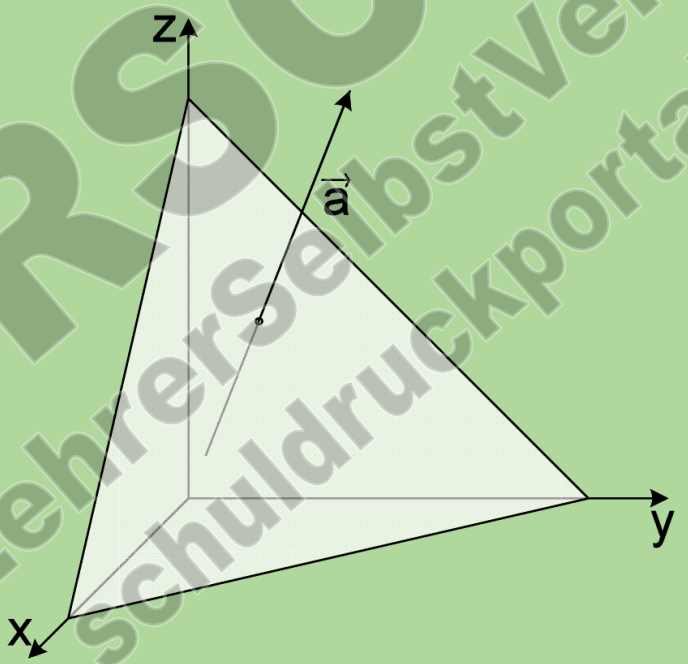
Lineare Algebra
selbstorganisiert erlernen



Ursula Pirkl

LEHRER SELBST VERLAG

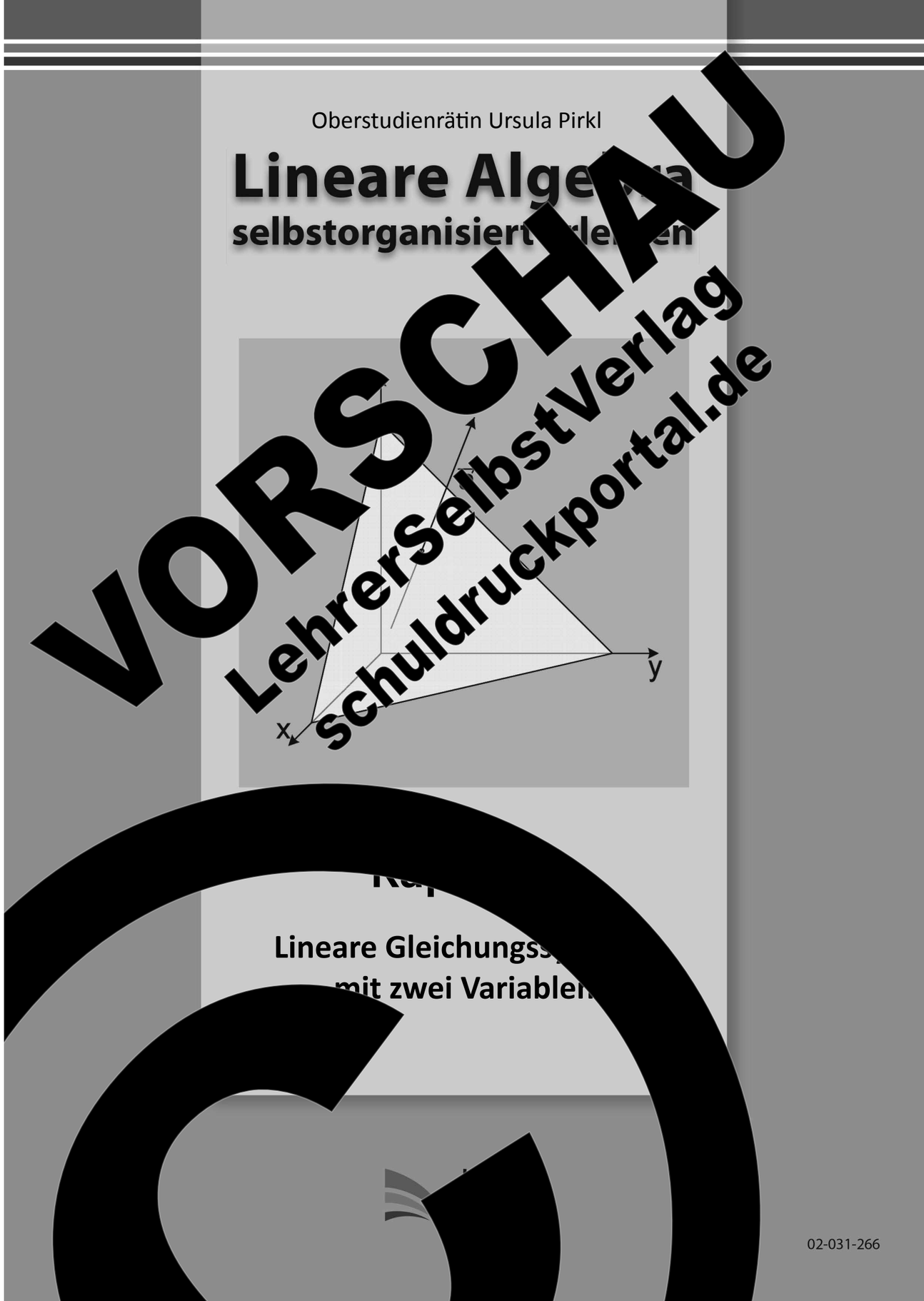
02-031-266

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Umschlag Vorderseite (Innen) (unbedruckt)

Hier können Sie noch Vorlagen einfügen

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de



Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen 9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen 17

Einführung in die Vektorrechnung

Kapitel 3 – Koordinatensysteme 23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu des Vektoren 25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren 33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Lineat 43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und U 47

Geraden in der Ebene und

Kapitel 8 – Parameterdarst 49
Kapitel 9 – Lagebeziehung 55
Kapitel 10 – Skala 59
Kapitel 11 – V 65

Eben

Kapitel 12 – D 69
Kapitel 13 – Be 81
Kapitel 14 – 85
Kapitel 15 – Abstände 99
Kapitel 16 – Schnittw 105
Kapitel 17 – Eben 107

Lineare Abbildungen

Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen 119
Kapitel 19 – 125
Kapitel 20 – 137
..... 143
..... 145
Kapitel 23 – Verkettung von linearen Abbildungen 149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen Ax = x' 153

Gesa bra selbstorganisiert erlernen (L 031-266)
S

rbehalten. A ghts reserved.
K, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

SelbstVerlag
tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ
lehrerselbstverlag.de
www.f-druck.de

Oberstudienrätin Ursula F

Lineare A gebra

selbst ganisiert lernen

e Mathematik

estellnummer 02-031-266

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Stand: 21.07.2014

Alle Rechte vorb[illegible]reserved.
Nachdruck[illegible]altlich der Rechte,
die sic[illegible]nicht gestattet.

L[illegible]
[illegible]eunde GmbH, Koblenz (Germany) 2013
[illegible]erselbstverlag.de

[illegible]www.f-druck.de

Vorwort 5

Vorbetrachtungen 7

Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1
Lineare Gleichungssysteme mit zwei Vari[illegible] 9

Kapitel 2
Lineare Gleichungssysteme mi[illegible]ei Variablen 17

Einführung in die [illegible]orre[illegible]ung

Kapitel 3
Koordinatensysten[illegible] 23

Kapitel 4
Grund[illegible]nde[illegible] des [illegible] 25

Kapite[illegible]
[illegible]hnen [illegible]ektor[illegible] 33

Kap[illegible]
Löse[illegible] Vek[illegible]rgleichung[illegible] bei Linearkom[illegible]tionen 43

Kapite[illegible]
[illegible]bhängigke[illegible] und Unabhän[illegible]it 47

Geraden i[illegible]er Ebene u[illegible] Raum

Kapitel [illegible]
Parameterdarstellung [illegible] Geraden 49

Kapitel 9
Lagebeziehung von Geraden 55

Kapitel 10
Ska[illegible] 59

[illegible] 65

Ebenen im Raum

Kapitel 12
Darstellung von Ebenen 69

Kapitel 13
Besond[illegible] 81

[illegible]en 85

[illegible] 99

[illegible]pitel 16
Schnittwinkel 105

Kapitel 17
Ebenenscharen 107

Lineare Abbildungen

Kapitel 18
Grundlegendes zu Matrizen ..... [illegible]

Kapitel 19
Projektion 125

Kapitel 20
Spiegelung 137

Kapitel 21
Zentrische Streckung aus dem Urspru[illegible] ..... [illegible]43

Kapitel 22
Drehungen ..... 14[illegible]

Kapitel 23
Verkettung von linearen [illegible]bild[illegible] 149

Kapitel 24
Überblick linear[illegible]dungen $A\vec{x}$ = ... 153

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Vorwort

Die Konzeption des vorliegenden Arbeitsbuches beruht auf meinen langjährigen Unterrichtserfahrungen in der Oberstufe von beruflichen Gymnasien in Südhessen. Im Mittelpunkt der Zielsetzung steht hier, den Schülerinnen und Schülern einen übersichtlichen Weg durch die Vielfalt der Methoden und Lösungswege in der linearen Algebra aufzuzeigen. Demzufolge haben die einzelnen Kapitel eine zusammenhängende, aufeinander auf[illegible]de Struktur, wobei für die jeweilige Prob[illegible]stellung meist nur ein Lösungsweg zum Ansatz [illegible]mmt. Ergänzt durch Übungsaufgaben [illegible]hulb[illegible]rn oder anderen Quellen, erhalte[illegible] die Schülerin[illegible] und Schüler einen umfassende[illegible]er die im Inhaltsverzeichnis a[illegible]teten Theme[illegible]ie im Wesentlichen den A[illegible]gen [illegible]sischen Landesabiturs im [illegible]d- [illegible] Leistungskurs entsprechen.

Die For[illegible] A[illegible]eng[illegible]ung stellt eine Anleitung fü[illegible]lbstorg[illegible]erte Lernformen [illegible]r. In der P[illegible] b[illegible] sich [illegible]teams, in de[illegible] die Schülerin[illegible] un[illegible]n Dialog die[illegible]nhalte überw[illegible]gen [illegible]lbständig erarbeiten. H[illegible]fig kommuni[illegible] [illegible]eams in den Le[illegible]uppen, in de[illegible] diese Le[illegible]praktizier[illegible] wird und zum Sta[illegible]d geworden ist, auch untereinander und tatsächlich Erkenntnisse sowie Einsichten zur The[illegible]tik aus. Während leistungsstärkere Teams die Aufgabenstellungen und zusätzliche Übungen in der Regel ohne weitere Hilfe bewältigen und [illegible] bietet diese Unte[illegible] den [illegible]

[illegible]ng ihrer Kompetenzen zu [illegible]e Aufgabenstellungen erfordern zudem, [illegible]g dargestellte Sachverhalte oder Zusammenhänge zu beschreiben sowie Ansätze zu begründen. Dadurch werden neben rein themenspezifischen auch sprachliche Kom[illegible]ichtlich der Verwendung der [illegible]. Lehrerzentrierte [illegible]el nur noch zu Be[illegible] Wiederholung und [illegible]esprechung von H[illegible]att. Damit wird [illegible]en Erkenntnissen [illegible]ie und den daraus resultierenden For[illegible] selbstorganisierte Lernformen einzuset[illegible]mfänglich Rechnung getragen.

Oberstudienrätin Ursul[illegible]

Kommentare vo[illegible]hülerin[illegible]n und Schülern

„Ich finde [illegible]ass man, wenn man mal krank ist, zu[illegible]aus[illegible]beitsbuch nachvollziehe[illegible]nn, w[illegible] Unterricht gemacht wurde. Dan[illegible]t ma[illegible]e Chance, anschließend ohne [illegible]der [illegible]itarbeite[illegible]zu können.“

[illegible] finde es gut, k[illegible]los[illegible] Blätter zu haben. M[illegible]erliert kein[illegible] Seiten und hat am Schluss alles übersichtlich und komplett.“

Zielgruppe

Die Unterlagen sind primär für den Unterricht im Grund- und Leistungskurs in der gymnasialen Oberstufe entwickelt worden, können aber auch an allen Einrichtungen, in denen die allgemeine Hochschulreife erworben werden kann, eingesetzt werden.

