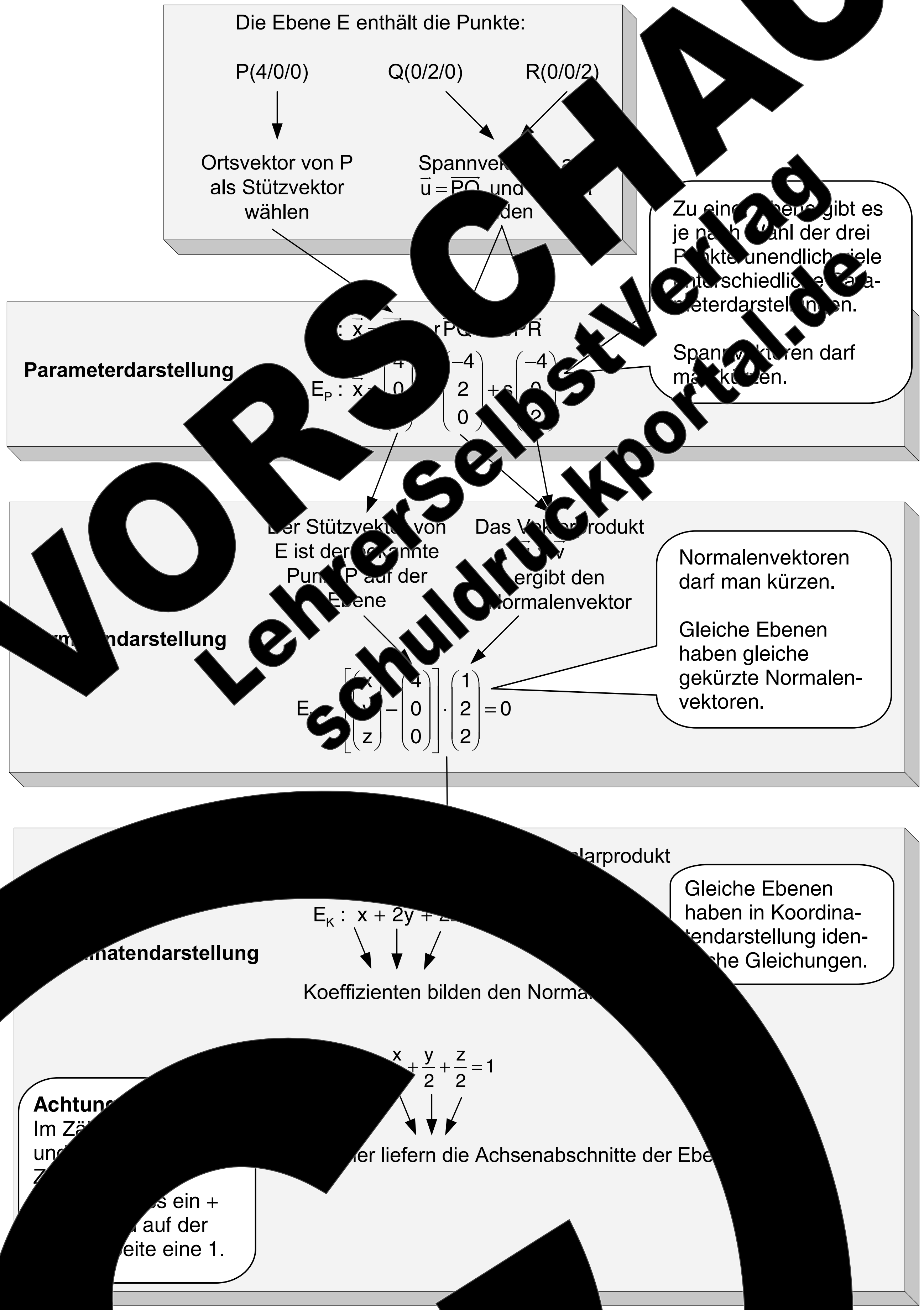
Achsenabschnitt auf der-
___-Achse Q(0/0/2)

Stellt man eine Ebene in der Koordinatendarstellung so dar, dass… …leichheitszeichen eine 1 steht und im… …he links vom Gleichheitszeichen… …z ohne Vorfaktoren erscheinen, s… ________________ der Ebe… …r Nenner bestimmen.

Di… …oordinaten… …ellung einer Ebene wird auch als **Achse… …form** bezeichnet.

---

4. Eine Ebene – Drei verschiede Darstellungen – Zusammenhänge am Beispi… aus A…be 12.1



Aufgabe 12.5

Vertiefendes Beispiel

Die Punkte P(1/1/0), Q(2/0/1) und R(0/1/2) liegen in einer Ebene E[illegible]

a) Ermitteln Sie eine Parameter-, eine Normalen- und eine Koordina[illegible]dar[illegible]g der Ebene. (Kontrollergebnis: E: 2x + 3y + z = 5)

b) Erläutern Sie, warum es sinnvoll ist, ein Kontroller[illegible]ebnis [illegible] Koo[illegible]atendarstellung oder in der Achsenabschnittsform anzugeben.

c) Zeichnen Sie die Ebene anhand ihrer Ach[illegible]bschn[illegible]so, das[illegible]ein räuml[illegible]druck von der Lage der Ebene entsteht.

5.[illegible]m[illegible]e Zusammenfa[illegible]ung der Erge[illegible]se zur Darstellung von Ebenen

Parameterdarstellung: $E_P: \vec{x} = \vec{p} + r\vec{u} + s\vec{v}$

Normalendarstellung: $E_N: \left(\vec{x} - \vec{p}\right) \cdot \vec{n} = 0$ mit $\vec{n} = \vec{u} \, x \, \vec{v}$

Koordinate[illegible] mit $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

[illegible]itte

$\frac{x}{\frac{d}{a}} + \frac{y}{\frac{d}{b}} + \frac{z}{\frac{d}{c}} = 1$

Achsenabschnitt x – Achse:

Achsenabschnitt y – Achse: Y(0[illegible]

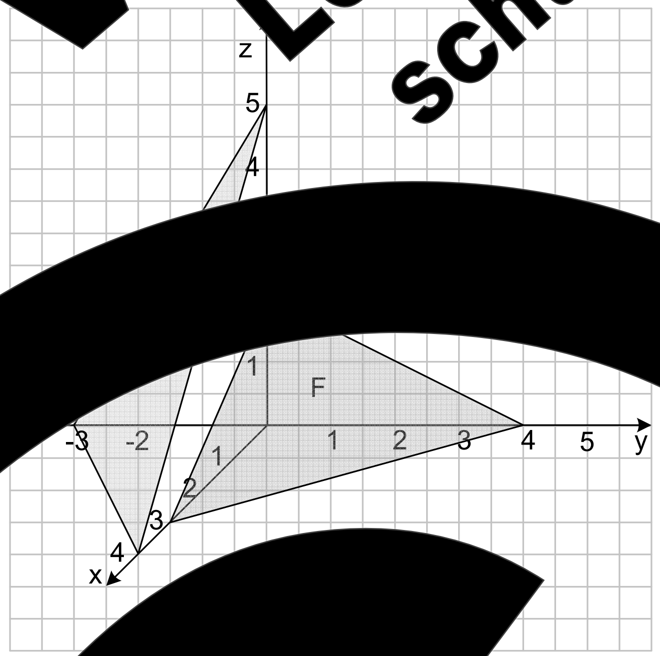
[illegible]chnitt z – Achse: Z(0 / 0[illegible]

Aufgabe 12.6

Zeichnen Sie die Ebene E: 3x + 2y + 6z = 6 mit Hilfe der Achsenabschnitte a rägbi

gab 2.7

Er eln Sie Gleichung Ebenen in Koordinatenform mit dem geringst möglichen Rec aufwand.

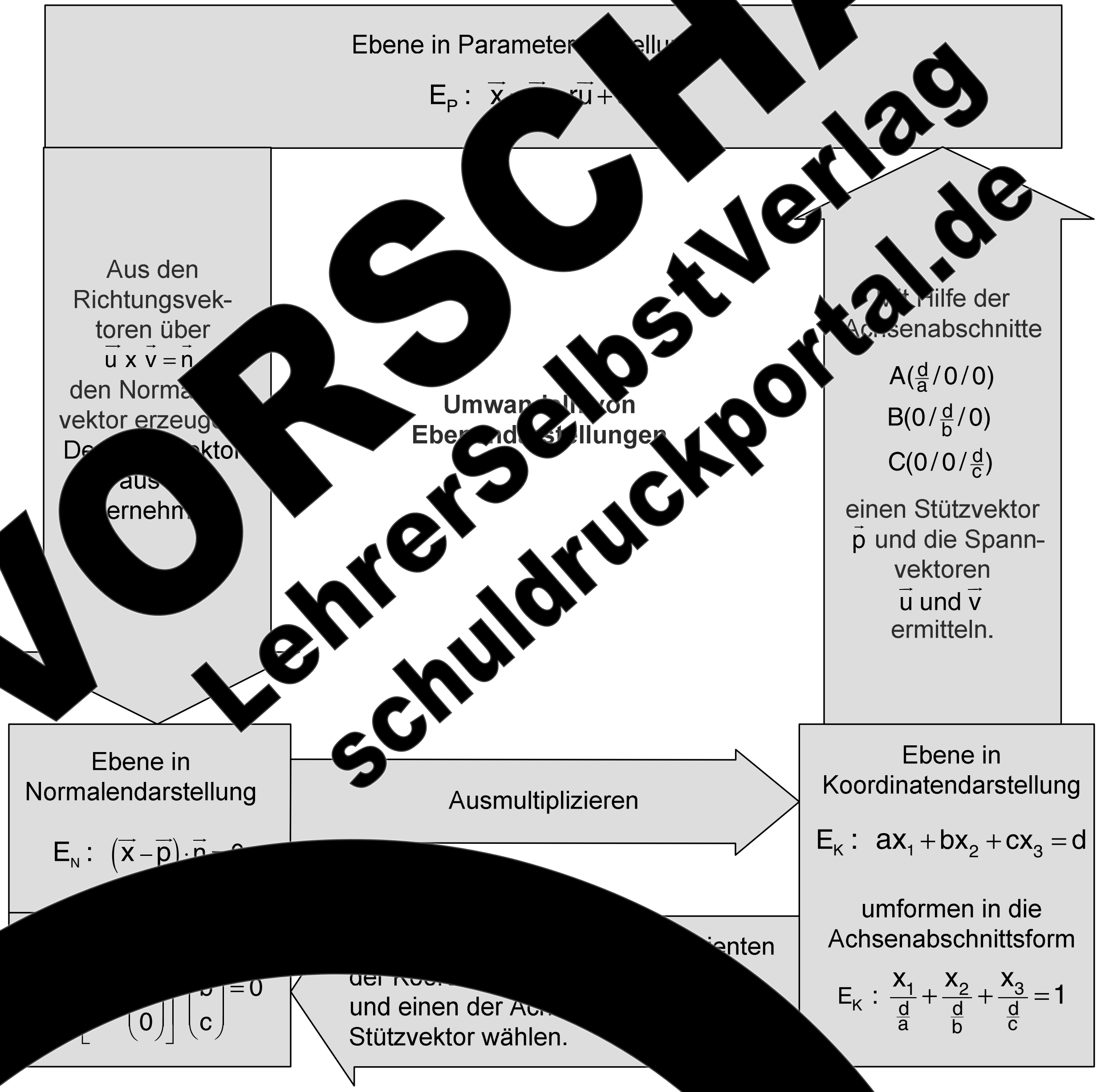


bungen:

---

6. Überblick Umwandeln von Ebenen

Es gibt eine Vielzahl von Möglichkeiten, eine Ebene von einer Darstellung in ei ndere umzuwandeln. Die in der folgenden Abbildung dargestellten Verfahren ben in chtu elesen eine begrenzte Auswahl an Varianten an, mit der man jede Darstellu Ebene andere umwandeln kann.



Ergä ngen:

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Alge

selbstorganisiert erlen en

Kap

Besondere Ebe

02-031-266

Lineare Gleichungssysteme

Einführung in die Vektorrechnung

Geraden in der Ebene und Rau

Eben

Lineare Abbildungen

Gesa ebra selbstorganisiert erlernen (D -031-266)
S

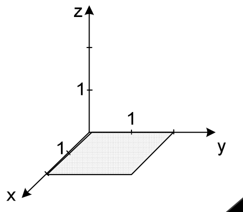
SelbstVerlag
tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ
lehrerselbstverlag.de
www.f-druck.de

Kapitel 13: Besondere Ebenen

Aufgabe 13.1

In den folgenden Abbildungen sind die Koordinatenebenen abgebil teln Si jeder Koordinatenebene eine möglichst einfache Gleichung in Parameterd tell rmalendarstellung und Koordinatendarstellung.

x,y-Ebene

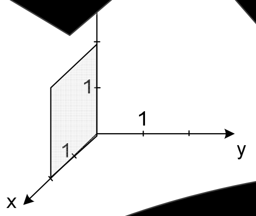


Parameterdars g:

No alen tellung:

tendarstellung:

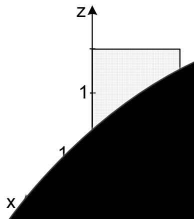
x, be



ameterdars ung:

Nor alendarstellung:

ene



Parameterdarstellung:

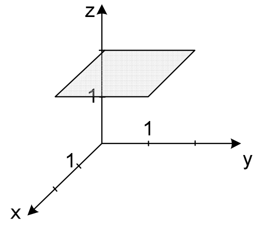
darstellung:

Koordinatendarstellung:

Aufgabe 13.2

In den folgenden Abbildungen sind zu den Koordinatenebenen parallele Ebenen a ldet. E teln Sie zu jeder abgebildeten Ebene eine möglichst einfache Gleichung in P terdars Normalendarstellung und Koordinatendarstellung.

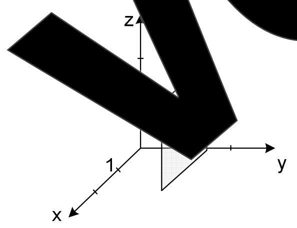
Zu den Koordinatenebenen parallele Ebenen



Parameterdarstellung:

Normalendar llung:

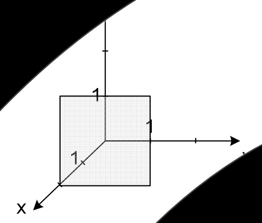
tenda g:



arameterdar ung:

Nor alendarst g:

Koordinatendarstellung:



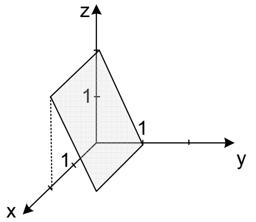
Parameterdarstellung:

Norm arstellung:

arstellung:

Aufgabe 13.3

In den folgenden Abbildungen sind Ebenen dargestellt, die zu jeweils einer Ko[illegible]atena[illegible]e parallel sind. Ermitteln Sie zu jeder abgebildeten Ebene eine möglichst einf[illegible] Gleich[illegible] Parameterdarstellung, Normalendarstellung und Koordinatendarste[illegible]

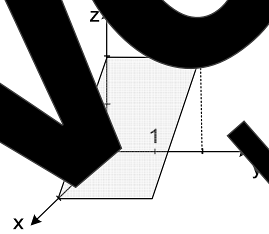


Parameterdarstellung:

Normalendars[illegible]ng:

[illegible]oordinatenda[illegible]ellung:

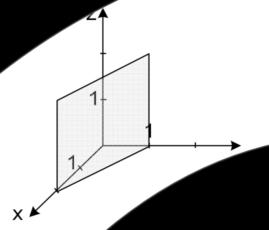
[illegible]arameterd[illegible]stellung:



[illegible]ormalendar[illegible]ng:

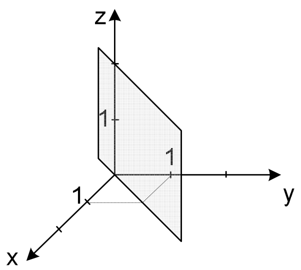
Koordinatendarstellung:

Parameterda[illegible]



Normalendarstellung:

[illegible]endarstellung:



Parameterdarstellung:

Normalendarstellung:

Koordinatendarstell[illegible]

Aufgabe 13.4

a) Formulieren Sie eine R[illegible] [illegible]che be[illegible], wie m[illegible] an de[illegible] Koordina[illegible]darstellung einer Ebene erkennen kann, dass [illegible] zu e[illegible] der K[illegible]inateneb[illegible] parallel verläuft.

____

____

____

Formu[illegible]en Sie eine Regel, w[illegible]che beschreibt, w[illegible] man an der Koordinatendarstellung einer Ebene [illegible] kann, dass sie zu [illegible] der Koordinatenachsen parallel verläuft.

____

____

____

c) Formuli[illegible] [illegible]en erkennen kann, dass die Ebene durch de[illegible]

[illegible]stellung:______________________________

[illegible]alendarstellung:______________________________

Koordinatendarstellung:______________________________

Ergänze[illegible]______________________________

____

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Alge[illegible]
selbstorganisiert [illegible]

Kap[illegible]

Lagebeziehungen be[illegible]

02-031-266

Lineare Gleichungssysteme

Einführung in die Vektorrechnung

Geraden in der Ebene und [illegible]

Ebe[illegible]

Lineare Abbildungen

Gesa[illegible]ebra selbstorganisiert erlernen ([illegible]-031-266)
S[illegible]

[illegible]SelbstVerlag
[illegible]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[illegible]
[illegible]lehrerselbstverlag.de
[illegible]www.f-druck.de

Kapitel 14: Lagebeziehungen bei Ebenen

In der linearen Algebra gibt es für die Untersuchung der Lagebeziehungen zw... ...en Ebe... ...n im Raum und Punkten sowie Geraden und anderen Ebenen eine Vielzahl vo... ...lichkeit... ...edoch völlig ausreichend eine Methode zu beherrschen. Daher wird in den folge... ...schnitte... ...r die verschiedenen Aufgabentypen jeweils nur eine Variante vorgeschlag...

1. Lagebeziehung Ebene E und Punkt R

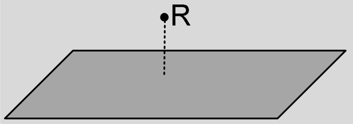
Prinzipielle Vorgehensweise:

Die Koordinaten bzw. Komponenten d... ...rtsvektors z... ...unkt R, als... $\vec r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$ werden unabhängig von der Darstellung der Eben... ...er E... ...ngle... ...ng für d... ...mponenten x, y und z eingesetzt.

Ebene in Parameter...stellung	Ebene... Normale...stellung	Ebenen in ...oordinatendarstellung
$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$ ... $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ ... $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ ... $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ ...e Pa... ...s und t mit Hi... eines ...S berechnen. D... Berechnung des ...GS ist oft ...ändig. Dah...r ist es günstiger, di... Ebene in die Koordinatendarstellung umzurechnen.	E... in Koordinatenda...stellung ...mformen und dann wie rechts ne... ...beschrie...	Komponenten von r für x, y und z einsetzen. $ar_1 + br_2 + cr_3 = d$ Linke Seite der Gleichung berechnen.

Interpretation der Ergebnisse

Rechnung ist widerspruchsfrei ⇒ R liegt in E



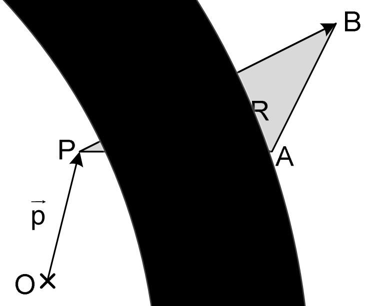
Rechung liefert Widerspruch ⇒

Zusatzinfo:

Bei Frag... ...em Dreieck PAB liegt, (s. A... ...meterdarstellung ge... ...mittelt zu können.

... Drei... ...B, wenn für s und t ...g die folgenden drei Bedingungen gelten:

$t < 1$ und
$\leq s < 1$ und
$\leq t + s < 1$



Aufgabe 14.1

Zeigen Sie, dass der Punkt R(6/0/2) auf der Ebene $E: \vec x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ \\ \end{pmatrix}$ liegt. E... ...ze... ...die beiden Rechnungen und beurteilen Sie, bei welchem Weg der R...chenau... ...nd... ...ist.

Weg 1

Mit der Parameterdarstellung arbeiten und das ...S lösen.

$\vec r$ in E einsetzen:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

LGS erstelle...

I ...s + ... t = ...
II ... – ... 1
...–s ... t = –1
IV –2t = 2
t = –1
t in III: –s + 1 = –1

–5 = –5

...das LGS widerspruchsfrei gelöst werden kann, ...egt R auf E.

W...

Ebene... ...ichung in K...ordinatendarstellung u...form...