Ebenfalls ist das Konzept für Fachoberschulabsolventen geeignet, die an Hochschulen bzw. Fachhochschulen einen Studiengang wählen, der Mathematik beinhaltet. Angehende Studentinnen und Studenten, die keine oder nur sehr geringe Kenntnisse im Bereich der Linearen Algebra haben, können sich selbständig oder im Rahmen von Vorbereitungskursen in die für das Studium notwendige Thematik einarbeiten.

Auch im Bereich der Nachhilfe im Fach Mathematik [illegible]er Einsatz der Lern- und Arbeitsmaterialien vor[illegible]eignet, da die Unterlagen die Bedürfnisse [illegible]e „Zugangsproblem in Mathematik“

Metho[illegible]daktische Anmerku[illegible]

Die Unterlagen [illegible]ausgerichtet, dass die Schülerinnen und [illegible]tgehend eigenständig und individuell in [illegible]aber auch zu Hause die einzelnen Them[illegible]n sowie bei Fehlzeiten nacharbeiten kön[illegible]ausaufgaben kann de[illegible] zeitliche Rahmen [illegible]esteuert werden, [illegible]alle vom Lehrpla[illegible]iebenen Themen [illegible]ufe des zur Verf[illegible]enden Halbjahres [illegible]itet werden kön[illegible]

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Da alle Kapitel aufeinander aufbauen, ist eine lückenlose Bearbeitung der einzelnen Aufgaben notwendig. Auf eine vollständig umfassende Theorie der linearen Gleichungssysteme wird zugunsten einer exemplarischen und anschaulichen Darstellung der Thematik verzichtet. Die hier angeführten Beispiele orientieren sich überwiegend an Bedürfnissen, die sich aus den Aufgabenstellungen der folgenden Kapitel ergeben.

Die Gestaltung der Unterlagen ermöglicht es, das Erläuterungen, Erkenntnisse und Ergebnisse v ständig in das Arbeitsbuch hineingeschrieben w den, sodass keine unübersichtlichen lo sammlungen entstehen und alle

ohne Suchaktionen schnell nachges en werden können. Die Lösungen zu Aufgabe d Übungen des Arbeitsbuchs werde eine stellung automatisch als P mit g die Unterlagen ergänzen buch eingesetzt werden, sind a Stellen, de spielsweise weitere Vertie durc ngsaufgaben gewünscht sind Platzha ein gt worden, dass Verweise de Lehrer auf z tzliche Übungsaufga bersic h notiert w können.

Anregung nd Verbes gswünsche zu diesem Arb buch werden erne entgeg enommen und nen de Verlag per Mail r der Adresse ce@leh stverlag.a zugesendet werden.

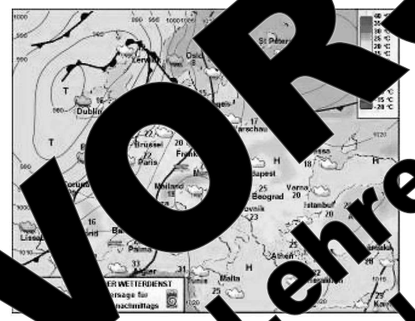
VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Vorbetrachtungen

Der Bezug zur Realität ist im Fach Mathematik häufig die Voraussetzung für d zepta Neues zu lernen. Daher sollen an dieser Stelle, bevor der Einstieg in das Then eare A em sehr abstrakt und anwendungsfremd erscheinenden Gebiet der linearen ssyst erfolgt, zunächst einige Beispiele für praktische Anwendungen erläutert werden.

Vektoren in der Physik

Der der aus dem Physikunterricht bekannte Begriff d Vektors spielt eine zentrale Rolle in der linearen Algebr Sie sicherlich wissen, besitzen alle Größen e Richtung haben, einen vektoriellen Charak Dies bedeute beispielsweise bei Kräften, die in unterschi che Richtungen wirken, dass man die Be ge nicht einfa addieren darf.



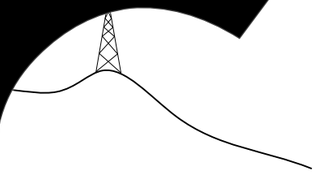
Wetterkarte und lineare Algebra

Die rstellung von Wetterkarten mit der Berechnung von Windstärke, Windrichtung und der Bewegung der Tief- und Hochdruckgebiete basiert auf der Anwendung Vektorrechnung.

Computerspiele programmieren

Bei der Progr d der dreidi einem z

g bzw. der linearen Algebra au n Eindruck passenden Stellen des Bildschi iert.



Flugsicherung

Die Berechnung von und Abständen b Flugbewegungen nfalls zusätzlich r der Einbeziehu richtung, wird lfe der linearen A . der rechnung ermö

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Raum für Notizen

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Kapitel 1: Lineare Gleichungssysteme 2. Ordnung

Allgemeines

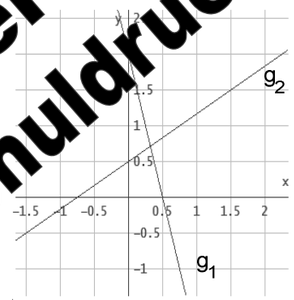
Der Umgang mit linearen Gleichungssystemen (LGS) gehört zu den [illegible]den Arbeitstechniken der linearen Algebra. Neben vielseitiger Verwendung bei Anwe[illegible]ungsp[illegible]em[illegible]en Sie lineare Gleichungssysteme bereits aus Schnittpunktberechnungen Gerad[illegible]er auch aus Rekonstruktionsaufgaben von ganzrationalen Funktionen. In[illegible]m K[illegible]el werden lineare Gleichungssysteme zunächst anhand von Schnittp[illegible]rob[illegible]i G[illegible]aden in der Ebene behandelt, um die Bedeutung von Lösungen möglichst anschau[illegible]uste[illegible]Im weiteren Verlauf des Kurses werden Sie feststellen, dass die Lösungen v[illegible]aren[illegible]chungssystemen[illegible]ch noch andere, auf den jeweiligen Kontext der Aufgabenstellung b[illegible]gene, Bede[illegible]en haben können.

Aufgabe 1.1

Bekanntes aus neuem Blick[illegible]ttpunktproblem bei Geraden[illegible]der Ebene

Verdeutlichen Sie sich[illegible]d der f[illegible]n Beisp[illegible]die Schreibweisen im Umgang mit linearen Gleichungssyste[illegible]inde[illegible]Sie die [illegible]echnungen für die drei dargestellten Fallbeispiele nachvollziehen und anschließend [illegible]sung verv[illegible]tändigen.

a) Beis[illegible]i Ge[illegible]n schneide[illegible]ic



ittpunktproblem in der Schreibweise der linearen Algebra

gebildeten Geraden werden der Analysis Funktionsschreibweise bzw. mit y links von Gleichheitszeichen dargestellt.

Gerade g_1: $y = -4x + 2$

Gerade[illegible]

ebra können Gleichungen für Ge[illegible]e wie folgt vorliegen, wobei je nach L[illegible]nd y als x_2 bezeichnet werden k[illegible]ebildeten Geraden gilt dann:

Gerade g_1: $4x_1$[illegible]der $4x + y = 2$

Gerade g_2: $4x_1 - 6x_2$[illegible]r $4x - 6y = -3$

Umformen der Gerade II

$y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4x - 6y = -$[illegible]

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

In der Analysis werden Schnittpunkte in der Regel durch Gleichsetzen berechnet:

$$g_1 = g_2$$
$$-4x + 2 = \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}$$
$$\frac{14}{3}x = \frac{3}{2}$$
$$x = \frac{9}{28} \approx 0{,}32$$

Einsetzen von x in eine der beiden Gleichungen liefert $y = \frac{5}{7} \approx 0{,}71$

In der linearen Algebra löst man die Gleichungssysteme meist mit Hilfe des Additionsverfahrens oder Einsetzungsverfahrens. Für dieses Beispiel bietet sich das Additionsverfahren [illegible] man die zweite von der e[illegible]chung [illegible]rahiert:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 4x + y \\ \text{II} & 4x - 6y = \end{array} \quad \text{I} - \text{II}$$

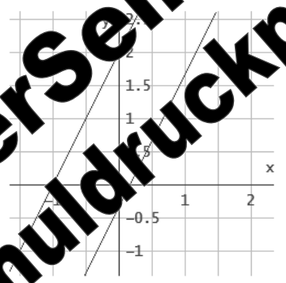
[illegible] $y = \frac{[illegible]}{7} = 0{,}71$

[illegible]etze[illegible] y in eine der beiden Gleichungen liefert wie [illegible] Gleichsetzungsverfahren der Analysis

$$[illegible] = x + [illegible] \frac{9}{28} \approx 0{,}32$$

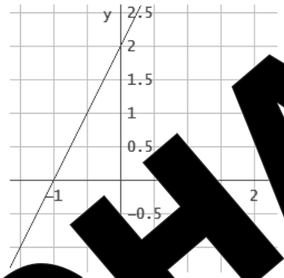
Der Begriff Additionsverfahren wird auch verwendet, wenn man die Gleichungen subtrahiert.

b) Beispiel 2: Zwei Ge[illegible]n sind parallel



Schreibweise in der Analysis	Schreibweise in der linearen Algebra
Die Abbildung [illegible]	Die beiden abgebildeten Geraden können auch [illegible]folgt dargestellt werden.
[illegible] $\frac{[illegible]}{3}$	[illegible] $= 2$
Schnittpunkt durch Gleichsetzen berechnen: $2x + 2 = 2x + \frac{1}{3}$ aus: $2 = \frac{1}{[illegible]}$	Mit Hi[illegible]erfahrens erhält man hier analo[illegible]tzungsverfahren einen Widerspruch [illegible]
Wen[illegible]uch er[illegible].	$\begin{array}{ll} \text{I} & -2x + y = 2 \quad \vert \cdot 3 \\ \text{II} & 6x - 3y = 1 \\ \hline \text{I} & -6x + 3y = 6 \\ \text{II} & 6x - 3y = 1 \quad \vert \text{I} + \text{II} \\ \hline & 0 = 7 \end{array}$ Wenn das Additionsverfa[illegible]em Widerspruch führt kann m[illegible]ext der Aufga[illegible]nstellung auf para[illegible]en s[illegible]

c) Beispiel 3: Zwei Geraden sind identisch



Schreibweise in der Analysis	Schreibweise in der linearen Algebra
Bei zwei identischen Geraden [illegible] in der Analysis auch identische [illegible]chungen vor: g_1: $y = 2x$ [illegible] g_2: $y = 2x +$ [illegible] [illegible]erk[illegible]sofo[illegible]ss man durch [illegible]ichsetz[illegible]ie Lösung $2 = 2$ oder $0 = 0$, also [illegible] allgem[illegible]gültige Lösung erhält. D.h. bei V[illegible]r Lösung in dieser Form kann man [illegible] schließen, dass die beiden Geraden identisch sind. Damit ist das LGS für unendlich viele W[illegible] von x und y lösbar, da jeder Punkt auf der Geraden Lösung für das LGS ist.	Bei zwei identischen Geraden können sich die Gleichungen in der linearen Algebra durch ein Vielfaches unterscheiden: g_1: $-2x - y = 2$ g_2: $4x + 2y = -4$ Mit Hilfe des Additionsverfahrens erhält man, wie links nebenan, den allgemeingültigen Ausdruck $0 = 0$ und die gleiche Interpretation für das Ergebnis.