...rmalenve... ...estimmen:

$$\vec n = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$E: \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} = 0$$

E: ______________________________

$E: -2x - 3y + 7z = 2$

Koordinaten von R einsetzen:

–12 + 0 + 14 = 2
2 = 2

...uch ⇒ R liegt in E

Beurteilu...

____

____

____

Aufgabe 14.2

Prüfen Sie, ob der Punkt R(1/0/2) auf der Ebene $E:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\1\\\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-1\\\end{pmatrix}$ lie Berec en Sie beide Wege mit Hilfe des vorherigen Beispiels und geben Sie mit Begrü ung cher Rechenweg einfacher für Sie ist.

Weg 1

Mit der Parameterdarstellung arbeiten das LGS lösen.

$\vec{r}$ in E einsetzen:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\1\\\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\\\0\end{pmatrix}$$

LGS er :

I $\quad - \quad = \quad 0 \quad \Rightarrow t =$

$s - \quad = \quad 1$

$-s \quad = \quad - \quad \Rightarrow s = 1$

s,t in II: $\quad - \quad 1 \neq 1$

Widerspruch ⇒ R liegt nicht in E

2

E ngleichung in oordinatendarstellung um men.

Normale v r bestimme :

$$\begin{pmatrix}\\\\\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\\\\\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\_\_\_\\\_\_\_\\\_\_\_\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$E:\left[\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=0$$

E: ____________________________

$E: x+y-z=1$

R in E einsetzen: $\quad 1+0-2 \quad = 1$

$\qquad\qquad\qquad -1 \quad \neq 1$

Widerspruch ⇒ R liegt nicht in E

ng:

____

____

____

Übungen:______________________________________

____

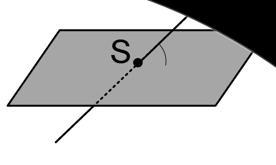
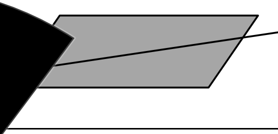
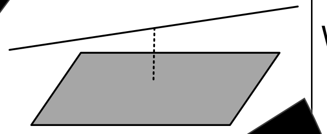
---

2. Lagebeziehung Ebene E und Gerade g

Prinzipielle Vorgehensweise:

Die Komponenten x, y und z des Vektors $\vec{x}$ der Ebenengleichung E: $\vec{x}$ $s\vec{u}+t\vec{v}$ urch die entsprechenden Komponenten der Geradengleichung g: $\vec{x}=\vec{q}+r\vec{w}$ e zt.

Gegeben: $E:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$ und $g\begin{pmatrix}x\\\\\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\\\\q_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w\\w_2\\\end{pmatrix}$ bzw. $x=q_1+rw_1$, $y=q_2+rw_2$, $z=q_3+rw_3$

Ebene in Parameterdarstellung	**ene in alen- da**	**Ebenen i Koordinaten da tellung**
Die Ebenengleichung mit der Ge gleichung gleichsetzen und LG nach r, s und t auflöse $\vec{q}+r\vec{w}=\vec{p}+s\vec{u}+t\vec{v}$ oder $\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\q_3\end{pmatrix} r \begin{pmatrix}\\\\w_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\\end{pmatrix}$ Be hnung des LGS mit t im Allgemeine aufw daher bess r mit der Koordinatendarstellung beiten. Wenn geprüft werden soll, ob der Durchstoßpunkt in einem bestimmten Dreieck liegt müssen s und t bestimmt werden. (Vgl. Zusatzin Lagebezieh	in Koo natendar- st g formen dann wie nehr be ben.	Kom onenten vom ktor $\vec{x}$ der dengleichu $_1+rw_1$, q und q_3+rw_3 für x, y z in der Ebenengleichung ax $+$ z = d etzen und nach r auflösen: $a(q_1+rw_1)+b(q_2+rw_2)+c(q_3+rw_3)=d$
		e
ng für r, s und t. von r in die engleichung g liefert die oordinaten des Schnittpunktes bzw. Durchstoßpunktes S(s₁/s₂/s₃).		der Gleichung liefert ösung für r. Einsetzen von ngleichung g liefert die K Schnittpunktes bzw. Dur S(s₁/s₂/s₃).
Das LGS ist unter Lösungsmen		Gleichun e allgemeing der Form 0=0; Lösung die Gerade.
Wid st parallel zu g II E		Widerspruch ⇒ llel zu E

Aufgabe 14.3

Gegeben ist die Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$. Untersuch[illegible] die Lag[illegible]g von E zu den Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\-2\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}6\\-3\\1\end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}$ und [illegible] $\begin{pmatrix}\text{[illegible]}\\2\\-2\end{pmatrix}$ [illegible] $\begin{pmatrix}\text{[illegible]}\\-1\\1\end{pmatrix}$, indem Sie die folgenden Rechnungen vervollständigen. [illegible] zunäc[illegible], warum [illegible]oll ist, hier mit der Koordinatendarstellung der Ebene zu a[illegible] und ze[illegible] Sie durch R[illegible], dass sich für die Koordinatendarstellung die Gleichung: [illegible]x + 4y + 6z = [illegible] [illegible]gibt.

Begründung:

____

____

Berechnung de[illegible] [illegible]arstellung von E:

[illegible]agebeziehung von E und g:

Aus $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\-2\\\text{[illegible]}\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}6\\-3\\\text{[illegible]}\end{pmatrix}$ ergeben sich die Komponenten: y[illegible]
z =

Eins[illegible] ___– ___) + ___(___+ ___) = 9

______________________________ = 9

9 = 9

[illegible]rgebnis hat die Form 0 = 0, ist also allgeme[illegible] ⇒ g liegt [illegible]

Lagebeziehung E und h:

Aus $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}$ ergeben sich die Komponenten:
x = ______
y = ______
z = ______

Einsetzen in E ergibt: ___ + ___+ ___(___– ___) + ___(___ [illegible]) = 9

____

____________________________________ = ___

___ = ___

Widerspruch ⇒ g is[illegible]l zu E

Lagebezi[illegible]ng E [illegible]i

Aus [illegible] = $\begin{pmatrix}\text{[illegible]}\\\text{[illegible]}\\-2\end{pmatrix}$ [illegible] $\begin{pmatrix}\text{[illegible]}\\\text{[illegible]}\\1\end{pmatrix}$ erge[illegible] die Kompo[illegible]:
x = _______
y = _______
z = _______

Einse[illegible] in E ergibt: ___ + ___+ ___(___– ___) + ___(___+ ___) = 9

____________________________________ = 9

__________________ =

____ = ____

= 4

[illegible] eine Lösung gibt, existiert ein Schnittpunkt.
[illegible]tpunkt berechnen durch Einsetzen von r in die Gerade[illegible]

$\vec{s} = \begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} + \_\_\_ \begin{pmatrix}1\\-1\\\text{[illegible]}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+\_\_\_\\\text{[illegible]}\\\text{[illegible]}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}5\\\text{[illegible]}\\\text{[illegible]}\end{pmatrix}$

Die G[illegible] E im Punkt S(__ / __/ __).

3. Spurpunkte von Geraden

Def.: Spurpunkte S sind die Durchstoßpunkte der Gerade g durch die [illegible]rdina[illegible]ebenen

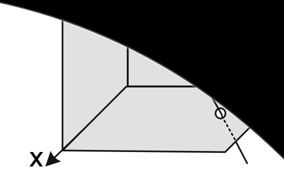
Aufgabe 14.4

Berechnen Sie die Spurpunkte für die Geraden g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ \text{[illegible]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{[illegible]} \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \text{[illegible]} \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \text{[illegible]} - r \\ y = 6 - 2r \\ z = -1 + r \end{matrix}$

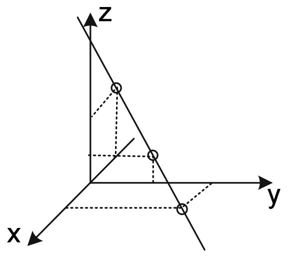
Ermittelt man die Spurpunkte mit [illegible]r Koor[illegible]endarstellung der Koordinatenebenen wird die [illegible]chnung beson[illegible] einfach, da man die einzelnen Komponente[illegible] Gerad[illegible]ur Null setzen muss.

Spurpunkt x,y-Ebene	Spu[illegible]nkt x,z-Ebene	[illegible]punkt y,z-Ebene
Koordinatengl[illegible]ng: [illegible]0	[illegible]ordinaten[illegible]ng: y = 0	Koordinatengleichung: x = 0
z-Koordinate Nu[illegible]	y-Koordi[illegible] Null setzen:	x-Koordinate Null setzen:
$-1 + \text{[illegible]} = 0$ $\text{[illegible]} = 1$	$6 - 2r = 0$ $r = 3$	$2 - r = 0$ $r = 2$
[illegible] in g [illegible]	r in g eins[illegible]n	r in g einsetzen
$\vec{s}_{xy} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} \text{[illegible]} \\ \text{[illegible]} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\vec{s}_{xz} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\Rightarrow \vec{s}_{yz} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
Spurpunkt: S_{xy}(1/4/0)	Spurpunkt: S_{xz}(–1/0/2)	Spurpunkt: S_{yz}(0/2/1)

[illegible] der Spurpunkte kann man [illegible] räumliche Lage von Geraden besonders anschaulich darstellen:



[illegible]der



Übungen

Ü14.1 Berechnen Sie die Spurpunkte der Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und [illegible]eichnen [illegible] die G[illegible]de so, dass ein räumlicher Eindruck entsteht.

Ü14.2 Auf einen Turm, dessen Dach aus einer quadratischen Pyramide besteht (s. Abbildung), treffen Sonnenstrahlen auf.

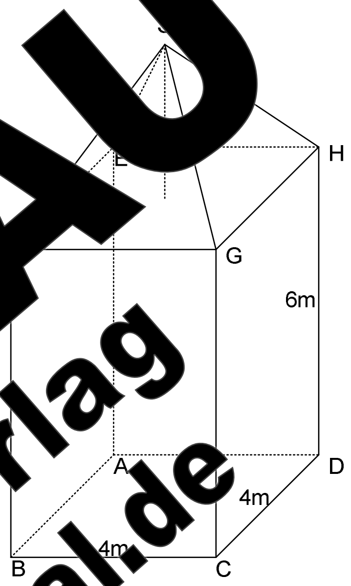
a) Ermitteln Sie die Koordinaten aller Eckpunkte so, dass der Punkt A im Ursprung des Koordinatensystems steht.

b) Zeichnen Sie ein Schrägbild des Turms. (1m $\hat{=}$ 2 Kästchen)

c) Die Richtung der Sonnenstrahlen wird d n den

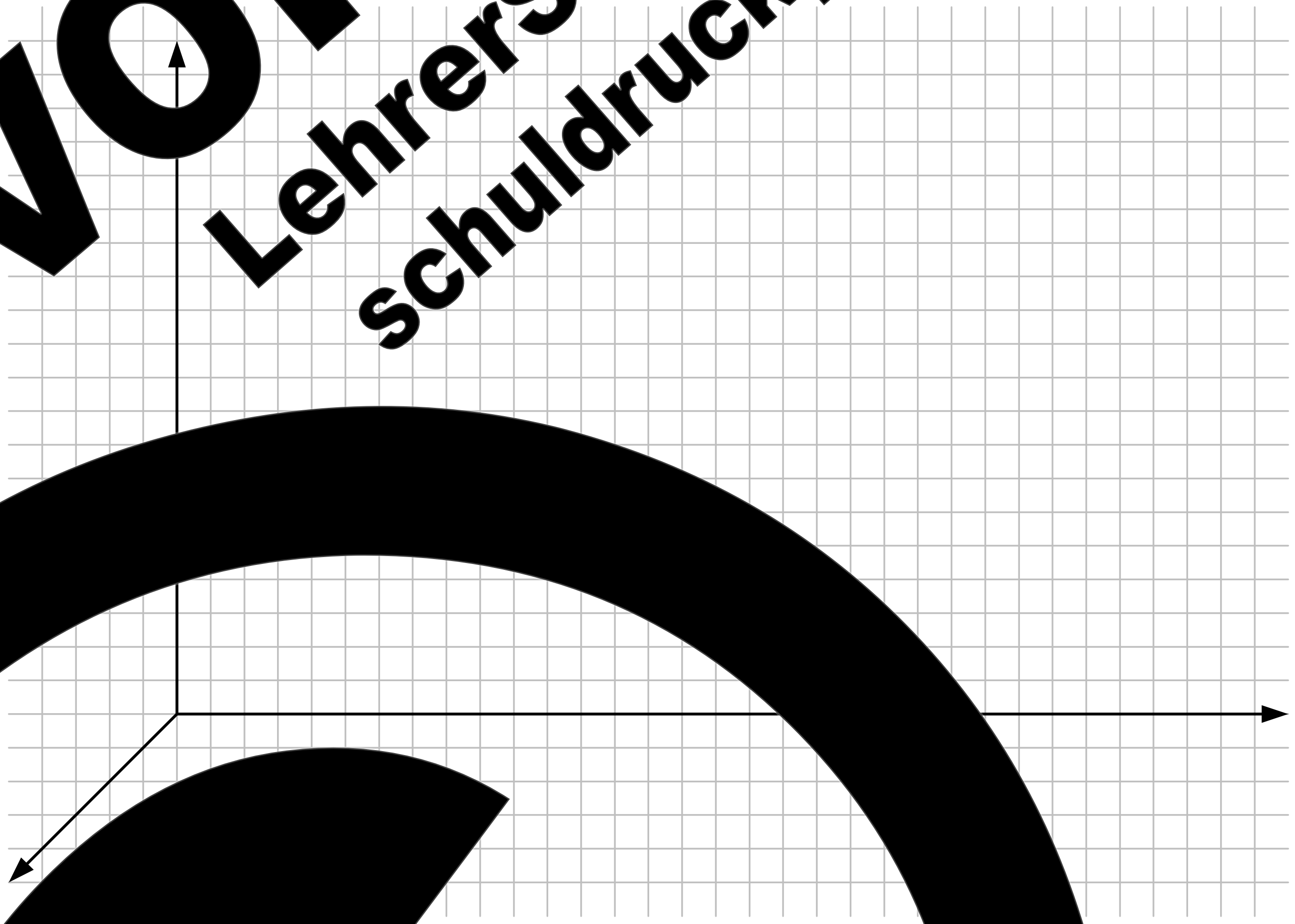
$\vec{v} = \begin{pmatrix}-1\\4\\-3\end{pmatrix}$ beschrieben. Auf de (x,y- e)

entsteht dadurch ein Schatten itteln Eckpunkte der Schattenfläche n Bod kieren Sie di gesamte Schatten che.



A(/ /) B( ) C(/) D(/)

E(/ /) F(G(/ /) H(/ /) S(/ /)



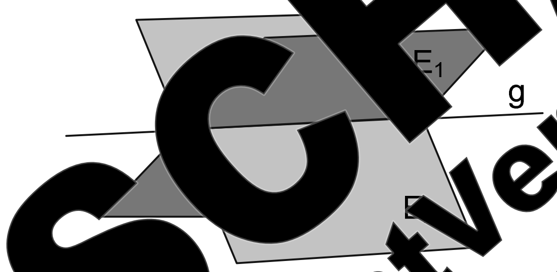
chnungen auf der Folgeseite:

Ergänzer

4. Lagebeziehungen bei Ebenen

Bei der Bestimmung der Lagebeziehung von zwei Ebenen sollte man aufgr[illegible]es Rechenaufwandes darauf achten, dass entweder eine Ebene in K[illegible]dinatend[illegible] oder beide Ebenen in Koordinatendarstellung vorliegen. Damit kann man die [illegible]benste[illegible]g auf die beiden im Beispiel beschriebenen Fälle reduzieren.

Zwei Ebenen schneiden sich → Es exist[illegible] eine [illegible]nittgerade g



Ebene 1 in Koord[illegible]rstellung
Ebene 2 in Pa[illegible]tero[illegible]tellung

E_1: [illegible] 3y [illegible] 36

[illegible] $\begin{pmatrix}0\\0\\[illegible]\end{pmatrix}$ + [illegible] $\begin{pmatrix}[illegible]\\[illegible]\\-1\end{pmatrix}$ $+s\begin{pmatrix}3\\0\\[illegible]\end{pmatrix}$

$x = 3r + [illegible]s$

[illegible]$_2$ folgt: $y = [illegible]2r$

$z = 3 - r - s$

Einsetzen der Komponenten x,y,z in E_1 ergibt:

$4(3r + 3s) + 3(2r) + 6(3 - r - s) = 36$

nach r oder [illegible]

s [illegible]

[illegible]ene E_2 einsetzen

$\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}9-6r\\0\\-3+2r\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0+3r+9-6r\\0+2r\\3-r-3+2r\end{pmatrix}$

Zusammenfa[illegible]
Summan[illegible]
Schni[illegible]

[illegible] r $\Rightarrow$ $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}9\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}$

Eb[illegible] [illegible] Koordina[illegible]darstellung
E[illegible] 2 in Koo[illegible]endarstellung

Durch A[illegible]onsverfahren x, y oder z eliminieren

$$\begin{array}{lll} E_1\text{: I} & x + 2y + 2z = 6 & \\ E_2\text{: II} & x - \ \ y + \ \ z = 3 & \text{I-II} \\ \hline \text{III} & \quad 3y + \ \ z = 3 & \end{array}$$

Da das LGS unterbestimmt ist, darf man eine Variable frei wählen. Hier z.B.: z = 3t

einsetzen z in III liefert y y = 1 – t

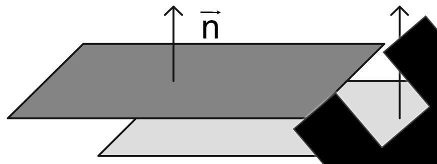
[illegible]nd z in II liefert x x = 4 – 4t

Die Ausdru[illegible] z werden als Vektor dargestellt un[illegible]t, dass sich die Parameterdarst[illegible]nittgeraden g ergibt.

$\vec{x} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4-4t\\1-t\\3t\end{pmatrix}$ [illegible] $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-4\\-1\\3\end{pmatrix}$

Zwei Ebenen sind parallel zueinander → Es ergibt sich ein Wid[illegible]pruch

Die Normalenvektoren der Ebenen sind kollinear und alle Verfahren erzeugen ei[illegible] Wide[illegible]uch bei der Lösung der entsprechenden Gleichu[illegible]



Ebene 1 in Koordinatendarstellung
Ebene 2 in Parameterdarstellung

E_1: 2x + y + z =1

E_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\1\\[illegible]\end{pmatrix}$

$x = -2[illegible]$

aus E_2 folgt: $y [illegible] 2r + s$

[illegible] $r - 5[illegible]$

Einsetzen [illegible] Kompo[illegible]ten x,y,z in E_1 ergibt:

2(–2[illegible]2s) [illegible] + s + [illegible] 2r – 5s = 1

–4[illegible]s + 2[illegible] 2 + 2r – [illegible]

[illegible]2 = 1

[illegible]ene 1 [illegible]ordinatend[illegible]
Ebene 2 in [illegible]rdinatend[illegible]tellung

[illegible]urch [illegible]ditionsv[illegible] x, y oder z [illegible]ieren

E_1: I x – [illegible] + 2z = 6

E_2: II 2x [illegible]y + 4z = 8 [illegible]I-II

0 [illegible]

Zwei Ebenen sind iden[illegible]ch → Es ergibt sich eine allgemeingültige Lösung

Die Normalenvektoren der Ebenen sind kollinear und alle drei Verfahren erzeugen allgemeingültige Lösunge[illegible]enen selbst sind dann Lösungsmenge.

Ebene [illegible]
Eb[illegible]

[illegible] = 1

[illegible] $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\1\\-5\end{pmatrix}$

$x = [illegible]$

aus E_2 folgt: [illegible]

Einse[illegible]nenten x,y[illegible]E_1 ergibt:

2(–[illegible] + s + 1 + 2r – 5s = 1

[illegible]2r + s + 1 + 2r – 5s = 1

1 = 1

[illegible] Koordinatendarstellung
[illegible]rdinatendarstellung

D[illegible]en x, y oder z eliminieren

E_1: I x [illegible]

E_2: II 2x – 4[illegible] 2I-II

0 [illegible]

Beispiel: Schnitt zweier Ebenen, die zu einer Koordinatenachse paral[illegible]l verla[illegible]

Gegeben sind die Ebenen E_1: $2x + y = 7$
E_2: $4x - y = 5$

Zur Er[illegible]
Wenn d[illegible]-K[illegible]nente in der [illegible]benengl[illegible]ch[illegible]t ist die [illegible]ne zu[illegible]hse parallel.

Additionsverfahren: E_2: $\text{II} \quad 4x - y = 12 \quad |\text{I}$ [illegible]

$6x$ [illegible]

x [illegible]

x in I[illegible] [illegible]$3 - y = $[illegible]

[illegible]3

z frei wählbar: [illegible] $z = r$

Da die [illegible]-Komponente in keine[illegible] Gl[illegible]chung vorkommt, ist [illegible] LGS unabhängig von de[illegible] Wahl für z lösbar. Daher k[illegible]nn man z frei wählen.