Zusammenfa[illegible] Gleichungssystemen mit 2 Gleichungen und 2 Vari[illegible]

[illegible]nn es

[illegible] _____ Lösung für jede der beide[illegible]

[illegible] _____ Lösung geben, da bei der Rechnung ein W[illegible]ht, und

3. _____ viele Lösungen geben.

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Aufgabe 1.2

Allgemeine Betrachtungen zu linearen Gleichungssystemen mit zwei Variablen und mehr als zwei Gleichungen

Die Lösungsansätze vieler Aufgaben in der linearen Algebra führen auf lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen aber mehr als zwei Gleichungen. Man bezeichnet solche Gleichungssysteme auch als **überbestimmte** lineare Gleichungssysteme. Veranschaulichen Sie sich an den folgenden Beispiele, wie die Lösung schrittweise berechnet wird und was dabei beachten werden muss. Übertragen Sie Ihre Überlegungen jeweils auf die Aufgabenstellungen in folgenden Übungsaufgaben:

Beispiel 1: Überbestimmtes LGS mit eindeutiger Lösung

Schritt 1:
Die gegebenen Gleichungen mit den römischen Ziffern und kennzeichnen und notieren, dass gleiche Variablen untereinander stehen.

Schritt 2:
Zu lösen ist das LGS mit zwei Variablen bei [illegible] zwei Gleichungen. Daher lässt man für die Ermittlung von x und y eine der Gleichungen zunächst völlig außer Acht. Man wählt am günstigsten [illegible] Gleichung mit Zahlenwerten aus, die keinen umfangreichen Rechenaufwand erwarten lässt. Hier wird die Gleichung I zunächst weggelassen.

Schritt 3:
Rechts neben den Gleichungen angeben, welche Gleichungen addiert oder subtrahiert werden.

I	$2x - 4y = 4$	
II	$x - y = 1$	
III	$x + y = -3$	II + III
IV	$2x = -2$	
	$x = -1$	

Schritt 4:
Additionsverfahren mit den zwei ausgewählten Gleichungen.

Schritt 5:
Di[illegible] $y = -3$
[illegible] -2

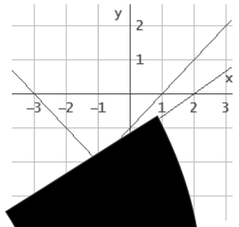
[illegible] Addition [illegible] endet wurde, [illegible] berechnet werden. Man könnte auch Gleichung II nehmen.

x und y in I einsetzen: [illegible] $= 4$
[illegible] 4

Lösung: (–1/–2)

Schritt 6:
Beide [illegible] die [illegible] G[illegible] setzt werden. [illegible] ung erfüllt, gibt [illegible] ung für das LGS.

Geometrische Deutung [illegible]
Lösung:



[illegible] en schneiden [illegible] kt S(–1/–2).

Beispiel 2: Überbestimmte lineare Gleichungssysteme ohne Lösung

Oftmals hängen die notwendigen Schritte bei der Lösung von Gleichungssystemen davon ab, welche Gleichungen für das Additionsverfahren verwendet werden und welche Gleichungen zunächst weglässt. Dies soll durch die Lösungswege 1 und 2 für die folgenden linearen Gleichungssysteme verdeutlicht werden. Die einzelnen Lösungsschritte erfolgen analog zum Beispiel 1.

Lösungsweg 1:

I	$-2x + 4y = 6$	I zunächst weglassen
II	$x - 2y = 3$	
III	$3x + 2y = 1$	II + III
IV	$4x = 4$	
	$x = 1$	

x in II einsetzen: $-2y = 2$
[illegible]

x und y in I einsetzen: [illegible] $+ 4(-1) = 6$
$-2 - 4 = 6$
$-6 = 6 \Rightarrow$ Widerspruch

Lös[illegible] **keine**

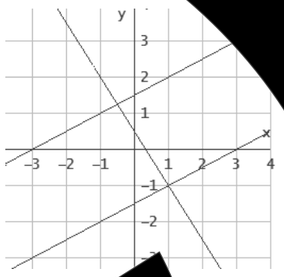
Bei einem überbestimmten LGS müssen die mit zwei Gleichungen ermittelten Lösungen immer in der nicht verwendeten Gleichung getestet werden.(Vgl. Schritt 5 bei Beispiel 1) Bei einem Widerspruch ist das gesamte LGS nicht lösbar.

Lösungsweg 2:

I	$-2x + 4y = 6$	
II	$x - 2y = 3$	I + 2II
III	$3x + 2y = 1$	[illegible] zunächst weglassen
IV	[illegible]	

[illegible] nach Wahl der Gleichungen kann der Widerspruch auch sofort auftreten.

Geometrische [illegible]
Lösung:



[illegible] t keinen gemein- [illegible] Schnittpunkt, da [illegible] raden parallel

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Beispiel 3: Überbestimmte LGS mit unendlich vielen Lösungen

$$\begin{array}{lrl|l} \text{I} & -2x+4y & =-6 & \\ \text{II} & x-2y & =\ \ 3 & \\ \text{III} & 3x-6y & =\ \ 9 & 3\text{II}-\text{III oder I}+2\text{II oder }3\text{I}+2\text{III} \\ \hline \text{IV} & 0 & =0 & \end{array}$$

Je[illegible] Additio[illegible] Su[illegible] führt zum Erg[illegible] alle drei Gleic[illegible] identisch sind.

Da alle drei Gleichungen identisch sind, steht [illegible] dem [illegible]blem, nur eine Gleichung für die Bestimmung von x und y zu haben. Wie Sie [illegible]erlich bereits [illegible]en, benötig[illegible] für die Bestimmung von zwei Variablen auch zwei [illegible]chungen [illegible]ie folgenden Überlegungen zeigen, wie man vorgehen kann, um dieses Problem zu [illegible].

Ermittlung einer allgemeingültige[illegible]

y frei wählen: [illegible] = r

y in II einsetzen [illegible] x = [illegible] + 2r

Lösung: (3 [illegible] 2r / r)

Info:
[illegible] unendlich [illegible] Lösungen geben kann, wählt man als Lösung für y eine beliebige Z[illegible] Form eines **Parameters** $r \in \mathbb{R}$.

[illegible]:
Ma[illegible]net diese Lösung auch als parametrisierte Lösung, [illegible] sie vom Parameter r abhängt. Parametrisierte Lösungen hängen von der Wahl des Paramters ab und können damit unterschiedlich sein.
Wählt man, wie in d[illegible]
x = r , ergi[illegible]

Alternative Lösung:

x frei wählen: $x = r$

x in II einsetzen:
$$\begin{aligned} r-2y &= 3 \\ -2y &= 3-r \\ y &= \tfrac{1}{2}r-\tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

[illegible]: $(r \,/\, \tfrac{1}{2}r-\tfrac{3}{2})$

Geometrische Bedeutung der parametrisierten Lösung:

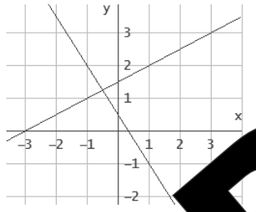
Fasst man jed[illegible]GS als Geradengleichung au[illegible]es sich um die gleichen G[illegible]en identisch sind. Formt man jed[illegible]ngen in die aus der [illegible]um erhält man für alle drei Gleichung[illegible]. Ein Verg[illegible]ametrisie[illegible]sung bei alternativer Lösung mit der Wa[illegible]zeigt, dass sic[illegible]g bei y der gleiche Ausdruck wie für die Gerade ergibt. Dara[illegible]htlich, dass e[illegible]sierte Lösung eine Gerade beschreiben kann.

Beispiel 4

Im folgenden Beispiel entsteht durch Addition von Zeile I und II ein Ausdruc[illegible] Form [illegible]. Begründen Sie anhand der Abbildung und durch Vervollständigung des Textes, warum es [illegible]trotz[illegible] eine eindeutige Lösung gibt, die als Schnittpunkt von drei Geraden inte[illegible] werde[illegible]

$$\begin{array}{lrl|l} \text{I} & -2x+4y & =\ \ 6 & \text{I}+2\text{II} \\ \text{II} & x-2y & =-3 & \\ \text{III} & 3x+2y & =\ \ 1 & \text{III zunächst weglassen} \\ \hline \text{IV} & 0 & =0 & \end{array}$$

Bei ei[illegible] überb[illegible] LGS bedeut[illegible] 0 = [illegible]eile nicht, dass [illegible]unen [illegible]iele [illegible]ungen gibt, da [illegible]ssen Gleich[illegible]gen no[illegible]rücksi[illegible]gt werden [illegible]en.



Gleichung I u[illegible]leichun[illegible] repräsentieren [illegible] _____ Gerade.
Die [illegible] Gera[illegible] so _____ un[illegible]gen über-ei[illegible]iden Geraden [illegible]ben daher genau einen _____ _____ der Gerade[illegible]ie durch Gl[illegible]g III repräsentiert wird.
[illegible]eser [illegible]punkt i[illegible] _____ des LGS.

$$\begin{array}{lrl|l} \text{I} & -2x+4y & =\ \ 6 & \text{I zunächst weglassen} \\ \text{II} & x-2y & =-3 & \\ \text{III} & 3x+2y & =\ \ 1 & \text{II}+\text{III} \\ \hline & x & =-\frac{1}{2} & \end{array}$$

W[illegible] bei einem überbestimmten LGS eine 0= 0 Zeile entsteht, muss man das Lösungsverfahren mit anderen Gleichungen neu beginnen.

[illegible]etzen in II lie[illegible] $y = \frac{5}{4}$. Damit ist (–0,5 / 1,25) die Lösung des LGS.

Übungen:

Prüfen Sie, ob die [illegible]ungssysteme eine eindeutige oder eine parametrisierte Lösung b[illegible]e Lösung und ordnen Sie die Lösungen den Abb[illegible]en Beispielen dargestellt, auf eine

[illegible] $y = -2$
[illegible]$x - y = -1$
$x + 2y = 9$

(Lösung: (1/4))

b) $x + 2y = 8$
$-x + 3y = 6$
$2x + y = 4$

(Lösung: keine)

[illegible]
7x[illegible]

(Lösung: [illegible]

d) $4x + 2y = 8$
$2x = 4 - y$
$3y = 12 - 6x$

(Lösung: (r / 4-2r))

Abbildun[illegible] 2

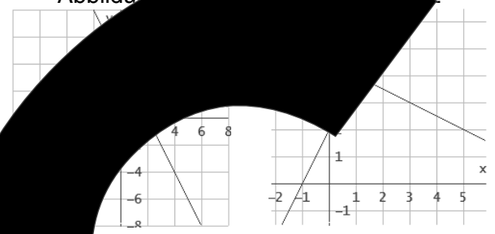
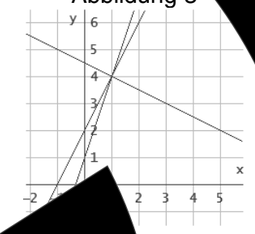
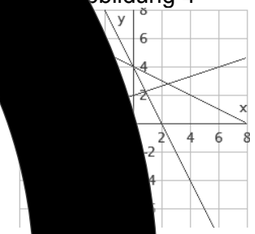


Abbildung 3



[illegible]bbildung 4



[illegible]r Rechnungen auf der folgenden Se[illegible]

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Erg ungen:

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Alge a
selbstorganisiert rle en

Ka

Lineare Gleichungss
mit drei Variablen

02-031-266

Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen 9

Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen 17

Einführung in die Vektorrechnung

Kapitel 3 – Koordinatensysteme 23

Kapitel 4 – Grundlegendes zu des Vektoren 25

Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren 33

Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Linea[r]mation 43

Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und U[n]gigkeit 47

Geraden in der Ebene und [im] Rau

Kapitel 8 – Parameterdarst[ellu]ng von Gera[den] 49

Kapitel 9 – Lagebeziehung [zwischen] 55

Kapitel 10 – Skalar[produkt] 59

Kapitel 11 – V[ektor]- od[er] Kreuzprodukt 65

Eben[en im] Raum

Kap[itel] 12 – D[arst]ellung von Ebenen 69

Kap[itel] 13 – Be[sond]ere Ebenen 81

Kapitel [14] – Beziehungen zwei Ebenen 85

Kapitel 15 – Abstände 99

Kapitel 16 – Schnittwinkel 105

Kapitel 17 – Ebenenscharen 107

Lineare Abbildungen

Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen 119

Kapitel 19 – [...] 125

Ka[pitel] [...] 137

[...] 143

[...]ehnungen 145

Kapitel 23 – Verkettung von linearen Abbildungen 149

Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen Ax = x' 153

Gesa[mt] [...]ebra selbstorganisiert erlernen (L[...]-031-266)

S[...]