[illegible]ungs[illegible] $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ [illegible] \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ [illegible] \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0 \\ 3+[illegible] \\ 0+[illegible] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} [illegible] \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ Schnittgerade $g: \; \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Da die beiden Ebenen parallel zur z-Achse verlaufen, ist auch die Schnittgerade parallel zur z-Achse

Ergä[illegible] ______________________________

____

____

---

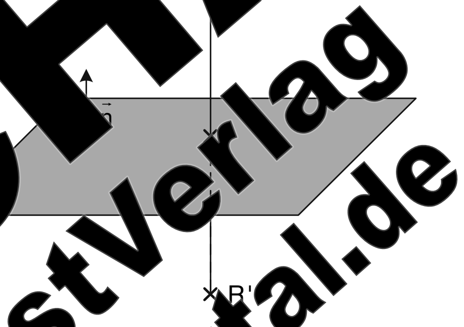
5. Orthogonale Spiegelung eines Punktes an einer Ebene

Aufgabe 14.3

Erarbeiten Sie sich das hier dargestellte Verfahren zur Spiegelung ein[illegible]ktes R[illegible]bene E (es gibt auch andere Verfahren, die hier nicht behandelt werden) inde[illegible]m Beispiel dargestellten Rechenschritte erläutern.

Gegeben sind der Punkt R(4 / –3 / 6) und die
Ebene E: $x - 2y + z = 4$

Gesucht sind die Koordinaten des gespiegelten Punktes R'.



Schritt 1:

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ______________________________

____

$g: \vec{x}$ [illegible] $+$ [illegible] ______________________________

[illegible] $: \vec{x} = \begin{pmatrix} [illegible]4 \\ [illegible] \\ [illegible] \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} [illegible] \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ______________________________

____

Schritt 2:

$4 + t - 2(-3 - 2t) + 6 + t = 4$ ______________________________

$4 + t + 6 + 4t + 6 + t$[illegible] ______________________________

____

____

[illegible]$r + 2t\vec{n}$ ______________________________

$\vec{r}\,' = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ [illegible] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-4 \\ [illegible] \\ [illegible] \end{pmatrix}$ [illegible] $\begin{pmatrix} 0 \\ [illegible] \\ [illegible] \end{pmatrix}$ ______________________________

____

Ergebni[illegible] ______________________________

____

Erg[illegible]ungen: ______________________________

____

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Alge

selbstorganisiert

Kap

Abstände

02-031-266

Lineare Gleichungssysteme

Einführung in die Vektorrechnung

Geraden in der Ebene und Rau

Eben

Lineare Abbildungen

Gesa ebra selbstorganisiert erlernen (-031-266)
St

SelbstVerlag
tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ
lehrerselbstverlag.de
www.f-druck.de

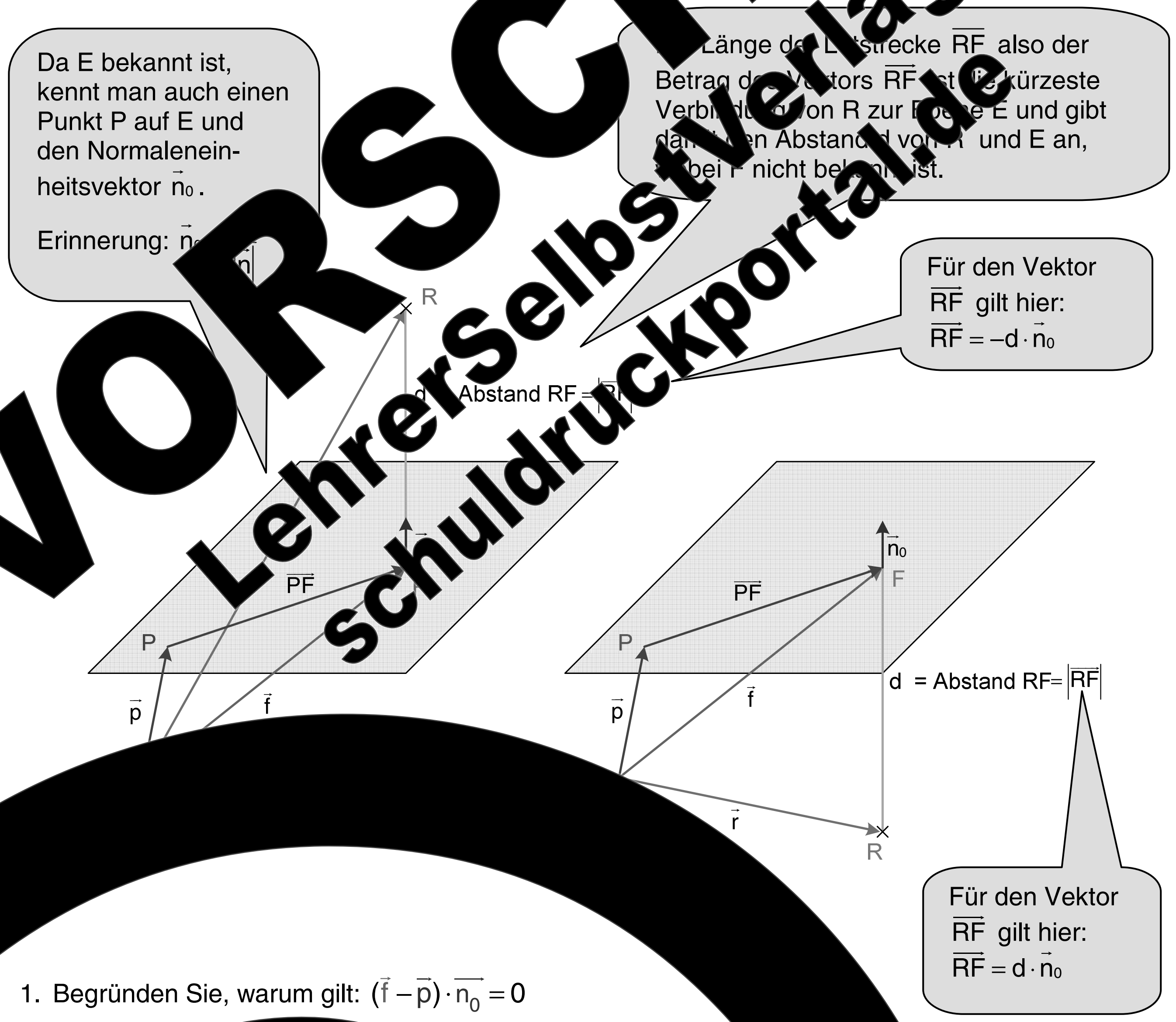
Kapitel 15: Abstände

1. Abstandsberechnungen Punkt–Ebene

Aufgabe 15.1

Herleitung der Formel zur Abstandsberechnung Punk–Eben

Es gibt unterschiedliche Möglichkeiten den Abstand eine nktes n einer Ebene E zu berechnen. Die Betrachtungen sollen hier auf die erleitu Abs dsformel, die sich in den Tafelwerken befindet beschränkt werden. Verdeu lie erleitung ieser Formel, indem Sie die geforderten Begründungen und Erläuterung mulier



Da E bekannt ist, kennt man auch einen Punkt P auf E und den Normaleneinheitsvektor $\vec{n}_0$.

Erinnerung: $\vec{n}$ n|

Länge de strecke $\overline{RF}$ also der Betrag de ktors $\overrightarrow{RF}$ st e kürzeste Verbi von R zur E E und gibt da en Abstand d von R und E an, bei F nicht bek ist.

Für den Vektor $\overrightarrow{RF}$ gilt hier: $\overrightarrow{RF} = -d \cdot \vec{n}_0$

Für den Vektor $\overrightarrow{RF}$ gilt hier: $\overrightarrow{RF} = d \cdot \vec{n}_0$

1. Begründen Sie, warum gilt: $(\vec{f} - \vec{p}) \cdot \overrightarrow{n_0} = 0$

2. kannt. Begründen Sie, warum unabh r Lage des Punktes

---

3. Begründen Sie, warum gilt:

Wenn R und $\vec{n}_0$ auf der gleichen Seite von E liegen, gilt: $\vec{f} = \vec{r} - d\vec{n}_0$.	Wenn R und $\vec{n}_0$ auf untersc ichen ten von E li lt: $\vec{f} =$ r

4. Setzen Sie den unter 3. ermittelten Ausdruck nun ils in d Ausdru p $\cdot \overrightarrow{n_0} = 0$ ein und zeigen Sie durch geeignete Umformu n, dass sich die beiden gebenen Beziehungen ergeben:

R liegt oberhalb vo	R lie terhalb von
$d = (\vec{r} - \vec{p})$ 0	$d = -(\vec{r} - \vec{p}) \cdot \overrightarrow{n_0}$

5. en Sie, wa m man die beid rgebnisse zu der folgenden Formel zusammenfassen kann.

Abstand ei s Punktes R von einer Ebene E:	$d = \left\|(\vec{r} - \vec{p}) \cdot \overrightarrow{n_0}\right\|$

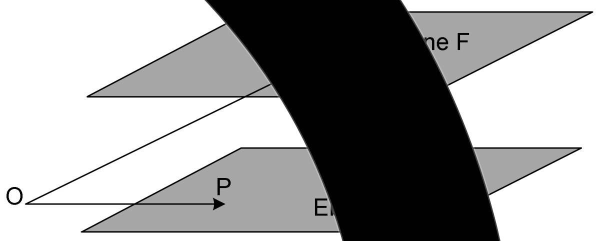
Begrün

e 15.2

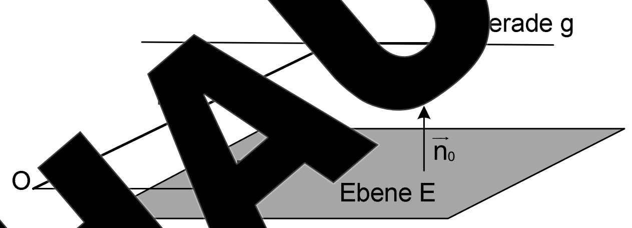
bstandsprobleme, die sich auf den Abstand Punkt - Ebene lassen

a) Abstand zweier Ebenen

Begründen S chts, dass die nen E und F chnung zwi ene E ist u rmel $d = |(\vec{r} - $ $\vec{n}_0|$ werden kann.



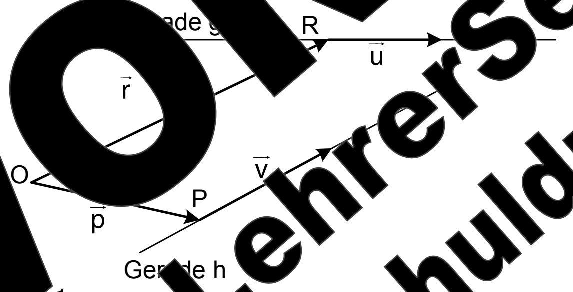
b) Abstand zwischen Ebene und paralleler Gerade



Begründen Sie anhand der Abbildung rechts, dass die Abstandsberechnung der Ebene E und Gerade g identisch mit der Abstandsberechnung zwischen dem Punkt R und der Ebene E ist und somit die Formel $d = \left|(\vec{r} - \vec{p}) \cdot \vec{n_0}\right|$ angewandt werden kann.

c) Abstand zwischen wind[illegible] Ge[illegible]

Begründen Sie anhand [illegible] [illegible]dungen 1 bis 3, [illegible]ss man de[illegible] [illegible]tand zwischen zwei windschiefen G[illegible] mit der Abst[illegible]sformel Pu[illegible]-Ebene $d = \left|(\vec{r} - \vec{p}) \cdot \vec{n_0}\right|$ berechnen kann und geben Sie [illegible]e d[illegible]ormale[illegible]heitsvek[illegible] [illegible] berechnet [illegible].



[illegible]. 1

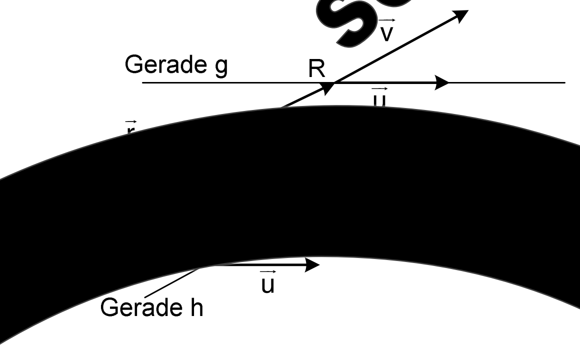
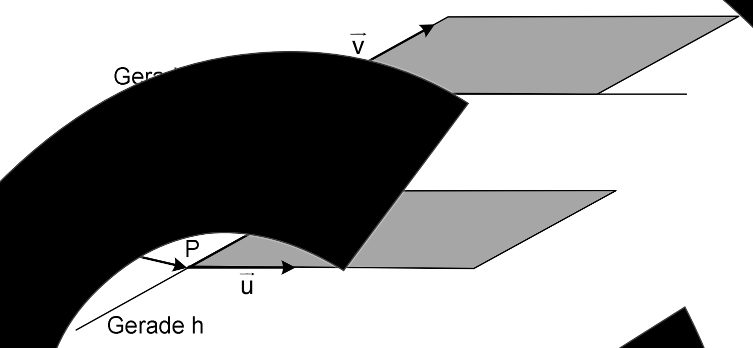


Abb. 2

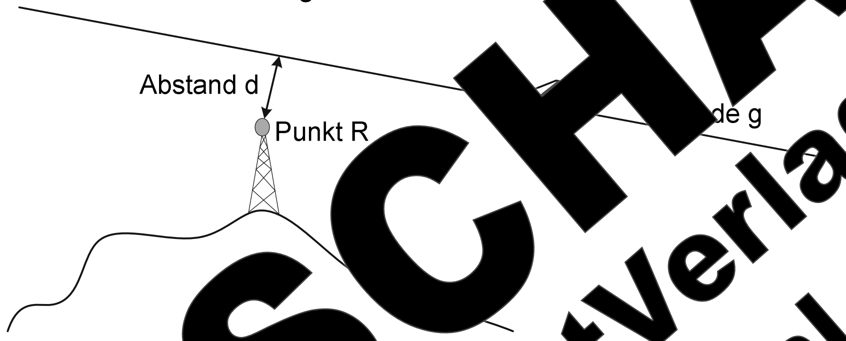


[illegible] 3

---

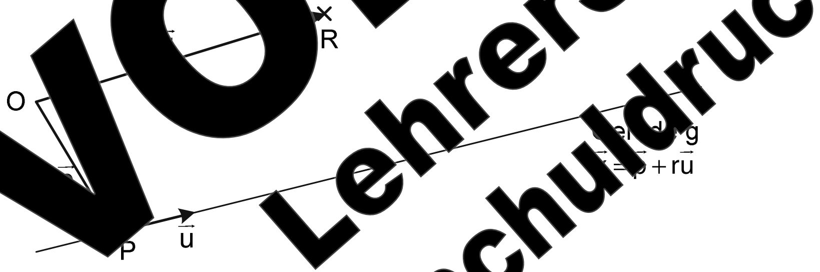
2. Abstand Punkt–Gerade

Ein klassisches Beispiel hinsichtlich der Berechnung des Abstandes vo[illegible] Punkten [illegible] Gera[illegible] findet sich im Bereich der Flugsicherung. Oft müssen Flugrouten, die im Ide[illegible] [illegible] Gera[illegible] [illegible]sehen werden können, in einem bestimmten Abstand von wichtigen Einrichtu[illegible]en, [illegible]ielsweise von Türmen verlaufen. Der Ort der Einrichtung kann dann als Pun[illegible] betrac[illegible] w[illegible]



Aufgabe 15.3

Erarbeiten Sie sich da[illegible] [illegible]te Verfahre[illegible] [illegible]ur Bestimmung [illegible] Abstands eines bekannten Punktes R v[illegible] [illegible]beka[illegible]n Gerade g, in[illegible] [illegible] das Beispiel s[illegible]ittweise durcharbeiten und die Texte erg[illegible]n.



Gegeben sind der Punkt R(3/4/4) und die Gerade

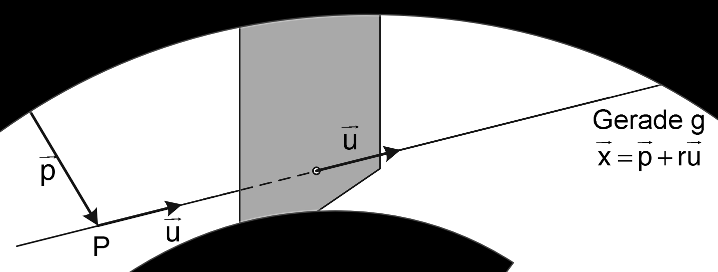
$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Gesucht ist der Abstand des Punktes R von der Geraden g.

Schritt 1:

$[illegible]) \cdot \vec{u} = 0$

$$E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$



$[illegible]x - 4y + z = -9$

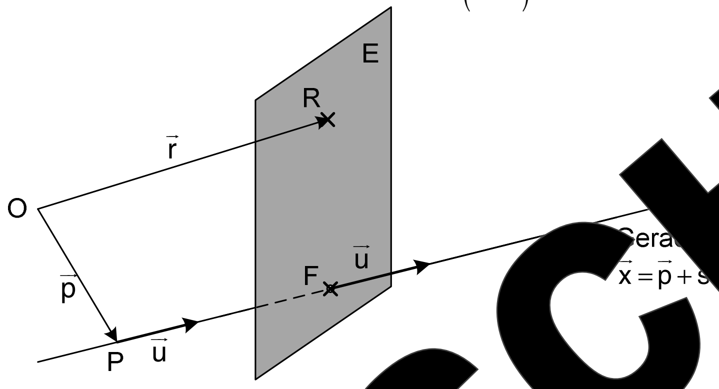
Mit [illegible] wird eine Hilfsebene E in ______________ [illegible]llung durch

[illegible]____ ermittelt. Der Normalenvektor entspricht dem ______________________

[illegible]mit verläuft die Gerade g ______________________ zur Ebene [illegible]

Schritt 2:

Hilfsebene E: $(\vec{x}-\vec{r})\cdot\vec{u}=0$



$s-4($ $+s=-9$

$20+$ $+4+s=-9$

$18s\ \ =-36$

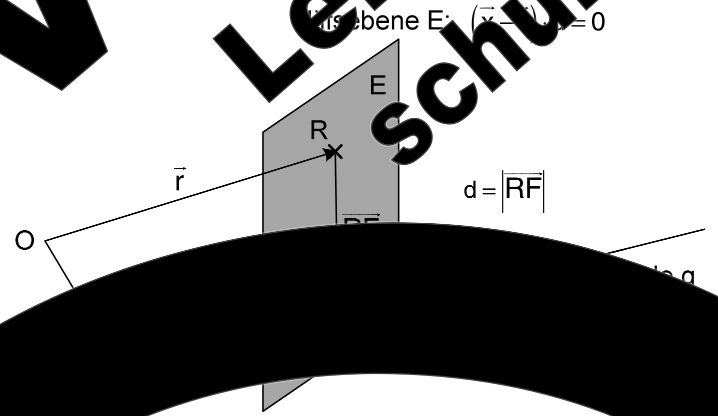
$s\ \ =-2$

$\vec{f}=$ $\begin{pmatrix}3\\ \\ \end{pmatrix}$ $\cdot$ $\begin{pmatrix} \\ 4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-2\\-5+8\\4-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$

Ermitteln des ________________________ F der __________________ g durch die

Hilfsebene E

ch :



$$d=\left|\overrightarrow{RF}\right|=\left|\begin{pmatrix}1-3\\3-4\\2-4\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}-2\\-1\\-2\end{pmatrix}\right|=\sqrt{4+1+4}$$

$d=3LE$

erechnen ____________________________ von etrag des Vektors $\overrightarrow{RF}$

entspricht dem _______________________ des Punktes de g.

Übungen:____

____

Raum für Notizen

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Alge[illegible]

selbstorganisiert [illegible]le[illegible]en

Ka[illegible]

Schnittwinke[illegible]

02-031-266

Lineare Gleichungssysteme

Einführung in die Vektorrechnung

Geraden in der Ebene und i[illegible] Rau[illegible]

Ebe[illegible]un[illegible]

Lineare Abbildungen

Gesa[illegible]ebra selbstorganisiert erlernen (L[illegible]-031-266)
St[illegible]

[illegible]SelbstVerlag
[illegible]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[illegible]
[illegible]lehrerselbstverlag.de
[illegible]www.f-druck.de

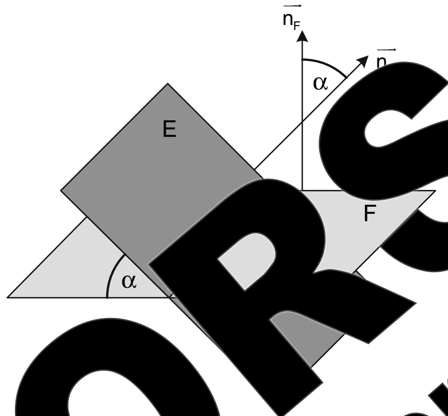
Kapitel 16: Schnittwinkel

Aus Kapitel 10 ist die Berechnung von Schnittwinkeln zwischen zwei Geraden [illegible]its be[illegible]nt. Die Ermittlung von Schnittwinkeln bei Ebenen läuft in der Regel darauf [illegible] die in [illegible]werken angegebenen Formeln richtig anzuwenden.

Aufgabe 16.1

Verdeutlichen Sie sich die gegebenen Formeln anha[illegible] der [illegible]ger[illegible]d berechnen Sie die geforderten Schnittwinkel.

a) Schnittwinkel zwischen zwei Eben[illegible]

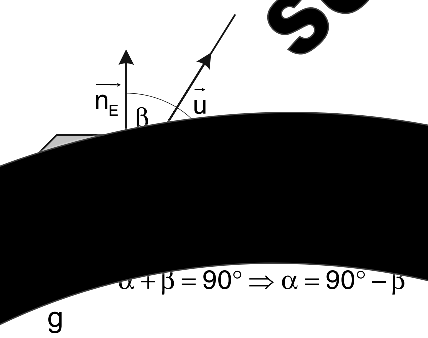


Der Schni[illegible]wi[illegible] zwischen [illegible] Ebenen entspricht dem Schnittw[illegible]el der Norma[illegible]ektoren.

Schnittwinkel [illegible]schen Ebenen: [illegible]s $\alpha = \frac{\left|\vec{n_E} \cdot \vec{n_F}\right|}{\left|\vec{n_E}\right| \cdot \left|\vec{n_F}\right|}$

B[illegible]chnen S[illegible] den Schnittwinkel zwischen den Ebenen [illegible]: 2x + y + [illegible] und F: x – 5y = 3

[illegible]nittwink[illegible] zwi[illegible]en Gera[illegible] Ebene



$\alpha + \beta = 90° \Rightarrow \alpha = 90° - \beta$

Der Richtungsvektor der Geraden $\vec{u}$ schließt mit dem Normalenvektor der Ebene den Winkel β ein. Es gilt damit:

$$\cos\beta = \frac{\left|\vec{n_E} \cdot \vec{u}\right|}{\left|\vec{n_E}\right| \cdot \left|\vec{u}\right|}$$

[illegible] β = cos 90°−α = sin α, also cos β = sin α gilt, folgt:

[illegible] zwisch[illegible] Gerade:	$\sin\alpha = \frac{\left|\vec{n_E} \cdot \vec{u}\right|}{\left|\vec{n_E}\right| \cdot \left|\vec{u}\right|}$

Berechnen Sie den Schnittwinkel zwischen der Ebene E: [illegible] und der Geraden [illegible] $\begin{pmatrix} 2 \\ [illegible] \end{pmatrix}$ [illegible]

[illegible]de Übungen:______________________________

____

Raum für Notizen

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Alge[illegible]
selbstorganisiert [illegible]le[illegible]en

Ka[illegible]

Ebenenschare[illegible]

02-031-266

Lineare Gleichungssysteme

Einführung in die Vektorrechnung

Geraden in der Ebene und [illegible] Rau[illegible]

Ebe[illegible]un[illegible]

Lineare Abbildungen

Gesa[illegible]ebra selbstorganisiert erlernen ([illegible]-031-266)
S[illegible]

[illegible]SelbstVerlag
[illegible]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[illegible]
[illegible]lehrerselbstverlag.de
[illegible]www.f-druck.de

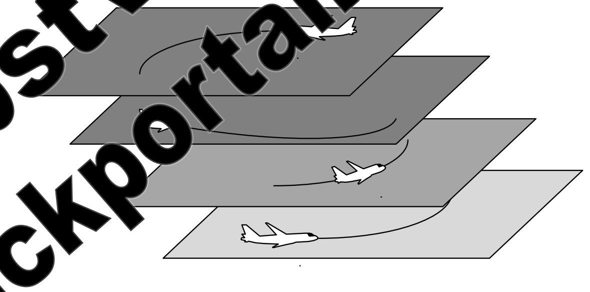
Kapitel 17: Ebenenscharen

Der Begriff Ebenenschar

Die bisherigen Betrachtungen zu Ebenen haben sich bereits auf La[illegible]hunge[illegible]hen Ebenen bezogen. Dieses Kapitel beschränkt sich auf Ebenen, die **parallel z[illegible]na[illegible]liegen)** und auf Ebenen, welche **eine gemeinsame Schnittgerade** besitzen. Da es i[illegible] beiden [illegible]len [illegible]elzahl von Ebenen mit den angegebenen Lagebeziehungen gibt, spricht man hie[illegible] **Ebene[illegible]aren**. Man erkennt eine Ebenenschar anhand der Ebenengleichung. Die Ebenengleic[illegible]en e[illegible]alten neben den Variablen x, y und z noch einen **Parameter**, wie z.B. den Parame[illegible] ∈ I[illegible]

Beispiel für eine Ebenenschar: E_a: ax + $2a^2$ [illegible] = 12[illegible]

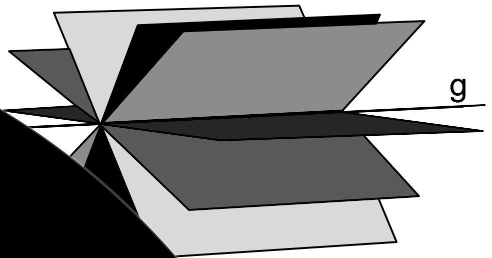
Ebenenscharen bei paralleler[illegible]en



Kollisionsfreie Flugbahnen befinden sich auf einer Schar paralleler Ebenen.

Zur Veranschaulichung findet [illegible] Beispiel aus dem Bereich der Fl[illegible]. Wen[illegible]ch an einem Flugplatz meh[illegible] Landun[illegible]effende Flugzeuge in Wa[illegible]nleif[illegible]befinde[illegible]d eine Kollision der Flugz[illegible]lossen werden soll, kann m[illegible] den F[illegible]er Fl[illegible]euge al[illegible] Flugbah[illegible]f pa[illegible]len Ebenen li[illegible] interpr[illegible]en. D[illegible]ilme[illegible] der Ebenen, [illegible] denen [illegible] Flugba[illegible] verlaufen kö[illegible] bildet [illegible] ei[illegible]genan[illegible]e Ebenensch[illegible] D.h., aus der un[illegible]lich[illegible] der möglichen parallelen Eb[illegible]n gehören nur die Eb[illegible] zur Ebenen[illegible], [illegible] [illegible]ie Flugbahnen z[illegible]lassen sind.

Ebenenscharen bei sich schn[illegible]denden Geraden

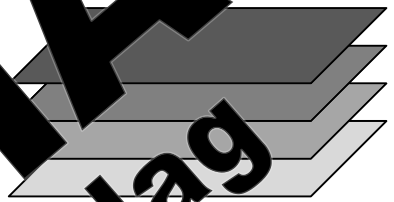


Alle Ebenen, die als besondere Eigenschaft eine gemeinsame Gerade al[illegible] haben, werden als **E**[illegible] gemei[illegible] [illegible] parallelen Ebenen bei den [illegible]en, unter den unendlich vielen Ebenen im [illegible]chel einen Teil von Ebenen, die eine bestimmte Bedingung erfüllen müssen. Diese Teilmenge von Ebenen bezeichnet man dann, wie bei den parallelen Ebenen, als Ebenenschar.

Das Ver[illegible]hörigkeit zu einer Ebenenschar e[illegible], wird in den folge[illegible]d von parallelen Ebenenscharen ve[illegible]

Aufgabe 17.1

Ebenenscharen bei parallelen Ebenen



Die Ebenengleichungen bei einer Ebenenschar haben in der Regel folgendes charakteristisches Aussehen:

E_a: (1 + 2a)x + (2 + 4a)y – (3 + 6a)z = 1 + a mit a ∈ IR

Für jedes a ∈ IR erhält man eine Ebene, die zur Ebenens[illegible] gehört, wobei man für a = 0 die besonders einfach [illegible]rech[illegible]e Ebene E_0 erhält.

E_0: x + 2y – 3z = 1 oder x + [illegible] 3z – 1[illegible]

Erläutern Sie für die Ebenenschar E[illegible] (2 + 4a)y – (3 + [illegible])z = 1 + a die folgenden Rechenschritte bzw. ergänze[illegible] Lücken im T[illegible]

a) E_a: (1 + 2a)x + (2 + [illegible] – ([illegible]6a)z = [illegible]a

(1) x [illegible] + 4a[illegible] [illegible]z – 6az – 1 [illegible] 0

(2[illegible]x + 2y – 3z – 1 + 2ax [illegible]4a[illegible] – 6az – a [illegible] 0

(3) $\underbrace{x + 2y - 3z - 1}_{E_0} + a(\underbrace{2x + 4y - 6z - 1}_{E^*}) = 0$

[illegible]e Ebene E* gilt: 2x + 4y – 6z = 1

[illegible]ne Ebenenschar E_a als [illegible]ion aus der Ebene E_0 und [illegible]ne E* auffassen. Hier gilt: [illegible]E*

(4) $\overrightarrow{n_E}$ [illegible] × $\overrightarrow{n_{E_0}}$

Da die Normalenv[illegible] E_0 und E* [illegible]en die Ebenen E_0 und E* nur [illegible] oder

(5) $x + 2y - 3z = 1$
$\underline{2x + 4y - 6z = 1}$
$0 = -1$

Prüfen, ob die Ebe[illegible] paralle[illegible]
Aus dem Widerspruc[illegible]ibt sic[illegible]

E_0 und E* [illegible]

Zur Information:

Die Ebene E_0 gehört zur Eb[illegible]nschar [illegible] da [illegible]n durch [illegible]nse[illegible]zen von a [illegible]0 die Ebene E_0 erzeugen kann. Di[illegible]ene E[illegible] zwar parall[illegible] [illegible]llen Ebe[illegible] Ebenenschar, geh[illegible]och n[illegible]r [illegible]nenscha[illegible] E_a [illegible] es kein a[illegible] gibt, mit dem sich durch [illegible]setz[illegible] E_a d[illegible]ene E* bere[illegible]en lässt.

Aufgabe 17.2

Rechneri[illegible]erp[illegible]g der Zugeh[illegible]keit einer Eb[illegible] M [illegible]u einer parallelen Ebenenschar

Wie in [illegible]gabe 1[illegible] verdeutlicht wurde, gehört jede E[illegible], die sich durch Einsetzen einer Zahl $a \in IR$ i[illegible] E[illegible]engleic[illegible]g E_a ergibt, z[illegible]ieser Ebene[illegible]. Um zu prüfen, ob eine Ebene M ebenfalls zu di[illegible]r S[illegible] muss man [illegible]ne Ebene M [illegible]mformen können, dass sie der Berechnungsvorschrift de[illegible]har ge[illegible]gt. Das kan[illegible] dem folgen[illegible] Ansatz überprüft werden:

$$\mathbf{[illegible]_a = b \cdot M} \quad \text{mit } b \in IR$$

Beispiel 1:

Die Ebene M: $3x + 6y - 9z = 2$ bzw. $3x + 6y - 9z - 2 = 0$ entsteht durch Einsetzen von 1 in die Ebenenschar E_a aus A[illegible]gehört damit zur Ebenenschar E_a. Damit muss der Ansatz [illegible]

[illegible]nf Unbekannten, nämlich mit den [illegible]z sowie den Paramete[illegible]

[illegible]leichung: $\underbrace{(1 + 2a)x + (2 + 4a)y - (3 + 6a)z - (1 + a)}_{E_a} = $ [illegible] $2b$

Die Lösung [illegible]derartigen Gleichung kann mit Hi[illegible]zientenvergleichs [illegible]rden.

Schr[illegible] [illegible]gen E_a und b · M übereinander schreib[illegible]

E_a: $(1 + 2a)x + (2 + 4a)y - (3 + 6a)z - (1 + a) = 0$
b · M: $3bx + 6by - 9bz - 2b = 0$

Schritt 2: Wenn beide Seiten der Gleichung $E_a = b \cdot M$ identisch sind, dann m[illegible]sen die Koeffizienten identisch sein. Koeffizientenvergleich führt zu einem [illegible]

Koeffizienten von x	I	$1 + 2a = 3b$
Koeffizienten von y	II	$2 + 4a = 6b$
Koeffizienten von z	III	$3 + 6a = 9b$
Ausdruck ohne Variable	IV	$1 + a = 2$[illegible]

Schritt 3: LGS lösen:

I – 2IV ⇒ $-1 = -b$ ⇒ b[illegible]

b in IV ⇒ $a = 1$

a, b in II ⇒ $6 = $[illegible]

a, b in III ⇒ 9 [illegible]

Ergebnis: Das LG[illegible]t si[illegible]widerspr[illegible]sfrei löse[illegible] [illegible]it ist der A[illegible] $E_a = b \cdot M$ erfüllt, und es ist rechne[illegible]en, dass d[illegible]b[illegible]e M zur E[illegible]schar E_a gehört.

Beispi[illegible]2:

Hier wir[illegible]t de[illegible]spiel 1 e[illegible]n Verfahre[illegible]s Koeffizientenvergleichs gezeigt, dass die [illegible]e E[illegible]ht zur Ebenenscha[illegible] gehört, da d[illegible]nsatz $E_a = b \cdot E^*$ zu einem Widerspruch führt.

Gleich[illegible] $\underbrace{(1 + 2a)x [illegible](2 + 4a)y - (3 + [illegible])z [illegible] (1 + a)}_{E_a} = \underbrace{2bx + 4by - 6bz - b}_{b\cdot E^*}$

Auch hier wird die Lös[illegible]g mit Hilfe eines Koeffizientenvergleichs schrittweise ermittelt.

Schritt 1: Die Ebenengleichungen E_a und b · E* übereinander schreiben:

[illegible] $(1 + a) = 0$
[illegible] $b = 0$

[illegible]eide Seiten der Gleichung [illegible]ind, dann müssen die Koeffizienten identisch sein. Koeffizienten[illegible]em LGS.

Koeffizienten von x	I	$1 + 2a = 2$[illegible]
Koeffizienten von y	II	$2 + 4a = 4b$
Koeffizienten von z	III	$3 + 6a = 6b$
Ausdruc[illegible]	IV	$1 + a = b$

Schritt 3: [illegible]

[illegible] Widerspruch

Erg[illegible] [illegible]as LGS lässt sich nicht widerspruchsfrei lösen. Damit ist der Ansa[illegible]E* nicht erfüllt und es ist rechnerisch nachgewiesen, [illegible]ie Ebene E* nich[illegible]nschar E_a gehört.

Wenden Sie das Verfahren aus Beispiel 1 und 2 an, um zu zeigen, dass die [illegible]bene [illegible] 2y + 3z = 0 zur Ebenenschar E_a aus Aufgabe 17.1 gehört:

Aufgabe 17.3

Prüfen Sie, ob es sich bei einer Ebenenschar um eine Schar aus parallelen Eb[illegible] han[illegible].

Erläutern Sie für die Ebene E_a: (2 + 2a)x + (2 + 2a)y – (3 + 3a)z = 1 + 2a [illegible]den [illegible]rmungs- und Rechenschritte.

(1) E_0: 2x + 2y – 3z = 1 ______________________________

(2) E_1: 4x + 4y – 6z = 3 ______________________________

____

(3) $\overrightarrow{n_{E_0}} = \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{n_{E_1}} = \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix}$ [illegible]

Da di[illegible] N[illegible]rmalenvektor[illegible] v[illegible]n E_0 und E_1 ________________ sind, können die Ebenen E_0 [illegible]nd E_1 nur ________________ oder ________________ sein. Damit ist E_a eine Schar pa[illegible]leler Ebenen.

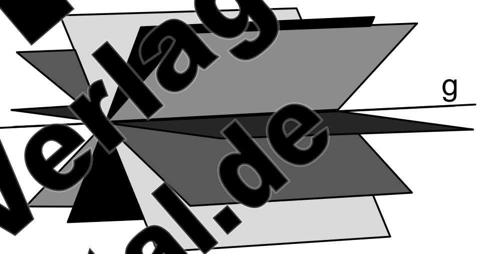
Ergänzen Sie: Man prüft, ob es sich [illegible]i einer Ebenenschar um eine Schar paralleler Ebenen handelt, indem man die ________________vektoren von zwei beliebigen Ebenen der Schar auf [illegible]

Aufgabe 17.4

Ebenenscharen bei Ebenenbüscheln

Grundlegend kann man die bei den parallelen Ebenenscharen erfo[illegible] [illegible] auch auf Ebenenbüschel übertragen.

Die Struktur der Gleichung für ein Ebenenbüschel is[illegible] vergleichbar mit der Gleichung für eine Ebenenscha[illegible] parallelen Ebenen. Für $a \in IR$ soll folgendes B[illegible] betrachtet werden.



E_a: $(1 - 2a)x + (1 - 3a)y + (1 + a)z = 1 + 2$[illegible]

oder

E_a: $(1 - 2a)x + (1 - 3a)\,y$ [illegible] $(1 +$ [illegible] $(1 +$ [illegible] $=0$

Zeigen Sie durch [illegible] Umformung, da[illegible] [illegible] auch bei Ebenenbüsche[illegible] [illegible] [illegible]schar E_a in die Fo[illegible] $E_a = E_0 + aE^*$ umfo[illegible] [illegible] sich damit f[illegible]gender Ausdruc[illegible]

E_a: x [illegible] $+ z - 1$ [illegible] $-2x - 3y + z - 2) =$

E[illegible] $+ y$ [illegible]

E^*: [illegible] $- 3y + z = 2$

Info[illegible]:
Wi[illegible] parallelen Ebenen gilt auch hier:
D[illegible] Ebene E* gehört zwar zum Büschel mit d[illegible] Trägergeraden g, jedoch nicht zur Ebenenschar E_a.

Raum für Umformungen:

Aufga[illegible]

R[illegible] [illegible] Zugehörigkeit einer Ebene E zu einer [illegible]ar

[illegible] [illegible]berlegungen hinsichtlich der Überprüfung, ob eine Ebene zu ein[illegible] [illegible]char gehört, [illegible] der Betrachtung bei den parallelen Ebenen[illegible]aren auf Ebenenb[illegible] [illegible]rtragen werden. [illegible]d für die Überprüfung auch hier der Ansa[illegible] **· M** verwendet [illegible] [illegible]tehende [illegible]g mit Hilfe eines Koeffizientenvergleic[illegible]

Beispiel 1:

Prüfen Sie, ob die Ebene

M: $-x - 2y + 2z = 3$ bzw. $-x - 2y + 2z - 3 = 0$

zur Ebenenschar E_a gehört.

Der Ansatz $E_a = b \cdot M$ führt, wie bei Scharen paralleler Eb[illegible]n, zu [illegible] Glei[illegible]ng mit fünf Unbekannten, nämlich mit den Variablen x, y und z sowie [illegible] [illegible] und b, di[illegible]nfalls wieder mit Hilfe eines Koeffizientenvergleichs gelöst werd[illegible]n.

Gleichung: $(1 - 2a)x + (1 - 3a)\,y + (1 + a)z$ [illegible] $+ 2a) =$ [illegible] $- 2by + 2bz$ [illegible]

Schritt 1: Die Ebenengleichung[illegible] M übereinande[illegible]chreiben:

E_a: $(1 -$ [illegible] $- 3a)y$ [illegible] $a)z$ [illegible] $=0$
$b \cdot M$: [illegible] $-bx$ [illegible] $2by$ [illegible] $2bz$ [illegible] $3b =0$

Schritt 2: [illegible] [illegible] der Gleichung $E_a = b \cdot M$ identis[illegible] sind, dann müssen die [illegible]oeffizie[illegible] ide[illegible]sch sein. K[illegible]effizientenverg[illegible] führt zu einem LGS:

[illegible]ffizie[illegible] von x I [illegible]a = –b
K[illegible]ten von [illegible] II [illegible] 3a =–2b
Koeffizienten vo[illegible] z III [illegible] + a = 2b
Ausdruck ohne [illegible]riable [illegible] –1 – 2a =–3b

Schritt 3: LGS lösen:

I – IV $\Rightarrow$ $2 = 2b$ $\Rightarrow$ $b = 1$

b in I $\Rightarrow$ $a = 1$

[illegible] Das LGS lässt sich widerspruchsfrei lösen. Da[illegible] [illegible] $E_a = b \cdot M$ erfüllt, und es ist rechnerisch nachgewiesen, dass die Ebene M z[illegible] [illegible] E_a gehört.