[...]rbehalten. A[ll] rights reserved.

[...]k, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
[...] aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

[...]SelbstVerlag
[...]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[any]
[...]lehrerselbstverlag.de
[...]www.f-druck.de

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Kapitel 2: Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen

Erweitert man die Betrachtungen der Ebene auf den dreidimensionalen Raum, kommt [zu] den Richtungen x und y eines Koordinatensystems in der Ebene die dritte Richtung [...] des Raum hinzu. Damit entstehen bei Aufgabenstellungen der linearen Algebra Glei[chungs]systeme, [mit] drei Variablen enthalten können. Im Folgenden werden die für lineare Gleichungss[yste]me [mit] zwei Variablen erfolgten Untersuchungen auf die Betrachtung von linearen Gleichu[ngs]system[en] [mit] drei Variablen erweitert.

Um die Lösungsverfahren, wie bei den Geraden der Ebene, [...]hst [an]schaulich zu deuten, sollen die bei der Lösung eines LGS erhaltenen Ergebnisse g[eo]metrisch gedeutet werden. Gleichungen der Form ax + by + cz = d oder ax + by = c oder ax + bz = c, kö[nnen] als Ebenen im Raum aufgefasst werden. Damit kann man hier, entsprechend zu Ge[rade]n der Ebene, das Lösen von [...]achen Gleichungssystemen als Schnittpunktprobleme von E[be]nen im Raum betrachten.

Aufgabe 2.1

Wie in der Ebene können auch [...] der Lösung ei[nes] LGS die Möglichkeiten keine Lösung, genau eine Lösung und [...] parametrisierte Lösung auftreten. Man muss allerdings die Interpretation der Lösung auf die [...] Ebene[n] [im] Raum übertragen.

① Keine Lösung deutet darauf hin, dass die betrachteten Ebenen keinen gemeinsamen Punkt haben.

② Eine eindeutige Lösung bedeutet, dass sich die betrachteten Ebenen genau in einem Punkt schneiden.

③ Eine parameterisierte Lösung bedeutet, dass es unendlich viele Lösungen gibt, die als gemeinsame Schnittgerade der betrachteten Ebenen aufgefasst werden können.

[Zur] Veranschaulichung der drei Lösungsmöglichkeiten von linearen Gleichungssystemen im R[aum] [...] ordnen die Lösungsziffern ①, ② und ③ zu.

Abb. 2.1.1

Abb. 2.1.2

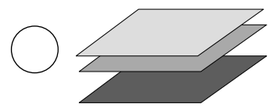


Abb. 2.1.3

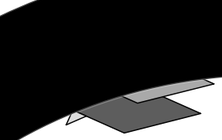


Abb. 2.1.4

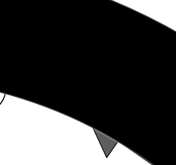


Abb. 2.1.5

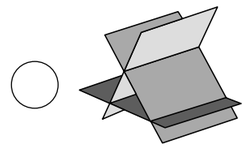


Abb. 2.1.6

Aufgabe 2.[2]

Gleich[ungssysteme] [mit] [...]ungen, drei Variablen und genau[er] [Lö]sung

Bei [der] [...]nearer Gleichungssysteme höherer Ord[nung] [kann] man systematisch v[or]gehen. Eine Möglichkeit hierzu stellt das Additionsverfahren nach Gauß [dar], [das] auch genannte **Gauß-Verfahren** [...]ar.

[Machen] Sie sich anhand des folgenden Beispi[els] [die] hier verwendete v[or]gehende Abwandlung [des] Verfahrens, und lösen Sie anschließend an[hand] [der] Übungsaufgabe

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Beispiel:
$$\begin{aligned} 2x + y + 3z &= -3 \\ x - y - z &= 4 \\ 3x - 2y + 2z &= 5 \end{aligned}$$

Lineare Gleichungssystem mit dem Additionsverfahren lösen:

Schritt 1:
Die Gleichungen fortlaufend durchnummerieren

Schritt 2:
Gleichung I mit den Gleichungen II und III so addieren oder [illegible], dass die Variable [illegible]

Schritt 3:
Mit den Gleichungen IV und V wie bei einem LGS mit zwei Variablen weiterrechnen und damit eine der [illegible] verbleibenden Variablen eliminieren.

Schritt 4:
Das Ergebnis, je nach Rechenaufwand in die Gleichung IV oder V einsetzen und die nächste Variable berechnen.

Schritt 5:
Beide Ergebnisse in die erste Gleichung einsetzen und die Variable x berechnen.

Es existiert eine eindeutige Lösung. Die Lagebeziehung der Ebenen entspricht damit der Abb. 2.1.1

I	$2x + y + 3z = -3$	
II	$x - y - z = 4$	I + II
III	$3x - 2y + 2z = 5$	I + III
IV	$3y + 5z = -11$	
V	$7y + 5z = -19$	I + V
VI	$-4y$ [illegible] $= -2$	

y in IV [illegible]en
$$\begin{aligned} 3 \cdot (-2) + 5z &= -11 \\ -6 + 5z &= -11 \\ 5z &= -5 \\ z &= -1 \end{aligned}$$

[illegible]nd y [illegible]etzen
$$\begin{aligned} 2x - 2 + 3 \cdot (-1) &= -3 \\ 2x - 2 - 3 &= -3 \\ 2x &= 2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

[illegible]ng: (1/–2/–[illegible])

Übungen:

Ü2.1 Lösen Sie die folgenden [illegible] Gleichungssysteme:

a) [illegible]

[illegible]ontrolle
[illegible] (4/3/2)

b)
$$\begin{aligned} 5x - 3y + z &= 19 \\ 2x + 3y + z &= 4 \\ x - 2z &= 1 \end{aligned}$$

Zur Kontrolle:
(3/–1/1)

Lineare Gleichungssysteme ohne Additionsverfahren lösen

Kommen in einem LGS in jeder Zeile nicht alle Variablen vor, so kann man die Lösung oft auch ohne Additionsverfahren ermitteln.

Gegeben ist das folgende LGS

Zeile 2 liefert schon das Ergebnis für y.

I $3x - 5y$ [illegible]
II [illegible]

[illegible] einsetzen in III:
$$\begin{aligned} 2x + 2 &= 0 \\ 2x &= -2 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

y und x einsetzen [illegible]
$$\begin{aligned} [illegible]1) - 5 \cdot 2 - 2z &= -1 \\ -10 - 2z &= -1 \\ -2z &= 12 \\ z &= -6 \end{aligned}$$

[illegible] / 2 / –6)

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Ü2.2 Lösen Sie das folgende LGS ohne Anwendung des Additionsverfahrens

$$\begin{aligned} 2x + 3z &= 3 \\ 4x &= 6 \\ 2x + 3y - 2z &= 2 \end{aligned}$$

Zur Kontrolle:
$\left(\frac{3}{2} / -\frac{1}{3} / 0\right)$

Aufgabe 2.3

Gleichungssysteme mit drei Gleichungen, drei Variablen und keiner Lösung

Genau wie bei linearen Gleichungssystemen mit zwei Variablen kann es bei der Lösung eines linearen Gleichungssystems mit drei Variablen zu Widersprüchen kommen. Das LGS ist dann nicht lösbar.

Zeigen Sie durch Ergänzen der folgenden Rechnung, dass ein Widerspruch entsteht und das LGS nicht lösbar ist.

I	$x + 2y - z = 1$	
II	$x + y$	
III		en
	$y - z = 1$	IV – III
	___ = ___	⇒ Widerspruch, ke

Es existiert keine Lösu
Lagebeziehung der Eben
damit der Abb. 2.1.3 oder
2.1.6 entsprechen.

Aufgabe 2.4

Gleichungssysteme mit drei Variablen und unendlich vielen Lösungen

Abbildung 2.1.5 zeigt drei Ebenen, die als gemeinsame Punkte ein geraden. Das bedeutet, dass es unendlich viele Punkte gibt, die gleichzeitig zu allen drei Eb n. Interpretiert man jede der drei Gleichungen eines linearen Gleichungssystem als enengl gibt es unendlich viele Werte, die dieses LGS lösen, nämlich alle Punkte, die der Sc geraden liegen. Entsprechend zur Aufgabe 1.2 Beispiel 3 erhält man eine parametrisierte L

Bearbeiten Sie das Beispiel, indem Sie die fehlenden nschr ergänzen.

I	$x + 2y + 2z = 1$	
II	$2x + z = 3$	PI – II
III	$3x + 2y + 3z = 4$	– III
IV	___ =	
V	___ = ___	IV – V
	0 =	

Die Gleichung IV und V identisch sind, also für die Bestimmung der Variablen y und z nur eine Gleichung bleibt, gibt es unendlich viele Lösungen, und man kann wie bei den linearen Gleichungssystemen mit zwei Variablen beispielsweise z frei wählen. Wenn man z = 4r wählt, entstehen wenig Brüche.

z frei wählen: $z = 4r$

in I einsetzen: $4r + 2y = -1$
$4y = -1 - 1$
$y = -\frac{1}{4} - 3r$

z und y in I einsetzen: $x + 2(-\frac{1}{4} - 3r) + 2 \cdot 4r = -1$

= __
__ – __ r

mögliche Lösung: $\left(-\frac{1}{2} - 2r / -\frac{1}{4} - 3r / 4r\right)$

werden s en,
aus dieser Lösung eine
engleichung erzeugt.

Beachten Sie, d metrisierte
Lösung von der W meters r bzw.
vom Vielfachen vo nd sich hier
unterschiedliche Lös en können.

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Aufgabe 2.5

Unterbestimmte lineare Gleichungssysteme mit 3 Variablen

Während bei den späteren Aufgabenstellungen überbestimmte lineare G[illegible]ssyste[illegible] drei Variablen praktisch keine Bedeutung haben, werden jedoch häufiger **unte[illegible]est[illegible]** lineare Gleichungssysteme auftreten. Das sind lineare Gleichungssyste[illegible] bei de[illegible] Gleichungen als Variablen vorhanden sind. Da das Beispiel von Aufgabe 2.4. stre[illegible]nomi[illegible]u dieser Sorte von linearen Gleichungssystemen zählt, ist das Lösungsverfah[illegible]n verd[illegible]ar.

Bearbeiten Sie das Beispiel, indem Sie die fehlenden Rech[illegible]tte er[illegible]zen.

Beispiel:

$$\begin{array}{lrcrcrcl|l} \text{I} & x & + & 2y & + & z & = & 3 & \\ \text{II} & 2x & + & y & + & z & = & 1 & 2\text{I} \\ \hline & & & \_\_\_ & + & \_\_\_ & = & \_\_\_ & \\ & & & & & z & = & 5 & \\ \hline \end{array}$$

W[illegible] nur noch ei[illegible] Gleichung f[illegible] zw[illegible] Variablen v[illegible]nden ist, kann [illegible]ine Variable (hier ist es [illegible]nstig r f[illegible] zu wählen) frei[illegible]ählt werden.

mit [illegible] y = r

ergibt sic[illegible] z: [illegible] – 3r

eins[illegible]en [illegible] 2 __+ _____

x = _____

Lö[illegible] (r [illegible] 2 / r [illegible] – 3r)

Begründen Sie, warum die geometri[illegible]e Deutung dieser Aufgabe der Abbildung Abb.2.1.2 entspricht, und erläutern Sie, wie man die Lösung anschaulich interpretieren kann.

Ergä[illegible]gen: _____

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Alge[illegible]a
selbstorganisiert [illegible]rle[illegible]en

Kap[illegible]

Koordinatensyst[illegible]

02-031-266

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen 9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen 17

Einführung in die Vektorrechnung

Kapitel 3 – Koordinatensysteme 23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu des Vektoren 25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren 33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Linear[illegible]ation 43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und U[illegible]gigkeit 47

Geraden in der Ebene und [illegible] Rau[illegible]

Kapitel 8 – Parameterdarst[illegible]ng von Gera[illegible] 49
Kapitel 9 – Lagebeziehung [illegible] 55
Kapitel 10 – Skala[illegible] 59
Kapitel 11 – V[illegible] - od[illegible]reuzpr[illegible]kt 65

Eben[illegible]un[illegible]

Kap[illegible] 12 – D[illegible]llung von Ebenen 69
[illegible]3 – Be[illegible]dere Ebenen 81
[illegible]pite[illegible] [illegible]beziehun[illegible]ei Ebenen 85
[illegible]tel 15 – Abstände 99
[illegible]el 16 – Sch[illegible]ittw[illegible] 105
Kapitel 17 – Eben[illegible]scharen 107

Lineare Abbildungen

Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen 119
Kapitel 19 – [illegible] 125
Ka[illegible] 137
[illegible] 143
[illegible]rehungen 145
[illegible]tel 23 – Verkettung von linearen Abbildungen 149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen Ax = x' 153

Gesa[illegible]bra selbstorganisiert erlernen ([illegible]-031-266)
S[illegible]

[illegible]rbehalten. A[illegible]ghts reserved.
[illegible]k, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
[illegible] aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

[illegible]SelbstVerlag
[illegible]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[illegible]
[illegible]lehrerselbstverlag.de
[illegible]www.f-druck.de

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Kapitel 3: Koordinatensysteme

1. Koordinaten in der Ebene

Die Darstellung von Punkten in der Ebene ist Ihnen hinlänglich bekannt. Alle Punkte liegen in der Papierebene, und man kann bei gegebenen Koordinaten einen Punkt p(x/y) im Koordinatensystem eintragen und die Koordinaten eines markierten Punktes, hier A(2/3), direkt ablesen.

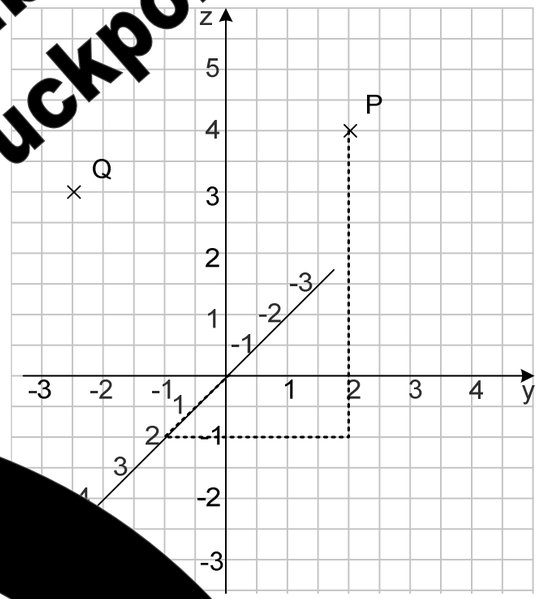
Die x-Achse kann auch mit x_1-Achse u[illegible]e y-Achse auch mit x_2-Achse bezeichnet [illegible]rden.

2. Koordinaten im Ra[illegible]

Für die Darste[illegible] vo[illegible]kten im Raum trifft man in der Rege[illegible]reinbarun[illegible]

Die [illegible]sen [illegible]e y-[illegible] x_2-Koordinate und die z- b[illegible] x_3-Koo[illegible]ate liegen in der P[illegible]pierebene.

[illegible]e x[illegible]se wird als Diagonale [illegible]eichn[illegible] zeigt se[illegible]ht aus der P[illegible]erebene nach vor[illegible]raus, wobei die [illegible]nde der Skala [illegible]rzt gezeichn[illegible]erden. [illegible] Form der [illegible]arstellung wird a[illegible] als Kavalierperspektiv[illegible] bezeichne[illegible]



Hier: Abstand y- und z-Achse zwei Kästchen
Abstand x-Achse ein Kästchen diagonal

Die Punkte [illegible]
Pa[illegible]

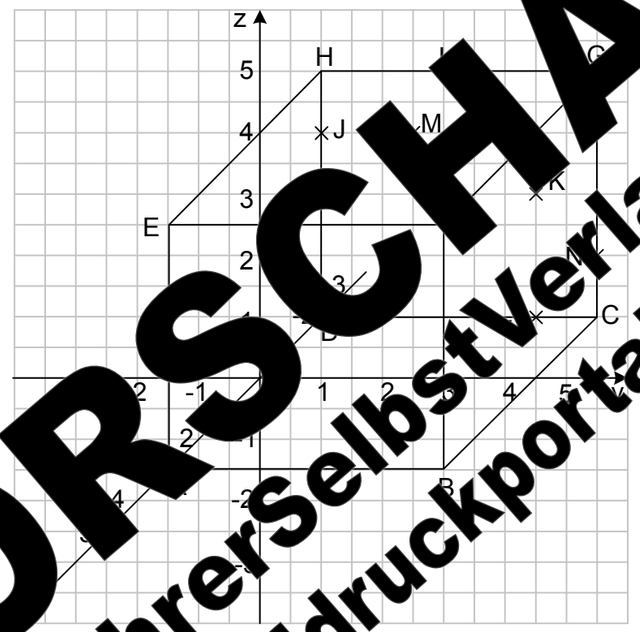
[illegible]as Eintragen bzw. Ablesen von Punkt P(2/3/5) erfolgt mit Hilfe der gestrichelten Hilfslinie: vom Ursprung ausgehend 2 Einheiten nach vorne entlang der x-Achse, 3 Einheiten nach rechts parallel [illegible]eiten nach oben par[illegible]

Fü[illegible]eutige Aussage [illegible] keine Hilfslinien [illegible]d.

[illegible]n Wahl der Skalierung können räumliche [illegible]te verzerrt erscheinen. Beispielsweise k[illegible] [illegible]ürfel wie ein Quader aussehen.

Übungen

Ü3.1 Koordinaten ablesen und eintragen.



a) Bestimmen Sie die Eckpunkte des Quaders.

A (___/___/___) B (___/___/___) C (___/___/___) D (___/___/___)

E (___/___/___) F (___/___/___) G (___/___/___) H (___/___/___)

b) Bestimmen Sie die Koordinaten der eingezeichneten Punkte.

(/___) L (___/___/___)

N (___/___/___)

c) Tragen Sie die folgenden Punkte ein. Verwenden Sie, wo sinnvoll, Hilfslinien:

P(1/0/0) Q(4/-1/3) R(3/4,5/–2) S(–1/1/3)

Übungen: _____

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Alge
selbstorganisiert

Ka

Grundlegendes zu des n

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen 9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen 17

Einführung in die Vektorrechnung

Kapitel 3 – Koordinatensysteme 23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu des Vektoren 25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren 33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Linear[illegible]mation 43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und U[illegible]gigkeit 47

Geraden in der Ebene und [illegible] Ra[illegible]

Kapitel 8 – Parameterdarst[illegible]ng von Gera[illegible] 49
Kapitel 9 – Lagebeziehung [illegible] 55
Kapitel 10 – Skala[illegible] 59
Kapitel 11 – V[illegible] od[illegible]reuzpr[illegible]kt 65

Eb[illegible]un[illegible]

Kap[illegible] 12 – D[illegible]llung von Ebenen 69
Kap[illegible] 13 – Be[illegible]dere Ebenen 81
Kapitel [illegible] Beziehun[illegible]ei Ebenen 85
[illegible]tel 15 – Abstände 99
[illegible]l 16 – Schnittw[illegible] 105
Kapitel 17 – Eben[illegible]scharen 107

Lineare Abbildungen

Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen 119
Kapitel 19 – [illegible] 125
Ka[illegible] 137
[illegible] 143
[illegible]enungen 145
[illegible]tel 23 – Verkettung von linearen Abbildungen 149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen Ax = x' 153

Gesa[illegible]bra selbstorganisiert erlernen (L[illegible]-031-266)

S[illegible]

[illegible]rbehalten. A[illegible]ghts reserved.
[illegible], auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
[illegible] aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

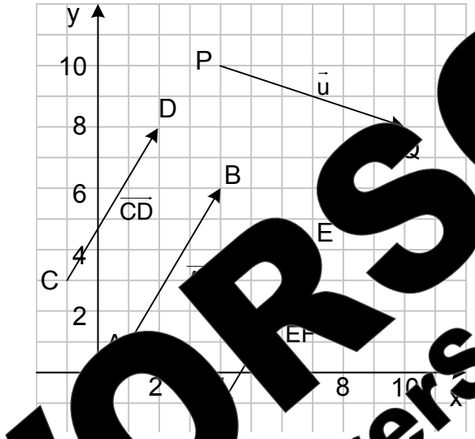
[illegible] SelbstVerlag
[illegible]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[illegible]
[illegible]lehrerselbstverlag.de
[illegible]www.f-druck.de

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Kapitel 4: Grundlegendes zu Vektoren

Vektoren in der Ebene

Aufgabe 4.1
In der folgenden Abbildung sind Vektoren in der Ebene dargestellt. [illegible] sich die Zusammenhänge, indem Sie die gegebenen Informationen [illegible]charb[illegible]w. fehlende Angaben ergänzen.



[illegible]s[illegible]ie Punkte:
A(1[illegible]3(4/6), C(–1[illegible]2), D(2[illegible]8), E(7/4), F(4/–1)
[illegible]/___), Q(___/___)

Vektoren werden durch einen Pfeil über [illegible]n Buchstaben, der immer von links nach rechts zeigt, gekennzeichnet. Wie bei Strecken verwendet man entweder die großen Buchstaben von Anfangs- und Endpunkt oder einen kleinen Buchstaben.

Ke[illegible]eichnen von Vekto[illegible]n:
[illegible]l von A nach B wird als Vektor $\overrightarrow{AB}$ bezeichnet.

Der [illegible]eil von C nach [illegible] wird als V[illegible]ktor ____ bezeichnet.

Der Pfeil von E nach F wird als [illegible]ktor ____ bezeichnet.

Der Pfeil von P nach Q wird als Vektor ____ bezeichnet.

Sp[illegible]

[illegible] Verschiebung eines [illegible]telle im Koordinatensystem an. Diese [illegible]ebung wird mit Hilfe der Spaltenschreibweise $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix}$ $\vec{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

Vers[illegible]

Verschiebung um
–3 in x-Richtung
–5 in y-Richtung

[illegible]g um
[illegible]htung
[illegible]ung

F[illegible]

[illegible]oren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ bewirken die gleiche Verschiebung. Sie gehö[illegible]r gleichen **[illegible]klasse**.