Beispiel 2:

Die Ebene E* von Aufgabe 17.4 gehört zwar zum Ebenenbüschel mit der Trä[illegible]erade[illegible] jedoch nicht zur Ebenenschar E_a, da man durch Einsetzen einer Zahl a die Ebe[illegible] nicht e[illegible]n. Zeigen Sie, dass der Ansatz $E_a = b \cdot E^*$ zu einem Widerspruch führt.

Gleichung: $(1 - 2a)x + (1 - 3a)\,y + (1 + a)z - (1 + 2a) = -$ [illegible] $3by$ [illegible] $z - 2b$

Schritt 1: Gleichungen übereinander sch[illegible]n:

E_a: $(1 - 2a)x + \; (1 - 3a$[illegible]$+ \; (1 + a)z -$ [illegible]$2a) \; = 0$

$b \cdot E^*$: ____x [illegible]____y [illegible] ____ [illegible]0

Schritt 2: Wenn beide Se[illegible]ung $E_a = b \cdot E^*$ [illegible]entisch sind, d[illegible]n müssen die Koeffizie[illegible]identisch sein[illegible]oeffizienten[illegible]leich führt z[illegible]m LGS.

Ko[illegible]ente[illegible]on x I 1 [illegible]2a = –2b
Koe[illegible] II [illegible] – 3a = –3[illegible]
[illegible]oeffiz[illegible]n von [illegible] III 1 + a = [illegible]
[illegible]druc[illegible]e Variable IV –1 – 2a = [illegible]2b

S[illegible]rit[illegible] LG[illegible]sen:

IV ________ = ____ | [illegible] IV

2 [illegible]0 ⇒ Widerspruch

Ergebnis: Das LGS führt zu einem Widerspruch. Damit ist der Ansatz $E_a = b \cdot E^*$ nicht erfüllt, und die Ebene E* gehört (wie oben schon erläutert) nicht zur Ebenenschar.

[illegible]17.6

[illegible]rägergerade bei einem Ebenenbüschel bestimmen

Für die Bestimmung der Trägergeraden gibt es zwei Verfahren.

Verfahren 1: [illegible]erade von zwei möglichst ein[illegible]sentanten einer [illegible]elsweise die Schnittgerade von E[illegible]

Ver[illegible]enschar wie in Aufgabe 17.5 in $E_a = E_0$ [illegible]rmittelt die [illegible]chnittgerade [illegible] E_0 und E*.

Übungen

Ü17.1 Bestätigen Sie durch Rechnung mit Hilfe von Verfahren 1, dass [illegible]Ebenens[illegible]

E_a: $(1 - 2a)x + (1 - 3a)\,y + (1 + a)z = 1 + 2a$ die Träge[illegible]erade [illegible] $\begin{pmatrix} [illegible] \\ [illegible] \\ 1 \end{pmatrix}$ [illegible] $\begin{pmatrix} [illegible] \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ besitzt.

Ü17.2 [illegible]en Ebe[illegible] $2x + 3y - z = 1$ und F: $x - 2z = 2$ eine E[illegible] G_a, zu der [illegible] nicht gehört, und eine Ebenenschar H_a, zu der die Ebene E[illegible]t.

Ü17.3 Ermitteln Sie die Trägergerade g zur Ebenenschar E_a: $(a-1)x+2y$ [illegible] $(2a+3$ [illegible] $a-2$ mit Hilfe von Verfahren 2, und geben Sie eine Ebene an, welche die Träger[illegible]de g en[illegible] jedoch nicht zur Ebenenschar E_a gehört. (Zur Kontrolle: $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}+$ [illegible]

[illegible] Übungen: ____________________

____

Raum für Notizen

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Algebra
selbstorganisiert erlernen

Kap

Grundlegendes zu M

02-031-266

Lineare Gleichungssysteme

Einführung in die Vektorrechnung

Geraden in der Ebene und im Raum

Ebe … un

Lineare Abbildungen

Gesa… ebra selbstorganisiert erlernen (… -031-266)
St…

…SelbstVerlag
…tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ…
…lehrerselbstverlag.de
…www.f-druck.de

Kapitel 18: Grundlegendes zu Matrizen

Der Begriff der Matrix und die Rechenregeln für den Umgang mit Matrizen wa[illegible] bereits [illegible] 19. Jahrhundert bekannt. Die Bedeutung der Matrizen für die Anwendung w[illegible] jedoch [illegible] deutlich. Man kann Matrizen beispielsweise bei der Verschlüsselung bzw. Kodier[illegible] ten, [illegible] Beschreibung von Produktions- und Transportprozessen sowie für die Transformation [illegible] Ko[illegible] tensystemen bei der Programmierung von Robotersteuerungen und vielem meh[illegible] rwend[illegible] n dieser Unterlagen wird der Einsatz der Matrizen auf die Anwendung bei lineare[illegible] bildu[illegible] n und den dazu notwendigen Rechenoperationen für Matrizen beschränkt. Darüb[illegible] inau[illegible] de [illegible] eln und Verallgemeinerungen können Tafelwerken und Schulbüchern entnommen [illegible]

Begriff Matrix

Als Matrix bezeichnet man ein Zahlenfeld [illegible] m Zeil[illegible] nd n Spalten. Bei linearen Ab[illegible] ungen kommen nur Matrizen mit gleiche[illegible] ahl [illegible] eilen [illegible] d Spalte[illegible] Man nennt d[illegible] Matrizen **quadratische Matrizen**.

Quadratische Mat[illegible] Ebene, als[illegible] R^2: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Quad[illegible] atri[illegible] Raum, also im R^3: $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$

Die Elemente einer Matrix A werden mit a_{mn} oder für eine Matrix B mit b_{mn} angegeben.

Die **erste Ziffer** gibt die **Zeile** m an.

Die **zweite Ziffer** gibt die **Spalte** n an.

Au[illegible] be 18.1

[illegible] n und Subtrakt[illegible] von Matrizen

Ergänzen Sie im folgenden Beispiel fehlende Zahlenwerte, erläutern Sie anschließend, wie man zwei Matrizen addiert.

Addition im R^2 $\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \ldots & \ldots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ \ldots & \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 & 2+4 \\ \ldots & \_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & \_\_ \end{pmatrix}$

[illegible] im R^3 $\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots & \ldots & \_\_ \\ \_\_\_\_ & \ldots & \ldots \\ \_\_\_\_ & \_\_ & \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & \_\_ \\ 3 & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & 2 & \_\_ \end{pmatrix}$

Subtraktion im R^3 $\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \ldots & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 & 0-4 & \_\_ \\ \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & 1- \\ \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots & -4 & \_\_ \\ \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \_\_ \end{pmatrix}$

Ergä[illegible]

[illegible] werden addiert bzw. subtrahiert, indem man die an den entsp[illegible] Stellen

[illegible] en ____________________ addiert bzw. sub[illegible] ert.

Aufgabe 18.2

Multiplikation einer Matrix mit einer reellen Zahl r

Verdeutlichen Sie sich die Vorgehensweise am Beispiel und ergänzen S[illegible] der R[illegible] und im Text fehlenden Angaben:

Multiplikation im R^2 $\quad 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & -10 \end{pmatrix}$ $\qquad$ oder im R^3 $\quad 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots \\ \ldots & 5 & \ldots \\ \ldots & \ldots & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots & 6 & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ 21 & \_\_ & -27 \end{pmatrix}$

Man multipliziert eine Matrix mit einer reellen Zah[illegible] ma[illegible] __________ [illegible] der Matrix

mit der Zahl r ___________________.

Aufgabe 18.3

Multiplikation einer Matrix [illegible] em Vektor

a) Verdeutlichen Sie si[illegible] e V[illegible] hensweise am Beis[illegible] d ergänze[illegible] ie die in der Rechnung und im Text fehlenden Ang[illegible]

Die Multipli[illegible] von Matrizen mit einem Spalte[illegible] ktor entspricht dem Skalarprodukt jede[illegible] eile der Matrix mit dem Spaltenvektor.

[illegible] ultipl[illegible] ion im R $\quad \begin{pmatrix} 2 & \ldots \\ 3 & \ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 + \ldots \cdot 6 \\ 3 \cdot 4 + (-\ldots) \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 + 6 \\ 12 - 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -18 \end{pmatrix}$

Multiplikation im R^3 $\quad \begin{pmatrix} \ldots & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ \ldots \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 \\ 4 \cdot (-1) + \_\_ \cdot 4 + 6 \cdot \_\_ \\ 7 \cdot (-1) + \_\_ \cdot 4 + \_\_ \cdot \_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 8 + \_\_ \\ \_\_ + 20 + 18 \\ \_\_ - \_\_ + \_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 34 \\ -2 \end{pmatrix}$

Eine Matrix A wird mit einem Ve[illegible] $\vec{x}$ multipliziert, indem man jedes Element in einer _________ der

Matrix mi[illegible] die drei Produkte anschließend zeilenweise

[illegible] utlichen Sie sich durch Berechnung des folgenden Pr[illegible] der Multiplikation der

Matrix mit einem Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \ldots \end{pmatrix}$ ein lineares Gleichungssystem [illegible]

$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & \ldots \\ 3 & \ldots & \ldots \end{pmatrix} \ldots = \begin{pmatrix} \ldots + z \\ \_\_ y + 2 \_\_ \\ \_\_\_ + \_\_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} 2x + \ldots \\ x + 4y + 2\ldots \\ 3x + y + 2z \ldots \end{matrix}$

[illegible] urch die Multiplikation entsteht ein Vektor.

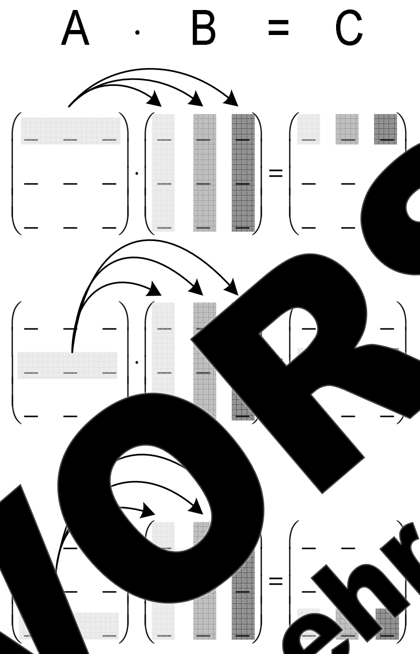
Di[illegible] chung wi[illegible] nten-we[illegible] t.

Aufgabe 18.4

Multiplikation einer Matrix mit einer Matrix

Verdeutlichen Sie sich anhand der Graphik die Vorgehensweise be[illegible] [illegible]plikat[illegible] [illegible]n quadratischen Matrizen mit drei Zeilen und 3 Spalten und ergänzen Sie im Text fe[illegible]de [illegible]en.

a)



– Das 1. Element de[illegible] Zeile [illegible] C entsteht durch Multiplikation der __ Zei[illegible] [illegible]it [illegible] Spalte vo[illegible]

– D[illegible] [illegible]lemen[illegible] 1. Zeile von C entsteht durch Multiplikation [illegible] ______________ von A mit der ______________ von B.

– Da[illegible] [illegible]ent der [illegible] Zeile von C entsteht durch Multiplikation [illegible] ______________ [illegible]n A mit der ______________ von B.

– Das 1. El[illegible] der 2. Zeile von C entsteht durch Multiplikation der ______________ von A mit der ______________ von B.

– Das 2. Elemen[illegible] der 2. Zeile von C entsteht durch Multiplikation der ______________ von A mit der ______________ von B.

⋮

– Das 3. Element der 3. Zeile von C entsteht durch Multiplikation der ______________ von A mit der ______________ von B.

b) Übertragen Sie das Verfahren zur Multiplikation auf 2x2 Matrizen und bestätigen Sie das angegebene Ergebnis für die folg[illegible] durch Nachrechnen:

[illegible] 4 9

[illegible]gen Sie die angegebenen Ergebnisse d[illegible] [illegible]d begründen Sie damit, dass für [illegible] Matrizenmultiplikation das Kommutativgesetz ni[illegible]

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\3&0&2\\4&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0&3\\-1&4&1\\ [illegible] & & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_\\ \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_\\ \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&9&6\\10&2&11\\7&4&13\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ 4&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_\\ \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_\\ \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14&7&2\\15&-1&7\\9&5&4\end{pmatrix}$$

[illegible]**trizenmultiplikation ist nicht kommutativ**[illegible]e Produkte A · B ______________

____.

---

d) Bestätigen Sie mit Hilfe der Matrizen A, B und C, dass das Assoziativgesetz A[illegible]B · C) = [illegible]) · C für die Matrizenmultiplikation gültig ist:

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}-1&2\\-2&3\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}1&-1\\3&4\end{pmatrix}$$

$$A\cdot(B\cdot C)=\begin{pmatrix}1&2\\3&1\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}-1&2\\-2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\3&4\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1&2\\3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\_\_\_ & \_\_\_\\ \_\_\_ & \_\_\_\end{pmatrix}=[illegible]$$

$$(A\cdot B)\cdot C=\left[\begin{pmatrix}1&2\\3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&2\\-2&3\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\_\_\_ & \_\_\_\\ \_\_\_ & \_\_\_\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-[illegible]\\ [illegible]&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\_\_\_ & \_\_\_\\ \_\_\_ & \_\_\_\end{pmatrix}$$

Kontrollergebnis: In beiden Fälle[illegible] [illegible]ie Matrix: $\begin{pmatrix}19 & [illegible]7\\ [illegible] & [illegible]\end{pmatrix}$

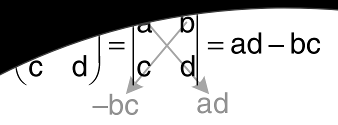
Aufgabe 18.5

Berechnen [illegible] Deter[illegible]nte [illegible]ner Matrix

Durch [illegible] Be[illegible]ung [illegible] Determinante [illegible]ner Matri[illegible] w[illegible]d dieser ein Skalar bzw. Zahlenwert zugeord[illegible] De[illegible]te Skala[illegible] [illegible]haltet vielse[illegible] verwendbare Informationen, auf die an dieser [illegible]lle jed[illegible] nicht ausführlich ein[illegible]gangen werde[illegible]. Es wird hier jedoch jeweils an einem Beispiel be[illegible] wie man bei ein[illegible]2x2-Matrix un[illegible] [illegible]er 3x3- Matrix die Determinante berechnen kann.

a) Determ[illegible]ante bei einer [illegible]-Matrix

Anstatt den Ausdruck Det vor die Matrix mit runden Klammern zu schreiben, kann man die Matrix auch mit [illegible]hen darstellen. Die Elemente [illegible]ander multipliziert.

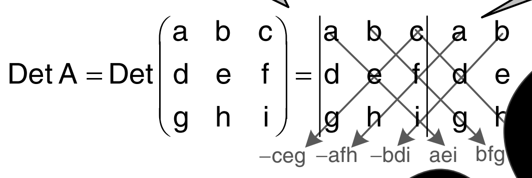


Zeigen Sie, dass sich für die Determinante der Matrix $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&1\end{pmatrix}$ der [illegible]t.

b) Determinante bei einer 3x3-Matrix

Auch hier kennzeichnen die beiden senkrechten Striche, dass die Determinante der Matrix berechnet wird.

Die ersten beiden Spaltenvektoren d[illegible] Matrix werden hinte[illegible] angehängt[illegible]



$$\text{Det}\,A = \text{Det}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array}\right.$$

[illegible] Eleme[illegible] unter den [illegible]nalen Linien [illegible]en multipliziert.

Das [illegible]rodukt erhält [illegible] **positives** Vorzeichen, [illegible] von ob[illegible] nach unten rechts multipliziert w[illegible].

Das Produkt erhält ein [illegible]**egatives** Vorzeichen, we[illegible] [illegible]ben rechts nach unten links multipliziert wird.

$$\text{Det}\,A = aei + bfg + cdh - ce\text{[illegible]}afh\text{[illegible]}$$

[illegible]Zei[illegible] Sie, das[illegible] [illegible]e Determina[illegible] [illegible] Matrix $D=\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \text{[illegible]} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{[illegible]} & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ den Wert $1^{(*)}$ hat.

[illegible]ng: Sie werden später in Übung 22.1 lernen, dass die Matrix D ei[illegible] Drehmatrix ist. Bei einer linearen Abbil[illegible] hat die Determina[illegible] [illegible]ehmatrix immer den Wert 1. (vgl. auch Kapit[illegible] [illegible]blick zu Drehung)

Aufgabe 18.6

Besondere Matrizen

a) Die Einheitsmatrix

Die Matrix $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ wird als **Einheitsmatrix E** bezeichn[illegible]

Weisen Sie am folgenden Beispiel nach, dass für [illegible] Mul[illegible] [illegible]tion ei[illegible] Matrix A mi[illegible] Einheitsmatrix E gilt: $A \cdot E = A$ und auch $E \cdot A$[illegible]

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \text{[illegible]} & 3 \\ \text{[illegible]} & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 1\text{[illegible]} \\ 2 & 1 & \text{[illegible]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Zeige[illegible] S[illegible] durch Re[illegible]ung, dass für d[illegible] folgenden Matri[illegible] jeweils gilt: $A \cdot B = E$

$$\begin{pmatrix} 3 & \text{[illegible]} \\ \text{[illegible]} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \text{[illegible]} \\ -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{[illegible]} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \text{[illegible]} \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 & 4 & \text{[illegible]} \\ 31 & -13 & 7 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Die Matrix B wird als **inver[illegible]** [illegible] Matrix A bezeichnet. Man schreibt für B auch A^{-1}.

Für inv[illegible]

[illegible]zenoperationen, hier vor allem das Berechnen von inv[illegible] [illegible]vertieren von Matrizen), [illegible] Regel eines umfangreichen Rechenaufwands bedürfen, ist [illegible] Taschenrechner zu [illegible]wenden. Erarbeiten Sie sich ggf. mit Hilfe der Bedienungsanleitung[illegible] [illegible]er Multiplikation von Matrizen Ihren Taschenrech[illegible] können und wie Sie mit Hilfe [illegible]rechners eine Matrix invertieren kön[illegible]

Er[illegible]ungen:____

____

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Algebra
selbstorganisiert erlernen

Kap

Projektion

02-031-266

Lineare Gleichungssysteme

Einführung in die Vektorrechnung

Geraden in der Ebene und i Rau

Eben un

Lineare Abbildungen

Gesa ebra selbstorganisiert erlernen (-031-266)
St

rSelbstVerlag
tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ
lehrerselbstverlag.de
www.f-druck.de

Kapitel 19: Projektion

Was man in der linearen Algebra unter einer Projektion versteht, kann man sie [illegible] hr an [illegible] aulich verdeutlichen, wenn man an die Programmierung von Computersp [illegible] lenkt. [illegible] beispielsweise Spielabläufe, die im dreidimensionalen Raum stattfi [illegible] dem B [illegible] chirm eines Monitors dargestellt werden. Das bedeutet unter Verwendung der Fa [illegible] ie, dass der dreidimensionale Raum R^3 auf die zweidimensionale Fläch [illegible] es Bild [illegible] a [illegible] o den R^2, projiziert wird. Um ein möglichst hohes Maß an Anschaulichkeit zu erhalte [illegible] rden [illegible] en ersten Aufgaben nur Projektionen in der Ebene betrachtet.

Aufgabe 19.1

Projizieren Sie die Punkte in der x,y-Eben [illegible] Richtu [illegible] der zweiten Win [illegible] elhalbierende [illegible] auf die

Gerade g_B: y = 0,5x oder in ve [illegible] er Dars [illegible] $\vec{x} = r\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

a) Erläuterung der Au [illegible] stellung

Umgangsspra [illegible] be [illegible] tet das, wie man der Abbildung 19.1 e [illegible] dass alle Punkte [illegible] Ebe [illegible] Richtung der zweite Win [illegible] den, [illegible] die **Bildgerade g** "ge [illegible] oben", [illegible] projiziert werden. [illegible] ie Ric [illegible] der P [illegible] ktion bzw. "V [illegible] chiebung" [illegible] t n [illegible] ben [illegible] durch eine Gerade an, di [illegible] **[illegible] jekt [illegible] ade g_P** [illegible] et wird.

D [illegible] Punkt A hat beis [illegible] weise den B [illegible] kt A'. [illegible] e, welche [illegible] reits auf der Bi [illegible] aden g_B liegen werden au [illegible] ch selbst a [illegible] bildet, hier z.B D = D'. Punkte, die au [illegible] selbst abgebildet werden, nennt ma **Fixpunkte**.