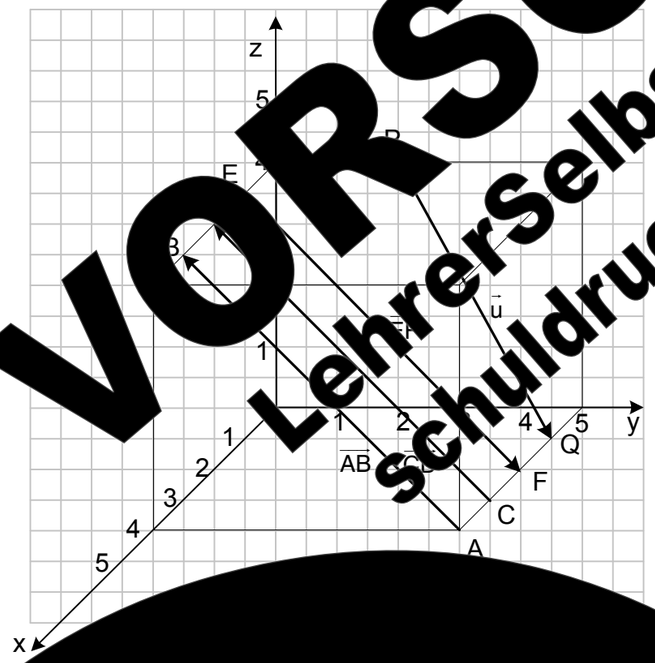
[illegible]ektoren $\overrightarrow{AB}$ bzw. $\overrightarrow{CD}$ und der Vektor $\overrightarrow{EF}$ si[illegible]n lang, aber entg[illegible]et. Man [illegible]chnet solche Vektoren als **Gegenvekt[illegible]**

Vektoren im Raum

Aufgabe 4.2

Die Betrachtungen zur Vektordarstellung in der Ebene können direkt auf [illegible] übertragen werden. Man muss lediglich beachten, dass die Vektoren im Raum drei Komponenten haben und in der Spaltenschreibweise in der Form $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dargestellt werden.

In der folgenden Abbildung sind Vektoren im Raum dargestellt. Ermitteln Sie die Koordinaten, deren Anfangs- und Endpunkte C, D, E, F, P sowie Q sind und bestimmen Sie die Vektoren $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ sowie $\overrightarrow{PQ}$ in Spaltendarstellung.



A(4/5/0)

B(3/0/4)

C(___/___/___)

D(___/___/___)

E(___/___/___)

F(___/___/___)

P(___/___/___)

Q(___/___/___)

$\begin{pmatrix} \\ \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{pmatrix}$

Ergänzen Si[illegible]

Die Ve[illegible] $\overrightarrow{EF}$ sind _____vektoren, da sie gleich entge[illegible]sind.

Berechnen von Vektoren aus den Koordinaten der Endpunkte

Aufgabe 4.3

Der Vektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ aus Aufgabe 4.1 wurde durch Abzählen der [illegible] im Koordinatensystem ermittelt. Sie haben bei Aufgabe 4.2 vielleicht schon festgestellt, dass die [illegible]ten auch direkt aus dem Anfangs- und Endpunkt des Vektors ermittelt werden können.

Koordinate der Pfeilspitze: B(4/6) ——— Koordinate des Pfeilendes: A(1/1)

Koordinaten des Vektors

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 6- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ 5 \end{pmatrix}$

Koordinaten des [illegible] | Koordinaten des Pfeilendes

Überprüfen Sie [illegible]es Verfahren für den Vektor $\vec{u}$ aus Aufgabe 4.2.

Grundlegende Definitionen und Zusammenhänge

– Die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ sind jeweils **Repräsentanten** der gleichen Klasse von Vektoren $\vec{v}$, die eine Verschiebung eines Punktes um [illegible] Richtung bzw. v_3 in z-Richt[illegible]

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

[illegible] und $\vec{v}$ sind gleich lang.

[illegible]nnt daher den Vektor $\vec{v}$ **Gegenvektor** [illegible]

[illegible]chreibweise für Ebene entsprechend)

$-\vec{u} = -\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_1 \\ -u_2 \\ -u_3 \end{pmatrix}$

– Ein Vektor, der einen Punkt A auf sich selbst abbildet (also keine Verschiebung), wird **Nullvektor** genannt.

[illegible] $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

– [illegible] $\overrightarrow{AB}$ werden aus den [illegible]er Punkte A($a_1/a_2/a_3$) und B ($b_1/b_2/b_3$) durch [illegible]dung der einzelnen Komponenten a_1, a_2 und a_3 und [illegible]d b_3 berechnet:
[illegible]e Ebene gilt Entsprechendes.)

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} \\ b \end{pmatrix}$

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Übungen

Ü4.1 Gegeben ist der Vektor $\overrightarrow{AB}$

a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors $\overrightarrow{AB}$ in Spaltendarstellung.

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{pmatrix}$

b) Zeichnen Sie einen weiteren beliebigen Repräsentanten der Klasse des Vektors $\overrightarrow{AB}$ ein.

c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Gegenvektors von $\overrightarrow{AB}$ in Spaltendarstellung und zeichnen Sie einen beliebigen Repräsentanten des Gegenvektors von $\overrightarrow{AB}$ ein.

Gegenvektor: $\begin{pmatrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{pmatrix}$

d) Zeichnen Sie ausgehend vom Punkt P(4/0/0) einen beliebigen Repräsentanten des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ein.

und geben Sie die Koordinaten des Gegenvektors an. Gegenvektor: $\_\_\_\_ = \begin{pmatrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{pmatrix}$

Ü4.2 Bestimmen Sie den Vektor $\overrightarrow{AB}$ aus den Koordinaten der Punkte $A(a_1/a_2)$ und $B(b_1/b_2)$ der Ebene bzw. $A(a_1/a_2/a_3)$ und $B(b_1/b_2/b_3)$ des Raumes für folgende Punkte:

a)	b)	e)	f)	g)	h)
A(2/1)		/7)	A(2/7/4)	A(3/1/-2)	A(0/-3/1)
			B(3/-2/0)	B(-1/4/-1)	B(-2/-1/3)

Ergänzungsübungen:

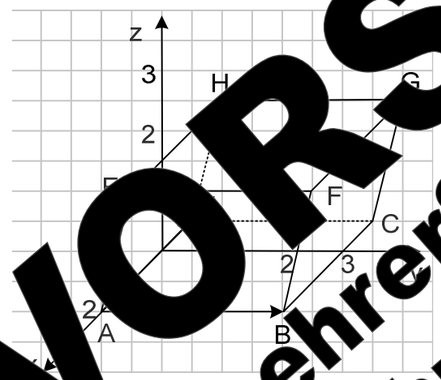
Ortsvektoren

Aufgabe 4.4

Gegeben ist der unten dargestellte verzerrte Quader. Man bezeich[net] [den] Körper als **Spat**. Gegeben sind die Punkte A(2/0/0), B(2/3/0), C(-1/3/0) und E (2/0,5/2). Bearbe[iten] Sie die Aufgabenstellung unter Anwendung der folgenden Definition:

Definition Ortsvektor:

Ein Vektor $\vec{a}$, der im Ursprung O des Koordinatensystems beginnt und dessen Pfeilspitze am Punkt A endet, wird als Ortsvektor bezeichnet. Der Ortsvektor erhält zur Namen des Punktes zugehörigen kleinen Buchstaben: $\vec{a} =$ [illegible]



a) Geben Sie die Ortsvektoren zu allen Eckpunkten an.

b) Bestimmen Sie die Koordinatendarstellung der Vektoren $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ und $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$. Welche weiteren Vektoren gehören zur gleichen Vektorklasse wie $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$

c) Bestimmen Sie die Vektoren $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{CH}$, $\overrightarrow{BD}$ und $\overrightarrow{HF}$

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Der Betrag von Vektoren

Aufgabe 4.5

Gegeben ist das folgende Koordinatensystem mit den Ortsvektoren $\vec{a}$ u

$\vec{a} = \begin{pmatrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{pmatrix}$

$\vec{b} = \begin{pmatrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{pmatrix}$

a) Die P R, und B liegen auf den Ecken des eingezeichneten Quaders. Tragen Sie die Koordinaten der Punkte in der Abbildung sowie die Koordinaten der Ortsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ein. Bestimmen Sie dann die Längen der folgenden Strecken:

$\overline{OP}$ = ___ LE $\overline{OQ}$ = ____ LE $\overline{OR}$ = ____ LE

b) Erläutern Sie, wie die Länge der Strecken $\overline{OA}$, $\overline{AB}$ und $\overline{OB}$ berechnet wurden.

$\overline{OA} = \sqrt{36+64} = 10$		$\overline{OB} = \sqrt{100+25} = 11{,}2$

Definitio

Der A B im Koordinatensystem wird als L recke $\overline{AB}$ übertragen die Vektorrechnung gilt Entsprechende tand zwischen Anfangs- und Endpunkt eines Vektors $\overline{AB}$ entspricht der Läng ors und dem Betrag des Vektors $\overline{AB}$ bezeichnet. Man sch t z. B.:

$|\overrightarrow{OA}| = 10\,\text{LE}$ **oder ei** $|\overrightarrow{AB}| = 5$

c) Erläutern Sie den folgenden Ansatz für die Berechnung der Strecke $\overline{OB}$ bzw. des ges des Vektors $\overrightarrow{OB}$. Formulieren Sie dabei auch, welcher Zusammenhang mit d ordina des Ortsvektors $\vec{b}$ besteht. $\overline{OB} = |\overrightarrow{OB}| = \sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2 + |\overrightarrow{OQ}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2} = \sqrt{6^2 + 5^2 = + 25} = 11{,}2$

d) Erläutern Sie unter Verwendung der mat Fachausdrücke *Summe*, *A ienten* des *Vektor*, *Wurzel* in eigenen W wie de nes Vekto berechnet wird

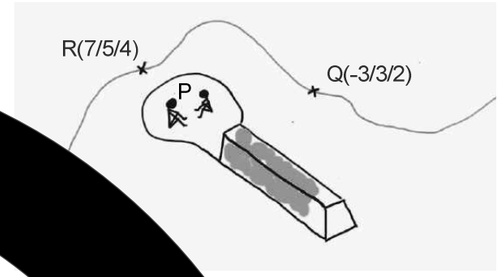
Berechnen des Be gs e Vekt

Betrag eines tors in de e: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

Be Vekt im Raum: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Übungen

Ü4.3 In einem Bergwerk sind nach dem Einsturz eines Schachtes Bergleute an der Stelle P(5/8/3) verschüttet Sauerstoff zu



eisen Sie durch Rech die Stelle R für die Bohrung am günsti ist.

nde Übungen: _____

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Die Definition des Einheitsvektors

Aufgabe 4.6

Zeigen Sie mit Hilfe der folgenden Definition, dass die Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \frac{1}{19}\begin{pmatrix} 6 \\ -10 \\ 15 \end{pmatrix}$

Einheitsvektoren sind.

Definition Einheitsvektor:

Ein Vektor der Länge 1 bzw. mit dem Betrag 1 wird als Einheitsvektor bezeichnet. Dafür gilt:

in der Ebene: $|\vec{a}| = 1$ **also** $\sqrt{a_1^2 + a_2^2} = 1$

im Raum $|\vec{a}| = 1$ **also** $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = 1$

Ergä gen: _____

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Alge a

selbstorganisiert rle en

Ka

Rechnen mit Vekt

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen 9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen 17

Einführung in die Vektorrechnung

Kapitel 3 – Koordinatensysteme 23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu des Vektoren 25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren 33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Linear[illegible]ation 43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und U[illegible]gigkeit 47

Geraden in der Ebene und [illegible] Rau[illegible]

Kapitel 8 – Parameterdarst[illegible]ng von Gera[illegible] 49
Kapitel 9 – Lagebeziehung [illegible] 55
Kapitel 10 – Skala[illegible] 59
Kapitel 11 – V[illegible] - od[illegible]reuzpr[illegible]kt 65

Eben[illegible]un[illegible]

Kap[illegible] 12 – D[illegible]llung von Ebenen 69
[illegible]3 – Be[illegible]dere Ebenen 81
[illegible]pite[illegible] [illegible]beziehun[illegible]ei Ebenen 85
[illegible]tel 15 – Abstände 99
[illegible]l 16 – Sch[illegible]ittw[illegible] 105
Kapitel 17 – Eben[illegible]scharen 107

Lineare Abbildungen

Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen 119
Kapitel 19 – [illegible] 125
Ka[illegible] 137
[illegible] 143
[illegible]renungen 145
[illegible]tel 23 – Verkettung von linearen Abbildungen 149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen Ax = x' 153

Gesa[illegible]bra selbstorganisiert erlernen ([illegible]-031-266)

S[illegible]
[illegible]rbehalten. A[illegible]ghts reserved.
[illegible]k, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
[illegible] aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

[illegible]SelbstVerlag
[illegible]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[illegible]
[illegible]lehrerselbstverlag.de
[illegible]www.f-druck.de

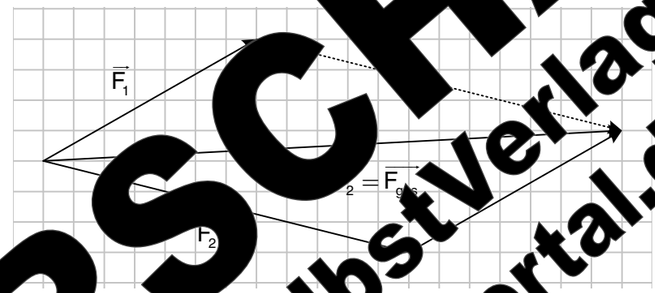
VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Kapitel 5: Rechnen mit Vektoren

Addition und Subtraktion von Vektoren

Aufgabe 5.1

Aus dem Physikunterricht ist Ihnen bereits die Addition und Subtrakt[illegible] zw[illegible]te mit Hilfe von Kräfteparallelogrammen bekannt. Die Addition und Subtra[illegible] von V[illegible] beruht auf dem gleichen Prinzip.

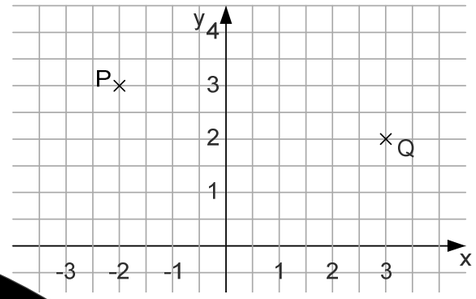


1. Addition von Ve[illegible]

a) Z[illegible]ne[illegible] Ad[illegible]n in der Ebene

Z[illegible]nen Sie[illegible] Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ausg[illegible]on Punk[illegible] das [illegible]oordinatensystem ein.

[illegible]chnen Sie [illegible]nach den Vekt[illegible] $\vec{a}$ ausgehend von der Spitze des Vektors [illegible] und den Vektor $\vec{b}$ ausgehend von der Spitze des Vektors $\vec{a}$ ein zweites Mal ein. Diese beiden Repräsentanten von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ treffen mit ihren Spitzen den Punkt Q. Verbin[illegible]



$\begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix}$

b) Rechnerische Addition in der Ebene

Rechnerisch kann man zwei Vektoren addieren, indem ma[illegible]ten der Vektoren komponent[illegible]ühren Sie dies anhand der We[illegible]eispiel oben durch und vergle[illegible]en Wert.

$\begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix}$

[illegible]gleich: _____

2. Subtraktion von Vektoren $\vec{a}-\vec{b}=\vec{d}$

a) Zeichnerische Subtraktion

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ und

$\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$. Zeichnen Sie den Vektor $\vec{a}$ ausgehend von Punkt P in das Koordinatensystem ein.

Zeichnen Sie danach den Gegenvektor von $\vec{b}$, also $-\vec{b}=\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ ausgehend von der Spitze des Vektors $\vec{a}$ ein. Die Spitze des Gegenvektors von $\vec{b}$ liegt im Punkt Q. Verbinden Sie P und Q durch den Vektor $\overrightarrow{PQ}=\vec{d}$ und lesen Sie die Koordinaten von $\vec{d}$ aus der Zeichnung ab.

$\vec{d}=\begin{pmatrix}\_\_\_\\\_\_\_\end{pmatrix}$

b) Rechnerische Subtraktion in der Ebene

Die Subtraktion entspricht der Addition des Gegenvektors. Berechnen Sie $\vec{d}$ und vergleichen Sie mit dem zeichnerisch ermittelten Wert.

$\vec{d}=\vec{a}+(-\vec{b})=\begin{pmatrix}\_\_\_\\\_\_\_\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\_\_\_\\\_\_\_\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\_\_\_\\\_\_\_\end{pmatrix}$

Vergleich: _____

Die in der Ebene gefundene Subtraktion von Vektoren können direkt auf Räume übertragen werden. Merken Sie die Merksätze.

Subtraktion von Vektoren:

Von zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ werden addiert, indem man die Koordinaten _____ addiert:

Ebene: $\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\_\_\_\\\_\_\_\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\_\_\_+\_\_\_\\\_\_\_+\_\_\_\end{pmatrix}$ Raum: $\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\_\_\_\\\_\_\_\\\_\_\_\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\_\_\_+\_\_\_\\\_\_\_+\_\_\_\\\_\_\_+\_\_\_\end{pmatrix}$

Subtraktion von Vektoren:

Der Vektor $\vec{b}$ wird vom Vektor $\vec{a}$ subtrahiert, indem man zu $\vec{a}$ den _____ von $\vec{b}$ addiert.

Aufgabe 5.2

Addiert man zu einem Vektor seinen Gegenvektor, so erhält man in der Ebene und im Raum den Nullvektor. Ergänzen Sie die fehlenden Angaben:

$\vec{a}+(-\vec{a})=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-a_1\\-a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\vec{0}$ Nullvektor in der Ebene

$\vec{a}+(-\vec{a})=\begin{pmatrix}\_\_\_\\\_\_\_\\\_\_\_\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\_\_\_\\\_\_\_\\\_\_\_\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\_\_\_+\_\_\_\\\_\_\_+\_\_\_\\\_\_\_+\_\_\_\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\_\_\_\\\_\_\_\\\_\_\_\end{pmatrix}$ Nullvektor im Raum

Aufgabe 5.3

Für das Rechnen mit reellen Zahlen gelten das Kommutativ- und das Assoziativgesetz. Prüfen Sie anhand der Informationen in Ihrem Buch oder anderen geeigneten Quellen, ob diese Gesetze auch für das Rechnen mit Vektoren Gültigkeit haben, und notieren Sie diese Gesetze.

Kommutativgesetz: _____

Assoziativgesetz: _____

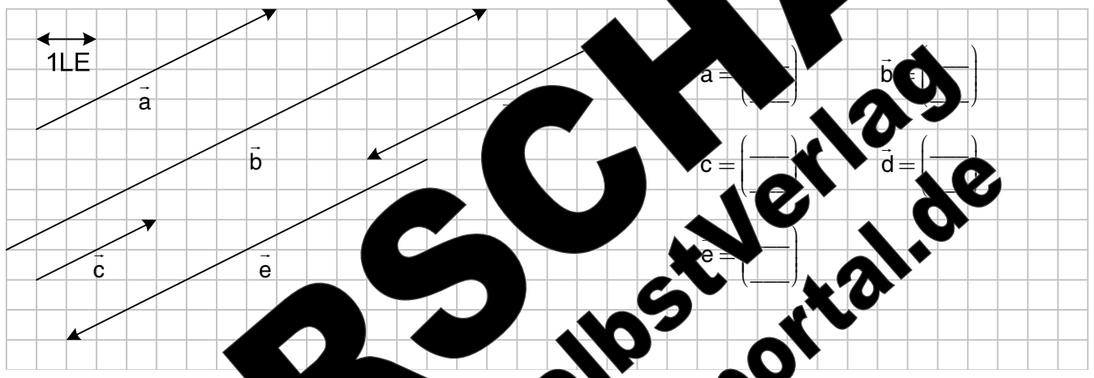
Ergänzende Übungsaufgaben: _____

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Multiplizieren von Vektoren mit reellen Zahlen

Aufgabe 5.4

1. Bestimmen Sie die Koordinaten der abgebildeten Vektoren durch Ab[illegible] der Z[illegible]ng und tragen Sie die Werte ein.



a) Nennen Sie [illegible]einsamkeit zwischen dem Vektor $\vec{a}$ und den Vektoren $\vec{b}$ bis $\vec{e}$.

b) Geben Sie [illegible]de zwischen dem Vektor $\vec{a}$ und den Vektoren $\vec{b}$ bis $\vec{e}$ an.

c) Stellen Sie die Vektoren $\vec{b}$ bis $\vec{e}$ wie im Beispiel für Vektor $\vec{b}$ durch das Vielfache des Vektors $\vec{a}$ dar.

$\vec{b} = 2\vec{a} = 2\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}$ $\qquad \vec{c} = \_\_\_\_ = \_\begin{pmatrix}\_\_\_\\\_\_\_\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\_\_\_\\\_\_\_\end{pmatrix}$

$\vec{d} = \_$ $\qquad = \_\begin{pmatrix}\_\_\_\\\_\_\_\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\_\_\_\\\_\_\_\end{pmatrix}$

[illegible]zen Sie im Merksatz die Angaben für den Raum.

Vektoren werden vervi[illegible] reellen Zahl r multipliziert, in[illegible]
Komponente mit d[illegible]

Für die [illegible] $\begin{pmatrix}a_2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}r a_2\end{pmatrix}$ Für den Raum gilt: $r\vec{a} = \_\_\begin{pmatrix}\_\_\_\\\_\_\_\\\_\_\_\end{pmatrix}$

Aufgabe 5.6

Erarbeiten Sie sich mit Hilfe Ihres Schulbuchs oder anderen geeigneten Qu[illegible] weite[illegible]echenregeln hinsichtlich der Multiplikation von Vektoren mit reellen Zahlen, und [illegible]ren Sie [illegible]n hier.

Übunge[illegible]

Ü5.1 S[illegible]eiben S[illegible]die Vektoren [illegible]odukt aus einer reellen Zahl und einem Vektor mit möglichst k[illegible]n ganz[illegible]ligen Koordinaten:

a) $\begin{pmatrix}100\\200\\500\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}[illegible]6\\-84\\144\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}2,5\\0,5\\1,5\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{3}{2}\\\frac{7}{2}\end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix}\frac{1}{6}\\\frac{3}{2}\\\frac{7}{3}\end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\3\\\frac{5}{2}\end{pmatrix}$

[illegible]nde Übungen: _____

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Berechnen des Einheitsvektors zu einem gegebenen Vektor

Aufgabe 5.7

Verdeutlichen Sie sich die folgenden Informationen und berechnen Sie anschließend $\vec{b_0}$.

Informationen:

- In der Abbildung nebenan sind Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sowie die zugehörigen Einheitsvektoren $\vec{a_0}$ und $\vec{b_0}$ eingezeichnet.