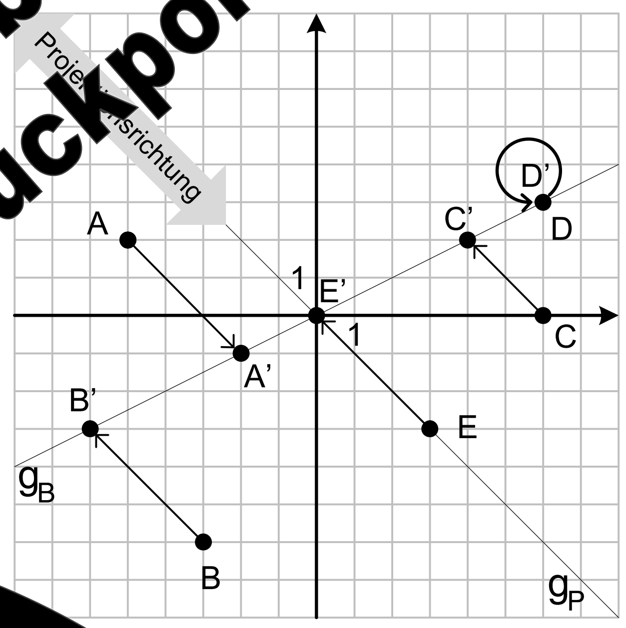


Abb. 19.1

Geben Sie jeweils die Koordinaten der eingezeichn [illegible]

[illegible] /__) ⟶ B'(__ /__)

C(__ /__) ⟶ C'(__ /__)

D(__ /__) ⟶ D'(__ /__)

E([illegible]

[illegible] x/y) der Ebene durch Projektion in Richt [illegible] aden g_P ein [illegible] (x'/y') auf der Ge [illegible] aden g_B zugeordnet. Man nennt eine solch [illegible] eine Abbildung [illegible] e (also des zweidimensionalen Raumes R^2) auf eine Gerade (al [illegible] eindimensionalen [illegible] R^1)

---

b) Ermittlung der Abbildungsvorschrift in Form einer Projektionsmatrix

Schritt 1: Bestimmen der Geradengleichung der Projektionsgeraden g_P, welch [illegible] Richt [illegible] der Projektion vorgibt

$$g_P:\quad \overrightarrow{x'} = \vec{x} + s\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

$$g_P:\ \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

Ein beliebiger Punk [illegible] it dem Ortsvektor $\vec{x}$ wird au [illegible] e B [illegible] de projiziert (g [illegible] oben), [illegible] ch man den Bildpunkt X' [illegible] m O [illegible] ektor $\overrightarrow{x'}$ erhält.

Schritt 2: Die in Abb. 19.1 eingezeichnete Pr [illegible] sge [illegible] verläuf durch de [illegible] Punkt E. Der Bildpunkt von E liegt im Schnittpu [illegible] der Projekti [illegible] eraden g_P [illegible] it der Bildgeraden g_B, hier also im Ursprung. Wenn Sie [illegible] Projektio [illegible] sge [illegible] de durch den [illegible] unkt B zeichnen, erkennen Sie, dass der Bildpunkt [illegible] benfal [illegible] Schnittpu [illegible] Bildgera [illegible] mit der Projektionsgeraden lieg [illegible]

Ergänzen Sie:
Für alle Punkte [illegible] Ebe [illegible] gilt: D [illegible] Bildpunkt X' eines beliebiges Pu [illegible] tes X liegt im

____ de Geraden [illegible] und g_B. D.h. man berechnet

X' d [illegible] h Gle [illegible] etzen [illegible] Gerad [illegible] ____ und ____.

Schri [illegible] 3: [illegible] leichse [illegible] und Berechn [illegible] Parameters [illegible] der Projektionsgeraden. Verdeutlichen [illegible] sich [illegible] Rechenschr [illegible] d die Unt [illegible] ch [illegible] de zur bisherigen Schnittpunktsberechnung b [illegible] n.

$$g_B = g_P$$

$$r\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

Neu:
In der Geradengleichung hat der Stützvektor keine eindeutigen Zahlenwerte, sondern ist variabel.

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 2r = x + s & \Big| & \text{I} - 2\text{II} \\ \text{II} & r = y - s & & \end{array}$$

Neu:
Der Parameter s nimmt nun keinen Zahlenwert an, sondern ist von x und y abhängig.

[illegible] chnen des von x und y abhängige [illegible] h Einsetzen von s in die Projektionsgerade g_P.

[illegible] fassen

$$\overrightarrow{x'} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + (-\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}y)\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

$$[\text{illegible}]\ x + \tfrac{2}{3}y \ldots \tfrac{1}{3}x - \tfrac{2}{3}y \ldots = \begin{pmatrix}x - \tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}y\\ y + \tfrac{1}{3}x - \tfrac{2}{3}y\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{x'} = \begin{pmatrix}[\text{illegible}] + \tfrac{2}{3}y\\ \tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{3}y\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{x'} = \begin{pmatrix}\tfrac{2}{3} & \tfrac{2}{3}\\ \tfrac{1}{3} & \tfrac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

Die Matrix [illegible]
A= [illegible]
[illegible] **atrix** [illegible] eziell als [illegible] **nsmatrix** [illegible] et.

Der A [illegible] der Klam [illegible] nt dem Produk [illegible] Matrix und der [illegible] Der Vektor k [illegible] ausgekla [illegible] den.

c) Anwenden einer Abbildungsmatrix

Die folgende Aufgabenstellung verdeutlicht die Anwendung der unter b) er[illegible]lten P[illegible]ktionsmatrix in Bezug auf die in Abb. 19.1 dargestellten Punkte. Verdeutlichen [illegible] die Vo[illegible]se am Beispiel von Punkt A, berechnen Sie anschließend analog dazu [illegible]dinaten [illegible] Bildpunkte von B, C, D und E und vergleichen Sie die Ergebnisse mit der Ab[illegible]9.1.

$$A(-5/2) \quad \Rightarrow \quad \vec{a}\,' = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{10}{3} & +\frac{4}{3} \\ -\frac{5}{3} & +\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A'(\ /1)$$

$$B(\_\_/\_\_) \quad \Rightarrow \quad \vec{b}\,' = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad B'(\_\_/\_\_)$$

$$C(\_\_/\_\_) \quad \Rightarrow \quad \_\_ = \begin{pmatrix} \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \_\_'(\_\_/\_\_)$$

$$\_\_ \quad \Rightarrow \quad \_\_ = \begin{pmatrix} \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \_\_'(\_\_/\_\_) \text{ (Fixpunkt)}$$

$$E(\_\_/\_\_) \quad \Rightarrow \quad \_\_ = \begin{pmatrix} \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \_\_'(\_\_/\_\_)$$

Vergl[illegible]

____

____

Zusammenfassung: Projektion auf eine Gerade im R^2

Mit Hilfe der Gleichun[illegible] kann man bei der Projektion eines [illegible]) die Koordinaten des Bildpunktes X'[illegible]

De[illegible]

[illegible]ng, die man mit einer Gleichung der Form $A\vec{x} = \vec{x}\,'$ besc[illegible]n, wird als [illegible]bildung bezeichnet. Bei einer linearen Abbildung auf eine Ge[illegible]n die [illegible]te immer auf einer Ursprungsgeraden.

Aufgabe 19.2

Eigenschaften der Projektionsmatrix

Anhand des Beispiels von Aufgabe 19.1 sollen nun wichtige Eigenschaft[illegible] Projek[illegible]zen dargestellt und neue Begriffe wie Fixpunkt- und Bildmenge sowie Kern ei[illegible] Ab[illegible]g erläutert werden. Verdeutlichen Sie sich die folgenden Ausführungen und ergänzen Sie ggf. [illegible]ben.

a) Zeigen Sie durch Berechnung des Produkts $A \cdot A = A^2$, dass gil[illegible] A

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \end{pmatrix}$$

Geometrische Erläuterung:
Eine einmalige Anwendung der M[illegible]en Punkt projiz[illegible]t bzw. verschi[illegible] diesen Punkt auf die Bildgerade. Alle Punkt[illegible] der Bildgerad[illegible] (vgl. Punkt[illegible] in Abb. 19.1) sind Fixpunkte und werden nicht verschob[illegible]edeute[illegible] man d[illegible] A zweimal hintereinander erst auf den Punkt und danach a[illegible]n Bi[illegible]unkt an[illegible]det, wird das Ergebnis de[illegible] Abbildung nicht mehr verändert.

b) Vergleich[illegible] Sie de[illegible]chtun[illegible]vektor der Bildgeraden mit den Spaltenvektoren der Matrix A und ergä[illegible]en [illegible] den fo[illegible]den Satz.

Bildge[illegible]e: $g_B: \vec{x} = r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ Abbildungsmatrix: $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Die Spa[illegible]envektoren de[illegible]bildungsmatrix sind linear abhängig und entsprechen dem

______________________ der Bildgeraden.

c) Fixpunktme[illegible]

Di[illegible] Bedeutung der Begriffe bei einer [illegible]and des Beispiels von [illegible]

[illegible]tz Fixpunktmenge: $A \cdot \vec{x} = \vec{x} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

[illegible]unktmenge liefert [illegible] die bei der [illegible]f sich selbst [illegible]den.

Zu lösendes LGS:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y = x \\ \text{II} & \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y = y \\ \hline \text{I} & -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y = 0 \\ \text{II} & \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y = 0 \end{array}$$

Beide Gleichu[illegible]ntisch.
$\Rightarrow \; x - 2y = 0$

Int[illegible] Ergebnisses: Das Ergebnis ist die Gerade $y = \frac{1}{2}x$ d[illegible] $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Damit entspricht di[illegible]xpunktmenge der [illegible].

Ansatz Kern: $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$ $\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Der K[illegible] liefert a[illegible] gebnis die Menge a[illegible] Punkte[illegible] e auf den [illegible] sprung [illegible] bil[illegible] werden.

Zu lösendes LGS:

I $\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y = 0$ Beide [illegible] eich[illegible] sind identisch.
II $\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y =$ [illegible] umgef[illegible] x [illegible] y = 0

Interpretation des Ergebnisses: Das Erge[illegible] ist d[illegible] ktio[illegible] gerade y = –x und damit die 2. Winkelha[illegible] e. [illegible] lle Punkte [illegible] der Pro[illegible] sge[illegible] n werden in der [illegible] der Projektion auf [illegible] Ursprung a[illegible] ildet.

Ansatz Bildmenge: $A \cdot \vec{x} =$ [illegible] $\frac{2}{3}$ [illegible] $\frac{2}{3}$ [illegible] $= \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

Zu lösendes LGS:

$\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y = x'$
$\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y = y'$ [illegible] 2II
0 [illegible] $- 2y'$

Das LGS muss[illegible] umformen la[illegible], da[illegible] auf der linken Se[illegible]

Die **Bild**[illegible] ist hier nur bes[illegible] bar, weil alle abg[illegible] bildeten Punkte auf [illegible] Geraden liegen, al[illegible] eine einheitlich beschreibbare Bildmenge haben.

Inte[illegible] tation [illegible] Erg[illegible] sses: Das Ergebnis [illegible] zu $y' = \frac{1}{2}x'$ umgeformt werden und entspricht de[illegible] Fixpunktmenge oder der Menge aller Bildpun[illegible] e [illegible] der Bildgeraden.

Üb[illegible] en

[illegible] Projizieren Sie [illegible] Punkte der x,y-[illegible] bene in Richtung der Geraden $y = -\frac{1}{3}x$ auf die x-Achse.

Führen Sie [illegible] Berechnu[illegible] im Heft durch.

a) Zeigen Sie anhan[illegible] ner Zeichnung, dass der Punkt P(–1/2) auf den Punkt P'(5/0) abgebildet wird.
b) Zeigen Sie durch Rechnung analog zur Aufgabe 19.1, dass sich als Projektionsmatrix die M[illegible]
[illegible] gsmatrix A linear abhängig sind und [illegible] Richtungsvektor der Bildger[illegible]
e) Bestimmen Sie analog zur Aufgabe 19.[illegible] e, den Kern und die Bildmenge bei der Projektion und interpretieren Sie die [illegible]

Ü19.2 Projizieren Sie die Punkte der x,y-Ebene in Richtung [illegible] = –x auf die Gerade y = x (orthogonale Projektion). Führen Sie die Berechnungen [illegible]
a) Zeigen [illegible] er Zeichnung, dass der Punkt P[illegible] Punkt P'(6/6) abgebildet [illegible] n Fixpunkt ist.
[illegible] g analog zur Aufgabe 19.1, das[illegible] jektionsmatrix die [illegible] bt.
[illegible] berprüfen Sie, ob gilt: $A \cdot A = A^2 = A$
Überprüfen Sie, ob die Spaltenvektoren der Abbildungsmatrix A[illegible] ngig sind und dem Richtungsvektor der Bildgeraden ents[illegible] chen.
e) Bestimmen Sie analog zur Aufgabe 19[illegible] punktmenge, de[illegible] die Bildmenge bei der Projektion und interpretiere[illegible] bnisse.

Aufgabe 19.3

Projektionen im Raum

Die Erkenntnisse zur Projektion in der Ebene können im Wesentlichen a[illegible] m ü[illegible] gen werden. In der folgenden Aufgabe werden die Punkte des Raumes in Ric[illegible] g e[illegible] rojektionsgeraden g_p auf eine Projektionsebene bzw. Bildebene E_B projizi[illegible] Wie be[illegible] en" Abbildungen ist die Projektionsebene eine Ursprungsebene.

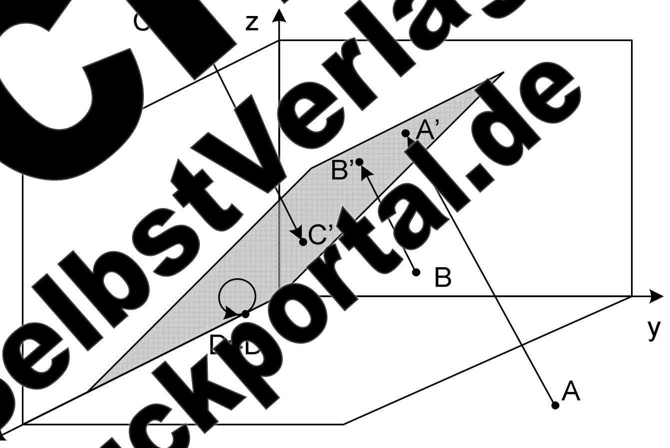
Projektionsebene: E_B: $\vec{x} = r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

oder

E_B: y – z= 0

Projektionsrichtung: g_p: [illegible] 2

Veransch[illegible] bildung im 1[illegible] uadranten:



a) Erm[illegible] d[illegible] smatrix

[illegible] hritt [illegible] Bestimmen der Ge[illegible] dengleichung d[illegible] Projektionsgeraden g_P. Diese Gerade gibt die Verschiebungs[illegible] tung bzw. Pro[illegible] onsrichtung an, in der ein beliebiger Punkt X(x/y/z) auf die Bi[illegible] bene bzw. Proj[illegible] nsebene projiziert (geschoben) wird.

$$g_P:\ \overrightarrow{x'} = \vec{x} + s\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Schritt 2: [illegible] rchstoßpunkten der Geraden g_p durch die [illegible] te. Einsetzen von g_p in E_B liefert den [illegible]

$$\begin{aligned} y - s - z - 2s &= 0 \\ 3s &= y - z \\ s &= \tfrac{1}{3}y - \tfrac{1}{3}z \end{aligned}$$

[illegible] chritt 3: Einsetzen von s in die Gerade g_p:

$$\overrightarrow{x'} = \begin{pmatrix} x \\ \ldots \end{pmatrix} \ldots \begin{pmatrix} x + 0 \\ \ldots \tfrac{1}{3}y - \tfrac{1}{3}z) \\ \ldots + 2(\tfrac{1}{3}y - \tfrac{1}{3}z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y - \tfrac{1}{3}y + \tfrac{1}{3}z \\ z + \tfrac{2}{3}y - \tfrac{2}{3}z \end{pmatrix} = \ldots$$

$$= \begin{pmatrix} \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{Abbildungsmatrix: } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

b) Anwenden der Abbildungsmatrix auf Punkte im Raum

Zeigen Sie, dass der Punkt P(3/9/6) auf den Punkt P'(3/8/8) abgebildet wir[illegible] wie de[illegible]unkt Q(3/1/1) und alle Punkte R(r/0/0) auf der x-Achse Fixpunkte bei der Abbil[illegible] sind.

$$P(3/9/6) \quad \Rightarrow \vec{p}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\qquad\qquad} \\ \underline{\qquad\qquad} \\ \underline{\qquad\qquad} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\quad} \\ \underline{\quad} \\ \underline{\quad} \end{pmatrix} \Rightarrow \quad [illegible]\_\_/\_\_)$$

$$Q(\_\_/\_\_/\_\_) \quad \Rightarrow \vec{q}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & [illegible] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\quad} \\ \underline{\quad} \\ \underline{\quad} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\qquad\qquad} \\ \underline{\qquad\qquad} \\ \underline{\qquad\qquad} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\quad} \\ \underline{\quad} \\ \underline{\quad} \end{pmatrix} \Rightarrow \quad Q'(\_\_/\_\_/\_\_) = Q$$

$$R(\_\_/\_\_/\_\_) \quad \Rightarrow [illegible] \begin{pmatrix} \underline{\quad} \\ \underline{\quad} \\ \underline{\quad} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\qquad\qquad} \\ \underline{\qquad\qquad} \\ \underline{\qquad\qquad} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\quad} \\ \underline{\quad} \\ \underline{\quad} \end{pmatrix} \Rightarrow \quad [illegible](\_\_/\_\_/\_\_) = R$$

Au[illegible]be 19.4

[illegible]haften de[illegible] Projektionsma[illegible]

Analog zu den Untersuchungen [illegible] Eigenschaften von Projektionsmatrizen in der Ebene wird nun die Projektionsmatrix aus Aufga[illegible] 19.3 untersucht.

a) Zeigen Sie durch Berechnung des Produkts $A \cdot A = A^2$, dass auch bei einer Projektion im Raum der Zusammenh[illegible]

$$[illegible] = \begin{pmatrix} [illegible] \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} [illegible] \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} =$$

b) Vergleichen [illegible] der Projektionsebene mit de[illegible]ren der Matrix A und ergänze[illegible]z:

[illegible]ene: E_B: $\vec{x} = [illegible] + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Projektionsmatrix: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & [illegible] \\ 0 & \frac{2}{3} & [illegible] \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ [illegible] $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ [illegible] & 1 \\ [illegible] & 1 \end{pmatrix}$

Die Spaltenvektoren der Abbildungsmatrix lassen sich in der Form $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ [illegible] \end{pmatrix}$ un[illegible] $\begin{pmatrix} 0 \\ [illegible] \end{pmatrix}$ darst[illegible] und

sind linear __________________. Die Spaltenvektoren entsprechen de[illegible]ren der

______________________________ .

c) Fixpunktmenge, Kern und Bildmenge bei eine[illegible]ktion

Die Berechnung von Fixpunktmenge, Kern u[illegible] Bildmen[illegible] erfolgt nach de[illegible] gleichen Verf[illegible]en wie bei der Abbildung in der Ebene. Arb[illegible] Sie [illegible]eispi[illegible] durch, u[illegible] [illegible]den Sie die [illegible]ren auf nachfolgende Übungsaufgaben a[illegible]

Ansatz Fixpunktmen[illegible] A[illegible] $= \vec{x}$ $\begin{pmatrix} [illegible] & 0 & [illegible] \\ [illegible] & [illegible] & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Zu lösendes [illegible]

I x [illegible] = x

II [illegible] y [illegible] $\frac{1}{3}z = y$

III $\frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z = $ [illegible]

[illegible] = 0

II $-\frac{1}{3}y$ [illegible] $z = 0$

III [illegible] y [illegible] $\frac{}{3}z = 0$ II und III sind identisch: $\Rightarrow y - z = 0$

Interpr[illegible]tion des Erge[illegible]ses: [illegible]esem unterbestimmten LGS sind zwei Variablen frei w[illegible]hlbar. Wählt man x = r und z = s ergibt sich aus

$\vec{x} = r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ oder nach Umrechnung die Ebene y – z = 0

[illegible]tspricht die Fixpunktmenge der Projektions-

[illegible]

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [illegible] \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

[illegible] = 0

Zu lösendes LGS:

I x = 0 $\Rightarrow x = 0$

II $\frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z = 0$

[illegible] $\frac{1}{3}z = 0$ Beide Gleichung[illegible]sch: $\Rightarrow 2y + z = 0$

Interpreta[illegible] unterbestimmten LGS ist eine Va[illegible]hlbar. Wählt Ergebn[illegible] r, folgt z = –2r. Als Lösungsvektor er[illegible]

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ -2r \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Dies entspricht der Projektio[illegible] durch den Ursprung des Koordina[illegible]ms, d.h. die Bere[illegible] Kerns liefert die Richtung[illegible].

Ansatz Bildmenge:
$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\0&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$$

$A\cdot\vec{x}=\overrightarrow{x'}$

Zu lösendes LGS:

I $x = x'$ ⇒ x-Achs… wir… …en abgebildet

II $\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}z=y'$

III $\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}z=$ … | II – II…

$0 = y'$…

Links vom Gleichheitszeichen ergibt sich Null.

Interpretation des Ergebnisses: Die Bildr… …ge entspricht … Fixpunktm… Damit handelt es sich bei der linea… Abbildu… um eine Projekt…n.

Aufgabe 19.5

Bedeutung der Einh… …toren bei Pr…ektionen

a) Als Projektions… …e … Ebene x + y + z = 0 gewählt. Zeigen Sie durch entsprechende Rechnung, dass … …bige… Abbildungsmatrizen ergeben:

… $\begin{pmatrix}0&-&1\\0&1&\\&0&\end{pmatrix}$, wenn man i… …ichtung des Ein…eitsvektors $\vec{e_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ (x-Achse) projiziert.

… $\begin{pmatrix}\\-1&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$, wenn man in Richtung des … $\begin{pmatrix}0\\1\\\end{pmatrix}$ (y-Achse) projiziert.

---

iii) $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&-1&0\end{pmatrix}$, wenn man in Richtung des Einheitsvektors $\vec{e_3}=\begin{pmatrix}0\\0\\\end{pmatrix}$ (x-Ac… projizie…

Ergänzen Sie:

Bei der Projektion in R… …tung … Ein… …ktoren … …en allen drei Mat…en jeweils eine Spalte mit Nullen auf. Bei Projekt… …es Einheitsvektors $\vec{e_1}$ entsp… …e ___ Spalte dem Nullvektor. … …ion … …htung des E… …svektors ___ …spricht die 2. Spalte dem Nullvektor. Bei Proje…n in Ric…g des Einheitsve…rs ___ entsp… …ie ___ Spalte dem Nullvektor.

…n Auf…e 19.4 wurde bei der …ojektion auf d… E…ene E: y – z = 0 in Richtung der …kt… …geraden

g_p: $\overrightarrow{x'}=\vec{x}+s\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$ die Pr…ektionsmat…x …$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\0&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&1\\0&2&1\end{pmatrix}$ ermittelt. Setzt man in der Projektionsgeraden für den Vektor $\vec{x}$ nacheinander die Einheitsvektoren $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ und $\vec{e_3}$ ein und berechnet die Durchste… …ktionsebene E, erhält man deren Bilder $\overrightarrow{e_1'}$, $\overrightarrow{e_2'}$ und $\overrightarrow{e_3'}$. Führen Sie … …ergänzen Sie den nachfolgenden Satz.

… $\begin{pmatrix}\\\\2\end{pmatrix}$ in E_B ⇒ $-s-2s=0$ … $\Rightarrow\overrightarrow{e_1'}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

ii) $\overrightarrow{e_2'}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$ in E_B ⇒ $1-s-2s=0$ ⇒ $s=\frac{}{\_\_\_}$ … $\begin{pmatrix}0\\\\\end{pmatrix}+\_\_\_\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$

iii) $\overrightarrow{e_3'}=\begin{pmatrix}0\\\\\end{pmatrix}$ … ________ ⇒ $s=\frac{}{\_\_\_}$ ⇒ e… $\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

…r Einheitsvektoren entsprechen den ______ …der …matrix. Damit kann man die Projektionsm… …über die Abbildu… …toren ermitteln.

Aufgabe 19.6

Untersuchung auf Existenz einer inversen Matrix bei der Projektion

Aus Aufgabe 18.6 wissen Sie bereits, dass es zu einer Matrix A au[illegible] inverse Matrix A^{-1} geben kann und dass gilt: $A \cdot A^{-1} = E$

Aufgrund der Überlegungen aus Aufgabe 19.4 wissen Sie, dass bei Projektionen gilt: A^2=A.

In den folgenden Rechenschritten werden diese Zus[illegible] angewandt, um zu untersuchen, ob zu einer Projektionsmatrix A eine inverse Matrix A^{-1} existiert. Erläutern Sie die Zeilen (2) bis (5) und ergänzen Sie die Lücken im Text.

(1) Wenn A^{-1} existiert gilt: $A \cdot A^{-1} = E$

(2) $A \cdot (A$ [illegible] $) = AE$ ________________________________
____
____

(3) [illegible] $A) \cdot A^{-1} = A$ ________________________________
____
____

([illegible] $A^2 \cdot A^{-1}$ [illegible] ________________________________
____
____

(5) [illegible] ein Widerspruch zur Zeile (1), da das Produkt einer [illegible] inversen Matrix die ________________

________________ [illegible]eben muss.

Ergebnis: Bei einer Projektion existiert zur Projektionsmatrix [illegible]___ inverse Matrix A^{-1}.

Raum für Notizen

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Algebra
selbstorganisiert erlernen

Kap

Spiegelung

02-031-266

Lineare Gleichungssysteme

Einführung in die Vektorrechnung

Geraden in der Ebene und i Rau

Eben un

Lineare Abbildungen

Gesa ebra selbstorganisiert erlernen (-031-266)
S

SelbstVerlag
tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ
lehrerselbstverlag.de
www.f-druck.de

Kapitel 20: Spiegelung

Aufgabe 20.1

Im Rahmen dieser Aufgabe wird entsprechend zur Projektion eine Spiegelmatrix ermittelt und anschließend die Eigenschaften dieser Matrix untersucht.

Wie bei allen "linearen" Abbildungen ist die Ebene, an der gespiegelt wird, eine Ursprungsebene.

Hier wird die Ebene E: x – y = 0 [illegible]

in Richtung der Geraden $g_S: \vec{x}$ [illegible] -1

gespiegelt.

Abb. 20.1

a) Erm[illegible] der [illegible]gel[illegible]x

[illegible] Bestim[illegible] der Gleich[illegible] Geraden g_S, welche die Richtung der Spiegelung vorgibt.

$$g_S:\ \overrightarrow{x'} = \vec{x} + s \begin{pmatrix} \\ \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} \\ \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Schritt 2: Wie Sie bereits im Kapitel 14 Aufgabe 14.3 gelernt haben, benötigt man zur Berechnung der Koordinaten [illegible] Punktes die Koordinaten des Durchstoßpunktes S [illegible] die Ebene E. Die Berechnung liefert den Parameter s.

[illegible] Koordinaten des Spiegelpunktes analog [illegible] berechnen.

$$\overrightarrow{x'} = \vec{x} + 2s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$[illegible] \begin{pmatrix} x-2x+2y \\ \\ z+2x-2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+2y+0 \\ 0+y\ +0 \\ 2x-2y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Spiegelmatrix}:\ S = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

---

b) Anwenden der Abbildungsmatrix S auf Punkte im Raum

Zeigen Sie, dass der Punkt P(–2/0/3) auf den Punkt P'(2/0/–1) abgebildet wird, s[illegible] der P[illegible] Q(2/2/3) und alle Punkte R(0/0/r) auf der z-Achse Fixpunkte bei der Ab[illegible]g sind.

$$P(-2/0/3) \quad \Rightarrow \overrightarrow{p'} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} \Rightarrow [illegible](\_\_/\_\_/\_\_)$$

$$Q(\_\_/\_\_/\_\_) \quad \Rightarrow \overrightarrow{q'} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} = [illegible] \Rightarrow Q'([illegible]/\_\_/\_\_) = Q$$

$$R(\_\_/\_\_/\_\_) \quad \Rightarrow \overrightarrow{r'} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & [illegible] & 0 \\ [illegible] \end{pmatrix} [illegible] \Rightarrow R'([illegible]/\_\_) = R$$

Aufga[illegible] 20.[illegible]

[illegible]igensc[illegible]ten [illegible]egelmat[illegible]

Ent[illegible] zu Projektionsm[illegible]zen weisen [illegible] Spiegelmatrizen charakteristische Eigenschaften auf.

a) Wenden Sie die Spiegelmatrix auf d[illegible] Punkt P' aus Aufgabe 20.1 b) an und ergänzen Sie den folgenden Satz.

$$P'(2/0/-1) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{p''} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ [illegible] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \_\_ \\ [illegible] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ [illegible] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad P''(\_\_/\_\_/\_\_) = P$$

[illegible]iche Matrix noch einmal

[illegible] erhält man den __________________________

[illegible]aher gilt bei einer Spiegelung $S \cdot (S \cdot \vec{x}) = S \cdot S \cdot \vec{x} = S^2 \cdot \vec{x} = \vec{x}$ u[illegible]kt $S \cdot S = S^2$ muss

daher der Zusammenha[illegible] S^2 [illegible] E erfüllt sein.

Zeigen Sie d[illegible]s $S \cdot S = S^2$ für die Matrix aus [illegible] dass bei einer Spiegelun[illegible]g ist.

$$S^2 [illegible] \begin{pmatrix} [illegible] & & 0 \\ & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & & [illegible] \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

b) Fixpunktmenge, Kern und Bildmenge bei einer Spiegelung

Die Berechnung von Fixpunktmenge, Kern und Bildmenge erfolgt nach dem [illegible] [illegible] wie bei der Projektion. Arbeiten Sie die Beispiele durch, und wenden [illegible] die [illegible] nachfolgende Übungsaufgaben an.

Ansatz Fixpunktmenge: $S \cdot \vec{x} = \vec{x}$ $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ \end{pmatrix} = $ [illegible]

Zu lösendes LGS:

I [illegible] 2y [illegible]
y [illegible]
2x −2y [illegible] z = z

I [illegible] = 0
[illegible] 0 = 0 [illegible] und III sind identisch: $\Rightarrow x - y = 0$
2x−2y [illegible]

Interpretation des [illegible]: [illegible] diesem [illegible] zwei Variablen frei wählbar. Man erhält als Lösu[illegible] eine Ebene, die der Ebene x – y = 0 entsp[illegible]. Damit ents[illegible] die Fixpunktmenge der Spieg[illegible]ebene, d.[illegible] alle Punkte auf dieser Ebene werden auf [illegible] selbst abgebildet.

Ansatz Kern: $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$ $\begin{pmatrix} & 2 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Zu lösendes LGS:

I −x + 2y = 0
II y = 0 ⇒ y = 0
III 2x − 2y + z = 0

y in I ⇒ x = 0

[illegible] ⇒ z = 0

[illegible] Menge aller Punkte an, die auf den Ursp[illegible] auf den Ursprung gespiegelt werden. Da[illegible] Spiegelung jedoch nur der Ursprung selbs[illegible] andere Punkt einen vom Ursprung verschie[illegible] hat. Dieses Ergebnis ist daher charakteristisch [illegible].

Ansatz Bildmenge: $A \cdot \vec{x} = \overrightarrow{x'}$ $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

Zu lösendes LGS:

I −x + 2y = x' |
II y = y' | [illegible] −2II
III 2x − 2y + z = z' | [illegible] III

IV −x [illegible]
V x [illegible] z = [illegible] | [illegible] + V

[illegible] z = 2x' [illegible] z'

Links vom Gleichheitszeichen ergibt sich durch die Addition nicht Null.

Interpretation des Ergebnisses: Da sich die [illegible]seite des [illegible] nicht so u[illegible]formen lässt, dass [illegible] bei der Projektion Null ergibt, als[illegible] Ergebnis der Form [illegible] 2x' − 2y' + z [illegible] entsteht, exist[illegible] keine Bildmenge. Das [illegible] Sinn, [illegible] einer Spiegelung jeder Punkt individuell auf [illegible] Bildpunkt abgebildet wird und somit keine einheitlich [illegible] Bildmenge vorhanden ist.

Aufgabe 20[illegible]

Unters[illegible] Existenz einer in[illegible] Matrix bei der Spiegelung

[illegible] Aufg[illegible] 18.6 wissen Sie bereits, dass es zu einer Matrix A auch eine inverse Matrix A^{-1} geben ka[illegible] gilt: $A \cdot A^{-1} = E$

Aufgrund der Überlegungen aus Aufgabe 20.2 wissen Sie, dass bei Spiegelungen gilt: $S^2 = E$.

In den folgenden Rechenschritten werden diese Zusammenhänge angewendet, um zu untersuchen, ob zu einer Spiegelmatrix S eine inverse Matrix S^{-1} existiert. Erläutern Sie die Zeilen (2) bis (5) und ergänzen Sie die Lücken im Text.

(1) We[illegible]

$S \cdot (S \cdot S^{-1}) = S \cdot E$ ________________

____

____

(3) ________________

____

____

(4) $S^2 \cdot S^{-1} = S$ ________________

(5) $E \cdot S^{-1} = S$

oder $S^{-1} = S$

Ergebnis: Wenn eine invers[illegible]ert, gilt bei einer Spiegelung $S^{-1} = S$

Übungen

Ü20.1 Untersuchen Sie die orthogonale Spiegelung an der Ebene x – z = 0 in Ihrem Heft.

a) Zeigen Sie, dass sich als Spiegelmatrix $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ergibt.
b) Zeigen Sie, dass die Eigenschaft $S^2 = E$ erfüllt ist.
c) Zeigen Sie, dass die Fixpunktmenge der Spiegelebene entspricht.
d) Zeigen Sie, dass der Kern der Abbildung dem Nullvektor entspricht.
e) Zeigen Sie, dass keine Bildmenge existiert.

Ü20.2 [illegible] Sie durch Rechnung, dass es sich bei der [illegible] um eine orthogonale Spiege[illegible]andelt, indem Sie die Fixpunktmenge, den Kern und die Bildme[illegible]suchen.

Raum für Notizen

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Alge ra
selbstorganisiert rle en

Ka

Zentrische Strec
aus dem Ursprung

02-031-266

Lineare Gleichungssysteme

Einführung in die Vektorrechnung

Geraden in der Ebene und Rau

Eben un

Lineare Abbildungen

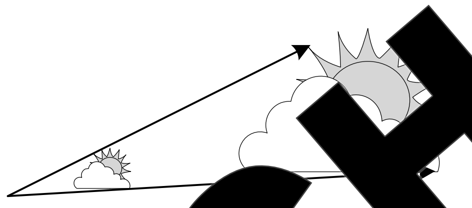
Gesa ebra selbstorganisiert erlernen (-031-266)
St

SelbstVerlag
tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ
lehrerselbstverlag.de
www.f-druck.de

Kapitel 21: Zentrische Streckung aus dem Ursprung

Aufgabe 21.1

Eigenschaften von Streckmatrizen bei zentrischer Streckung a… …rsprung



Ab… 21.1

Die Abbildungen 21.1 und 21.2 zeigen jew… zentris… Streckungen von Bildern und Ve… Sie… en b…ts, dass man Vektoren durch Mult…kation mit e… …en Zahl verlängern bzw. verkürzen un… …ng umkehren kann. Neu ist nun, dass … …en Operationen die Bedeutung einer … Abbildung …dnet und eine Abbildungsmatrix …ittelt.

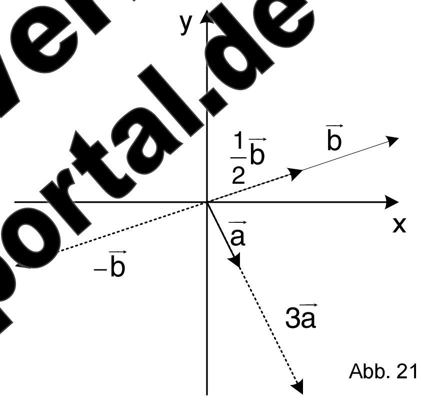


Abb. 21.2

Die folgende Umfor… …zeig… …erleitung … Streckm… …r Eb…

a) Übe…gen Sie … Vorgehensweise …uf Vektoren i… …um …nd …n Sie …e entsprechende Streckmatri… a…

…eckmat… …n d… Ebene: $\vec{x}' = u\vec{x} = u\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = u\begin{pmatrix} x+0 \\ 0+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ux+0 \\ 0+uy \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}}_{\text{Streck-matrix Ebene}}\vec{x}$ $\Rightarrow A = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} u & \_ & \_ \\ \_ & u & \_ \\ \_ & \_ & u \end{pmatrix}$

____

…nzen Sie: Eine Streckmatrix erkennt man da… …gonalen drei ______________ Zahlenwerte stehen und in allen restlichen Feldern eine _… …int.

c) Eigenschaften…

Verd… …olgenden Angaben, inwiefern da… …ergebnis bei einer ze… …rsprung von dem Zahlenwert u in de… …smatrix abhängt.

… ⇒ Streckung in Richtung des Vektors $\vec{x}$

u = 1 ⇒ A entspricht der Einheitsmatrix $\vec{x}$ …nd bildet $\vec{x}$ auf si… Damit liegt für u = 1 keine ze… Streckung vor.

…< u < 1 ⇒ Verkürzung des Vekto…

---

u = 0 ⇒ Abbildung des Vektors $\vec{x}$ auf den Ursprung. In diesem Fa… …gt **kei…** zentrische Streckung vor.

–1 < u < 0 ⇒ Punktspiegelung am Ursprung mit Verkürzung de… …tors $\vec{x}$

u = –1 ⇒ Punktspiegelung am Ursprung

u < –1 ⇒ Punktspiegelung am Ursprung mit Streck… …des V… …x

d) Fixpunktmenge, Kern und Bildmenge bei der zentrischen … …kung, … für $u \neq 1$ u… …$\neq 0$.

Fixpunktmenge: $A\vec{x} = \vec{x}$ $\begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 \\ 0 & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix}$ … x

Lösen des LGS: ux … …y = y …z = z x = 0 … ⇒ x = (0 0 …)

Interpretatio… Ergebniss…: Da die Fixpu… …enge alle Pu… …iefert, die auf sich selbst …gebildet w…rden, kann, wie das Ergebnis zeigt, nur der Ursprung die Fixpunkt…enge sein, d.h. … der Nullvektor wird auf sich selbst abgebi…et.

Ke…: $A\vec{x}$ … $\vec{0}$ $\begin{pmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & u & \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ \\ z \end{pmatrix}$ … $\begin{pmatrix} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lösen des LGS: ux = 0 uy = 0 ⇒ x = 0, y = 0, z = 0 ⇒ $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Inte… …f den Ursprung abgebildet werden. …ullvektor, da außer dem Ursprung selbst k… …den Ursprung abgebildet wird.

Bildmenge: A… $\begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ & & 0 \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

Lösen des … uz … z' ⇒ $ux = \bar{x}$, $uy = \bar{y}$, $uz = \bar{z}$ ⇒ keine E… …n x, y und z auf der … möglich

…n des …s: Jeder Punkt hat einen indi… …len Bildpunkt. Da… keine einheitlich anzugeben… …ge.

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Alge[illegible]a

selbstorganisiert [illegible]erle[illegible]en

Ka[illegible]

Drehungen

02-031-266

Gesa[illegible]ebra selbstorganisiert erlernen ([illegible]-031-266)

St[illegible]

[illegible]rSelbstVerlag
[illegible]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[illegible]
[illegible]lehrerselbstverlag.de
[illegible]www.f-druck.de

Kapitel 22: Drehungen

Aufgabe 22.1

Die Betrachtung von Drehungen beschränkt sich hier auf die Dreh[illegible] die Ko[illegible]achsen. In der folgenden Abbildung ist die Drehachse die z-Achse und zeigt nach [illegible] Papierebene heraus. Die Position der Wolke vor und nach der Drehung [illegible] durch [illegible] des Punktes X bzw. X' angegeben. Verdeutlichen Sie sich die Herleitung der D[illegible]atrix b[illegible] Drehung um die z-Achse, indem Sie die Umformungen erläutern.

$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathet}[illegible]}{[illegible]\text{use}}$ $\quad x = r\cos\alpha$ $\qquad x' = r\cos(\alpha+\varphi)$

$\sin\alpha$ [illegible] $\frac{\text{egenk}[illegible]}{[illegible]\text{ypother}}$ $\Rightarrow$ $\quad y = r\sin$[illegible] $\qquad y' = r\ \sin(\alpha+\varphi)$

[illegible] z $\qquad z' = z$

Mit [illegible] der Additionsthe[illegible] (vgl. Tafel[illegible])

[illegible]$\varphi) = \sin\alpha\cos\varphi$ [illegible] $\cos\alpha\sin\varphi$

$\cos(\alpha+\varphi) = \cos\alpha\cos\varphi - \sin\alpha\sin$[illegible]

ergeben sich folgende Umformungen bei der Herleitung der Drehmatrix um die z-Achse. Erläutern Sie die Schritte (1) bis (4).

(1) [illegible]

(1)______________________________________

____

$$(2)\ \overrightarrow{x'} = \begin{pmatrix} r\cos\alpha\cos\varphi - r\sin\alpha\sin\varphi \\ r\sin\alpha\cos\varphi + r\cos\alpha\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

____

____

(3) $\overrightarrow{x'} = \begin{pmatrix} x\cos \text{[illegible]} \\ \text{[illegible]} \end{pmatrix}$

(3)______________________________________

____

$$\begin{pmatrix} [illegible]\varphi - y\sin\varphi + 0 \\ [illegible]\sin\varphi + y\cos\varphi + 0 \\ 0 \quad + \quad 0 \quad + z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Drehmatrix M}[illegible]} \vec{x} = M\vec{x}$$

(4)______________________________________

____

Wenn man die Betrachtungen zur Herleitung der Drehmatrix um die z-Achse auf D[illegible]ehunge[illegible] die x- und y-Achse überträgt, ergibt sich folgender Überblick über Drehmatrizen:

Drehung um die x-Achse	Drehung um die y-Achse	[illegible]g um [illegible] Achse
$M_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$	$M_y = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & [illegible] \end{pmatrix}$	[illegible] $= \begin{pmatrix} [illegible] & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 22.2

Berechnen Sie

a) die Drehmatrix bei einer Drehung [illegible] 90° [illegible] die [illegible]: $M = \begin{pmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{pmatrix}$

b) die Drehmatrix bei ein[illegible] 45° um die [illegible]: $M = \begin{pmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{pmatrix}$

c) die [illegible] bei ei[illegible] Drehung u[illegible] um die z-[illegible]: $M = \begin{pmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{pmatrix}$

Aufgabe [illegible]

Eigenschaften von Drehmatrizen

Die Betracht[illegible]toren von $M_z = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \underbrace{0}_{\overrightarrow{a_1}} & \underbrace{0}_{\overrightarrow{a_2}} & \underbrace{1}_{\overrightarrow{a_3}} \end{pmatrix}$

[illegible]er Spaltenvektoren

[illegible]eigen Sie anhand der Drehmatrix um die z-Achse durch Berech[illegible]ge bzw. der Länge der Spaltenvektoren, dass gilt: **Alle Spaltenvektoren einer Drehm[illegible]ie Länge 1**.

$\left|\overrightarrow{a_1}\right| = \sqrt{\cos^2\varphi + \text{[illegible]}}$

$\left|\overrightarrow{a_2}\right| =$ [illegible]

[illegible]

b) Orientierung der Spaltenvektoren

Zeigen Sie anhand der Drehmatrix um die z-Achse durch Berechnung der [illegible]ige bz[illegible]er Länge der Spaltenvektoren, dass gilt: **Alle Spaltenvektoren einer Dreh[illegible]rix sin[illegible]e orthogonal.**

Def.: Orthonormale Matrizen

Matrizen, deren Spaltenvektoren normiert und pa[illegible]ise zu[illegible]nder orthogonal sind, nennt man orthonormale Matrizen

$$\vec{a_1} \cdot \vec{a_2} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = -\cos\varphi\sin[illegible]in\varphi\cos\varphi = 0$$

$$\vec{a_1} \cdot \vec{a_3} = \begin{pmatrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{pmatrix} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = 0$$

$$\vec{a_2} \cdot \vec{a}[illegible] \begin{pmatrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{pmatrix} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = 0$$

c) [illegible]rechn[illegible]e Drehw[illegible]ls

D[illegible]Drehwinkel lässt [illegible] über die Sp[illegible] der Matrix berechnen.

Def.: Spur einer Matrix

Die Spur einer Matrix [illegible] die Summe der Elemente in der Diagonalen.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & ... \\ ... & a[illegible] \end{pmatrix} \qquad \text{Spur } A = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

[illegible]er gilt: $\cos\varphi = \frac{[illegible]}{2}$(Spur [illegible] − 1)

Zeigen Sie, dass die Matrix $D = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ [illegible] & 0 & 1 \end{pmatrix}$ eine Drehung [illegible] die z-Achse bewirkt.

---

d) Fixpunktmenge, Kern und Bildmenge bei Drehmatrizen

Fixpunktmenge:	Bei einer Drehmatrix werden nur die Punkte der Drehachse au[illegible] abge[illegible]et. Daher ergibt sich bei der Fixpunktmenge die Drehac[illegible]lso die [illegible]z-Achse als Lösung.
Kern:	Der Kern liefert alle Punkte, die auf den Urs[illegible]g abg[illegible]en. Daher liefert der Kern ebenfalls den Nullvektor, da außer [illegible]Urspr[illegible]elbst kein weiterer Punkt auf den Ursprung abgebildet wi[illegible]
Bildmenge:	Eine einheitliche Bildmenge ist [illegible]bar, da[illegible]der Punkt i[illegible]uell auf einen eigenen Bildpunkt ab[illegible]wird.

Übungen

Ü22.1 Ermitteln Sie für die folgen[illegible] D[illegible]n die Drehmatri[illegible]n. [illegible]eben Sie die [illegible]erte ggf. in Vielfachen von $\sqrt{2}$ o[illegible] $\sqrt{3}$[illegible]

a) 45[illegible] die z[illegible]se $D = \begin{pmatrix} [illegible]s\_\_\_ & -\sin\_\_\_ & 0 \\ \sin[illegible] & \cos\_\_\_ & [illegible] \\ [illegible]0 & 0 & \_\_\_ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \end{pmatrix}$

[illegible] 90° um di[illegible] x-Achse $D = \begin{pmatrix} \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \end{pmatrix}$

c) [illegible] $\begin{pmatrix} \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \end{pmatrix}$

d) 270° um die z-Achse $D = \begin{pmatrix} \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \end{pmatrix}$

[illegible] um die z-Achse $D = \begin{pmatrix} \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \end{pmatrix}$

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Alge[illegible]ra

selbstorganisiert [illegible]rle[illegible]en

Ka[illegible]

Verkettung vo[illegible]
linearen Abbildunge[illegible]

Lineare Gleichungssysteme

Einführung in die Vektorrechnung

Geraden in der Ebene und i[illegible] Rau[illegible]

Eben[illegible]un[illegible]

Lineare Abbildungen

Gesa[illegible]ebra selbstorganisiert erlernen (L[illegible]-031-266)
St[illegible]

[illegible]SelbstVerlag
[illegible]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[illegible]
[illegible]lehrerselbstverlag.de
[illegible]www.f-druck.de

Kapitel 23: Verkettung von linearen Abbildungen

Aufgabe 23.1

a) Für ein Computerspiel soll die dreidimensionale Umgebung einer Burganlage auf 25% der ursprünglichen Größe verkleinert und auf die y,z-Ebene des Monitors projiziert werden. Erläutern und ergänzen Sie die nachfolgenden Rechenschritte:

(1) $A = \begin{pmatrix} 0,25 & [illegible] & 0 \\ 0 & [illegible],25 & [illegible]0 \\ 0 & [illegible] & [illegible] \end{pmatrix}$

(2.1) $E_P:\ x$ [illegible]

$[illegible]x + r\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

(2.2) $x + r = 0$

$r =$ ___

(2.3) [illegible]

$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3) P(4/8/12) [illegible]

[illegible] $0,25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$[illegible] = B \cdot \overrightarrow{p'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

---

(4) $M = B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0,25 \end{pmatrix}$

$M \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0,25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{p''}$

(5) $N = A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0,25 \end{pmatrix}$

(6) $M \cdot \vec{p} = N \cdot \vec{p} = \overrightarrow{p''} \Rightarrow$ [illegible] $B = B$[illegible]

b) Für e[illegible] ande[illegible] sequen[illegible] s[illegible] d[illegible] Burganla[illegible] [illegible]45° um die z-Achse gedreht und dann in [illegible]ße in Richtung [illegible] Geraden $\vec{x} = r\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ auf die y,z-Ebene des Monitors projiziert werden.

Erläutern Sie die nachfolgenden An[illegible]en und Rechenschritte und ergänzen Sie fehlende Angaben:

(1) $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ [illegible] \end{pmatrix}$

(2.1) $E_P:\ x = 0$

$g_P:\ \overrightarrow{x'} = [illegible]\begin{pmatrix}1\\ [illegible]\end{pmatrix}$

(2[illegible]

(2.3)

$$\overrightarrow{x'} = \vec{x} - x\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0+0+0\\2x+y+0\\0+0+z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\vec{x}$$

$$\Rightarrow B = \begin{pmatrix}0&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

(3) P(4/8/12)

$$\overrightarrow{p'} = A \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{[illegible]} & [illegible]\\ 0 & [illegible] & [illegible]\end{pmatrix} [illegible] \begin{pmatrix}-2\sqrt{2}\\ [illegible]\\ [illegible]\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{p''} = B\overrightarrow{p'} = [illegible] \begin{pmatrix}-2[illegible]\\ [illegible]\sqrt{2}\\ 12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\sqrt{[illegible]}\\ [illegible]\end{pmatrix}$$

[illegible]4)

$$M = B \cdot A = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ \frac{3\sqrt{2}}{[illegible]} & [illegible]\frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ [illegible] & 0 & [illegible]\end{pmatrix}$$

$$M \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix}0 & 0 & [illegible]\\ \frac{3\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ [illegible] & [illegible] & [illegible]\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4\\8\\12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\sqrt{2}\\12\end{pmatrix} = \overrightarrow{p''}$$

[illegible]

$$N = A \cdot B = \begin{pmatrix}-\sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

[illegible] $A \cdot B \neq B \cdot A$

---

c) Ergänzen Sie anhand der Ergebnisse aus (6) in Aufgabenteil a) und (5) in Aufg[illegible]enteil [illegible] folgenden Sätze:

Bei einer linearen Abbildung werden, wie im Aufgabenteil a) und b), zw[illegible]bildung[illegible] nacheinander angewendet. Man bezeichnet das als **Verkettung** von [illegible]en. Da[illegible]gilt:

- Die Verkettung zweier linearer Abbildungen kann durch d[illegible]______________ der beiden Abbildungsmatrizen berechnet werden.
- Es gibt Verkettungen, bei denen die Reihenf[illegible]der [illegible]ungen[illegible]eine Rolle[illegible]n diesem Fall sind die Ergebnisse der Produkte A[illegible] und $B \cdot A$________________.
- Es gibt Verkettungen, bei den[illegible]die Ergebni[illegible]rodukte $A \cdot B$ und $B \cdot A$ unte[illegible]chiedlich sind. Bei diesen Verke[illegible]ngen [illegible] die [illegible]enfolge der beiden Abbildungen ______ Rolle.
- Da es Verkettungen [illegible]bei [illegible] $A \cdot B$ [illegible] $B \cdot A$ gilt, muss die ________________, in der die Ab[illegible]ungen[illegible]ewe[illegible]t werden, [illegible]beachtet w[illegible]den.
- W[illegible] die Abbildung A zue[illegible]t u[illegible]d die Abbil[illegible]B danach durchgeführt wird, gilt für die [illegible]te Abbild[illegible]g:

$$\overrightarrow{x'} = A[illegible]$$

$$\overrightarrow{x''} = B\overrightarrow{x'} = B(A\vec{x}) = B \cdot A\vec{x} = M\vec{x} \qquad \Rightarrow M \quad = \_\_\_\_$$

Aus dem Produkt $B \cdot A$ [illegible]rkennt man, dass zuerst [illegible]bbildung A und danach [illegible]ldung B [illegible]t wurde.

Ergänze[illegible]

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Alge ra
selbstorganisiert rle en

Kap

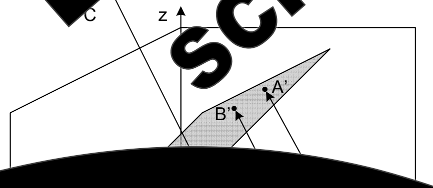
Überblick
lineare Abbildungen A

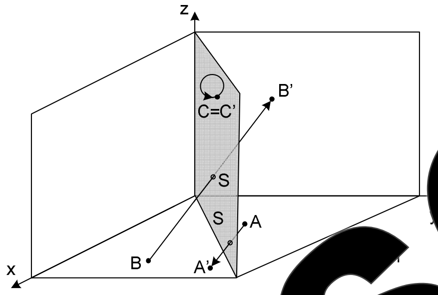
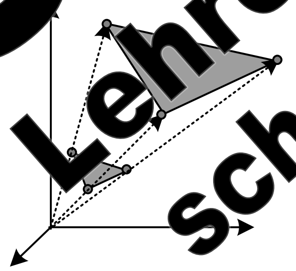
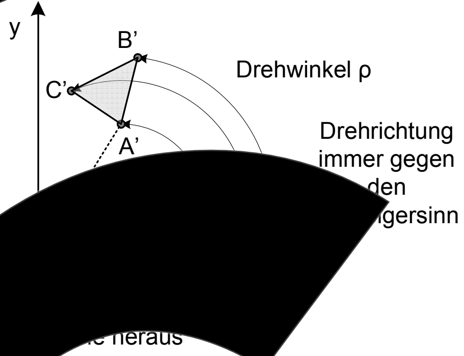
02-031-266

Gesa ebra selbstorganisiert erlernen (-031-266)
S

SelbstVerlag
tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ
lehrerselbstverlag.de
www.f-druck.de

Kapitel 24: Überblick lineare Abbildungen $\mathbf{A\vec{x}=\vec{x}'}$

Abbil-dungsart	Darstellung / Informationen	Eigensch … n der A … matrizen
Allge-meines	Bei einer "linearen" Abbildung $\mathbf{A\vec{x}=\vec{x}'}$ sind Projektionsgeraden und Projektionsebenen sowie Spiegelgeraden und Spiegelebenen immer Ursprungsgeraden bzw. Ursprungsebenen.	Grundlegend … zu … wobei E die Ein … matrix … zu A inverse Matrix angib … **A · E … und** **E · A · E** **… = E … nd** **A⁻¹ … E** **E ·**
Verkettung	Werden zwei Ab … gen nacheinander a … ef … wird die gesamte Abbildu … Produkt der beid … ildungsmatri … beso … ben … im A … nen A · … A … muss die Reihenfolge der A … ige … ntet werden.	Es gilt: Matr … A beschreibt d … te Abbildung, M … B beschreib … die zweite Abbildung, … ann folgt f … Verkettung M: $\mathbf{M=B\cdot A}$
	 	1. … einmalige Abbildung projiziert jeden … nkt P im Raum auf die Projektionsebene. Alle Punkte P' liegen auf der Projektionsebene und sind Fixpunkte. Es gilt: $\mathbf{1. Abbildung: \vec{x}'=A\vec{x}}$ $\mathbf{2. Abbildung: \vec{x}''=A\vec{x}'=A(A\vec{x})=A^2\vec{x}}$ $\Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{A^2=A}}$ 2. Es existiert **keine inverse Matrix A⁻¹**. Beweis: $\text{Wenn } A^{-1} \text{existiert gilt}: A\cdot A^{-1} = E$ $A(A\cdot A^{-1}) = AE$ $(AA)\cdot A^{-1} = A$ $A\cdot A^{-1} = A$ $\Rightarrow$ Widerspruch! 3. D … n von A sind linear abhä … 4. Die Spa … n A liefern die Spannvekt … ktionsebene. 5. Die Bilder de … oren entsprechen den Spaltenve … Ansatz für 1. Sp … $+ s\vec{u}$ etc. 6. Ist ein Spaltenvek … r Nullvektor, so entspricht die Proje … ng der … chtung des entsp … heitsvektors.

Abbil-dungsart	Darstellung / Informationen	Eigenschaften der A … ungsm … zen
Spiegelung	 	1. Wendet man di … bildungs … ix … mal an, so wird jed … X' wie … den ursprünglichen … kt … k abgebildet bzw. z … k vers … h … **1. Abbild … $\vec{x}'$ =** **… ng … $= A\vec{x}' = A(A$ …** $\mathbf{= A^2\vec{x} =}$ … $\Rightarrow \boxed{\mathbf{A^2 = E}}$ 2. W … n A … existiert, … t b … der Spiegelung: $\boxed{\mathbf{A}}$ Beweis … $A\cdot A^{-1} = E$ $A(A\cdot A^{-1})$ … AE (AA) … $= A$ … $= A$ … $\cdot A^{-1} = A$ $A^{-1} = A$
Zentrisch … Streckung aus Ursprung		… e Streckmatrix hat immer die Form: $A=\begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}$ und $A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{u} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{u} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{u} \end{pmatrix}$ Das Abbildungsergebnis ist abhängig von u: u > 1 ⇒ Streckung in Richtung von $\vec{x}$ 0<u<1 ⇒ Verkürzung –1<u<0 ⇒ Spiegelung mit Verkürzung u = –1 ⇒ Punktspiegelung am Ursprung … ⇒ Spiegelung mit Streckung
Drehung	 	… r für Drehung um die z … Form: $M_z = \begin{pmatrix} \cos \ldots \\ \sin\varphi \ldots \\ 0 \quad 0 \ldots \end{pmatrix} \ldots = \begin{pmatrix} \cos-\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos-\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 2. Spaltenvektoren … nge 1. 3. Spaltenvektoren si … orthogonal. 4. Drehwinkel $\cos\alpha = \frac{1}{2}(\text{Spur } A - 1) = \ldots + a_{33} - 1)$ 5. Z … information: … Determinante gilt …

Die Ergebnisse der Berechnung der Fixpunktmenge, des Kerns und der Bild[illegible]enge li[illegible] für jede Abbildung charakteristische Ergebnisse.

Abbil-dungsart	**Fixpunktmenge $A\vec{x} = \vec{x}$**	**Kern $A\vec{x} = \vec{0}$**	**Bildm[illegible] $A\vec{x} = \vec{x}'$**
Definitionen	Die Fixpunktmenge liefert alle Punke, die bei der Abbildung auf sich selbst abgebildet werden.	Der Kern liefer[illegible] Ergebnis die M[illegible] aller Punkte, [illegible] auf d[illegible] Ursprun[illegible] werden.	D[illegible]enge ist nur bestimmbar, wenn der Ort [illegible]er abgebildeten Punkte auf einer [illegible]eraden oder einer E[illegible]liegt.
Ergebnisse bei der Projektion	**Projektionsebene** Erläuterung: Bei der Projekt[illegible] ist [illegible] im R^3 die Ebene [illegible] R^2 die [illegible] auf welche die [illegible] Rau[illegible] bz[illegible] Ebene projiziert werd[illegible] auf [illegible] Pro[illegible]nsebene bzw [illegible]den[illegible]en auf sich se[illegible] abgebildet und bild[illegible] daher die Fi[illegible]ktmenge.	**[illegible]rojektionsge[illegible] durch [illegible]en Urs[illegible]ng** [illegible] Alle [illegible]nkte, die [illegible] [illegible]rojektionsgera[illegible] durch [illegible]en Ursprung [illegible]gen, werden [illegible] Ursprung abgeb[illegible]	**P[illegible]ktionsebene** Erläuterun[illegible] Das E[illegible]nis ist identisch mi[illegible] Fixpunktmenge, da [illegible]menge aller Bildpunke auf der Projektionsebene liegen. Der Ansatz $A\vec{x} = \vec{x}'$ führt auf ein LGS, bei dem durch entsprechende Addition auf der linken Seite 0 entstehen muss. Auf der rechten Seite ergibt sich dann die Gleichung der Projektionsebene.
Ergebnisse bei der Spiegelung	**Spiegele[illegible]e** Erläu[illegible]ung: Alle Punkte auf [illegible] Spiegelebene werden auf sich selbst abgebildet und gehören damit zur [illegible]	**[illegible]rsprung O(0/0/0)** Erläuterung: Alle Punkte außerhalb von E werden auf einen individuellen Punkt außerhalb von E abgebildet. Die [illegible]kte auf E sind Fix- [illegible]mit wird nur der [illegible]uf den [illegible]	**existiert nicht** Erläuterung: Jeder Punkt, außer den Fixpunkten auf der Spiegelebene, hat einen individuellen Bildpunkt. Damit kann man keine Ebene oder Gerade als Bildmenge bestimmen. Bei der Rechnung lässt sich die linke Seite des LGS nicht auf Null bringen.
Ergebnisse bei der zentrischen Streckung	**Ursprung O(0/0/0)** Erläuterung: Nu[illegible]	**Ursprung O(0[illegible]** Erläuterung: Nur der Ursprung wird a[illegible] den Ursprung abgebildet.	**[illegible]istiert nicht** [illegible]erung: [illegible]unkt hat einen [illegible]en Bildpunkt.
Er[illegible]	[illegible] [illegible] Alle Punkte auf der Drehachse sind Fixpunkte.	**Ursprung O(0/0/0)** Erläuterung: Nur der Ursprung wird auf den Ursprung abgebildet.	**[illegible]cht** E[illegible] Je[illegible]at einen indi[illegible]ldpunkt.

Umschlag
Rückseite
(Innen)

(unbedruckt)

Hier können Sie noch Vorlagen einfügen