- Den Einheitsvektor zum Vektor $\vec{a}$ bezeichnet man mit $\vec{a_0}$.
- Der Vektor $\vec{a}$ bzw. $\vec{b}$ und ihr Einheitsvektor $\vec{a_0}$ bzw. $\vec{b_0}$ zeigen in die gleiche Richtung.
- Der Einheitsvektor $\vec{a_0}$ hat die Länge 1, also gilt: $\left|\vec{a_0}\right| = 1$
- Man berechnet den Einheitsvektor zum Vektor $\vec{a}$, indem man den Vektor $\vec{a}$ durch seinen Betrag dividiert:

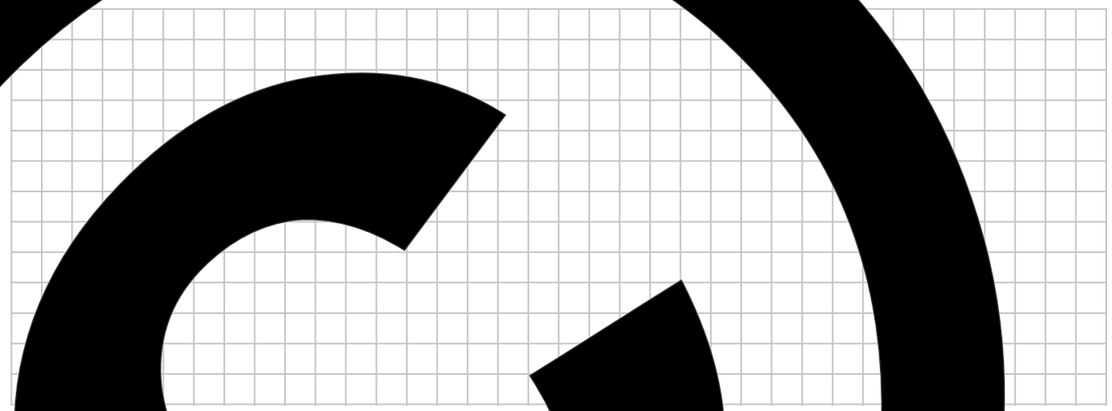
$$\vec{a_0} = \frac{1}{\left|\vec{a}\right|}\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{6^2+8^2}}\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{100}}\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}6\\0{,}8\end{pmatrix}$$

Berechnen Sie $\vec{b_0}$ analog:

$\vec{b_0} =$ _____

Übung:

Berechnen Sie die Einheitsvektoren zu $\vec{u} = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

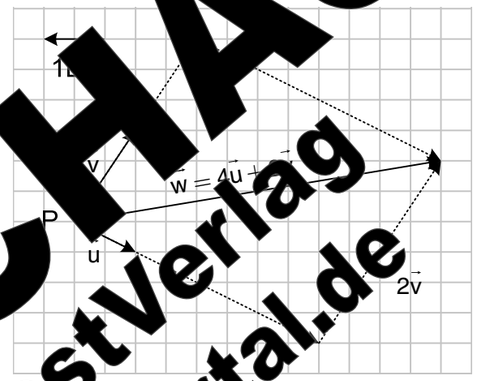


Addition vervielfachter Vektoren

Aufgabe 5.8

Beispiel

In der Abbildung neben wird der Vektor $\vec{w}$ durch eine Kombination aus den Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ erzeugt, indem man das Vierfache des Vektors $\vec{u}$ zum Zweifachen des Vektors $\vec{v}$ addiert. Durch Abzählen der Kästchen erhält man folgende Koordinaten für $\vec{w}$: $\vec{w} = \begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$



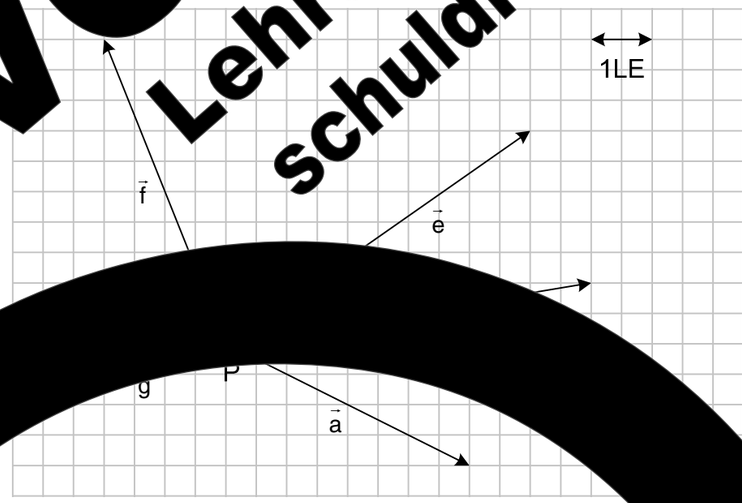
Rechnerisch lässt sich der Vektor $\vec{w}$ wie folgt ermitteln:

$$\vec{w} = 4\vec{u} + 2\vec{v} = 4\begin{pmatrix}1\\-0{,}5\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\1{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$$

Aufgabenstellung

Gegeben sind die abgebildeten Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$, $\vec{f}$ und $\vec{g}$.

1. Geben Sie die Koordinaten der abgebildeten Vektoren durch Ablesen aus der Abbildung an



$\vec{a} = \begin{pmatrix}\_\_\_\\\_\_\_\end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix}\_\_\_\\\_\_\_\end{pmatrix}$ $\vec{d} = \begin{pmatrix}\_\_\_\\\_\_\_\end{pmatrix}$ $\vec{e} = \begin{pmatrix}\_\_\_\\\_\_\_\end{pmatrix}$ $\vec{f} = \begin{pmatrix}\_\_\_\\\_\_\_\end{pmatrix}$ $\vec{g} = \begin{pmatrix}\_\_\_\\\_\_\_\end{pmatrix}$

2. Zeich[illegible] wie im Beispiel durch Vektoraddition in die Abbildung ein.

3. [illegible] von Vektor $\vec{c}$ durch Rechnung

$\begin{pmatrix}\_\_\_\\\_\_\_\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}\_\_\_\\\_\_\_\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\_\_\_\_\_\\\_\_\_\_\_\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\_\_\_\\\_\_\_\end{pmatrix}$ und prüfen Sie durch Abzählen der Kästchen, ob das Ergebnis mit der Zeichnung übereinstimmt.

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

4. In Aufgabe 2 und 3 wurde der Vektor $\vec{c}$ mit Hilfe der gegeben Beziehung $\vec{c} = \vec{a} + 3\vec{b}$ zu[illegible]t eingezeichnet und dann berechnet. Nun sollen Sie umgekehrt vorgehen. Ermit[illegible]Sie, wie[illegible]n die bereits gezeichneten Vektoren $\vec{d}$, $\vec{e}$, $\vec{f}$ und $\vec{g}$ aus einer Kombination der Vektoren [illegible]nd $\vec{b}$ [illegible]. Vielfachen von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellen lassen. Zeichnen Sie dazu wie im [illegible]eben [illegible]chende Hilfslinien ein und überprüfen Sie die Ergebnisse mit den unter 1. bere[illegible]erm[illegible] Koordinaten.

$\vec{d} =$ _____

$\vec{e} =$ _____

$\vec{f} =$ _____

$\vec{g} =$ _____

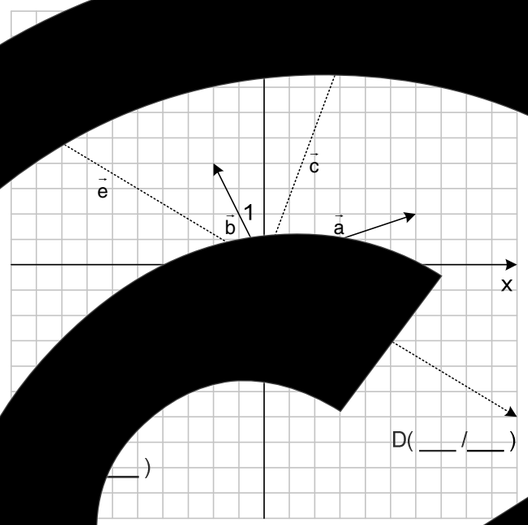
Fachbegriff fü[illegible]sun[illegible]us vervielfa[illegible]ktoren:

Definit[illegible] Lin[illegible]kombin[illegible]n:
Eine Su[illegible]e ra[illegible]+ ..... für q[illegible] reellen Zahl[illegible], t, … und die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, ...nennt [illegible]eine **[illegible]earkombination** de[illegible]ektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, ...

Übungen

Ü5.3 Gegeben sind die Ortsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Stellen Sie alle anderen eingezeichneten Ortsvektoren, wie im Beispiel für $\vec{c}$, als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dar. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis, ind[illegible] D, E und F eintragen.

$= \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + 1{,}5\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1{,}5\\4\end{pmatrix}$

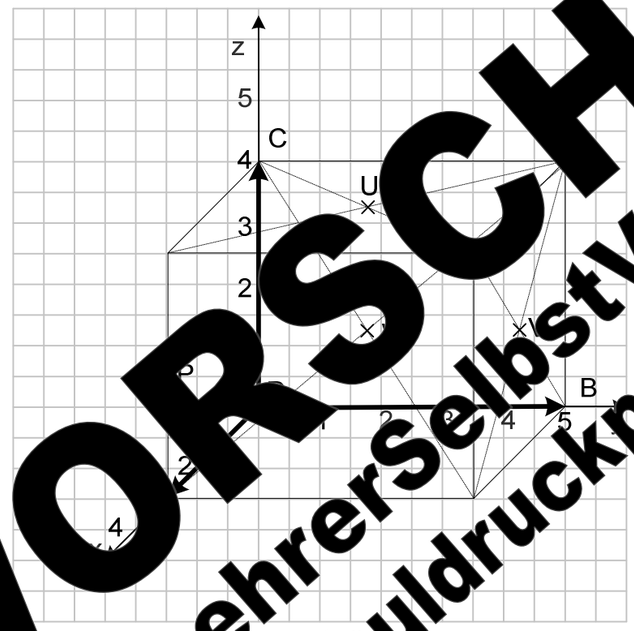


$\vec{d} =$ _____

$\vec{e} =$ _____

$\vec{f} =$ _____

Ü5.4 Gegeben sind die Ortsvektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ zu den Punkten A, B und C. Ermitteln [illegible] durch Abzählen zunächst die Koordinaten aller eingetragenen Punkte. Stellen [illegible] anschließend die Ortsvektoren zu den Punkten U, V und W, wie im Beispiel für [illegible] dargestellt, als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar. Überprüfen Sie das Ergebnis jeweils [illegible] und [illegible] abgelesenen Koordinaten.



___/___/___) $\Rightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix}\_\_\_\\\_\_\_\\\_\_\_\end{pmatrix}$

B(___/___/___) $\Rightarrow \vec{b} = \begin{pmatrix}\_\_\_\\\_\_\_\\\_\_\_\end{pmatrix}$

C(___/___/___) $\Rightarrow \vec{c} = \begin{pmatrix}\_\_\_\\\_\_\_\\\_\_\_\end{pmatrix}$

P(3/0/2)

U(___/___/___)

V(___/___/___)

W(___/___/___)

[illegible]eispiel für $\vec{p}$:

$\vec{p} = 1\cdot\vec{a} + 0\cdot\vec{b} + 0{,}5\cdot\vec{c} = 1\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix} + 0{,}5\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}$

_____

$\vec{v} =$

_____

_____

[illegible]e Übungen: _____

_____

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Raum für Notizen

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Kapitel 6: Lösen von Vektorgleichungen bei Linearkombinationen

1. Lösen einer Vektorgleichung durch "genaues Hinsehen"

Die folgenden Vektorgleichungen haben so einfache Lösungen, [illegible] sie durch genaues Hinsehen ohne größeren Rechenaufwand lösen kann.

Beispiele:

a) $\begin{pmatrix}9\\12\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ Man erkennt sofort, dass **r = 3** [illegible] Gleichung erfüllt.

b) $\begin{pmatrix}-3\\5\\-1\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}15\\-25\\5\end{pmatrix}$ Man erkennt sofort, dass **s =** [illegible] die Gleichung erfüllt.

c) $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}6\\3\\-4\end{pmatrix}$ Man erkennt sofort, dass es **keine** Zahl r gibt, welche die Gleichung erfüllt.

d) $\begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}1\\[illegible]\end{pmatrix}$ Man kann keinen Vektor der Ebene mit einem Vektor des Raumes verknüpfen.

Aufgaben 6.1

Geben Sie die Lösungen der folgenden Vektorgleichungen ohne ausführliche Rechnungen an:

a) $\begin{pmatrix}6\\[illegible]\\8\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}-12\\-34\\-16\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1\\0\\[illegible]\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}[illegible]\\[illegible]\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}13\\17\\-23\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}117\\-153\\207\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}12\\16\\8\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix}$

t =____ s =____ r = ____ s = ____

2. Lösen von [illegible]ung

Bei [illegible] Verhältnisse jedoch nicht so einfach, dass man die [illegible]

[illegible] für Vektorgleichungen mit [illegible]

Beispiel 1:

$\begin{pmatrix}12\\16\\8\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}9\\12\\[illegible]\end{pmatrix}$

Man löst die Klammern [illegible] auf, dass sich drei Gleichungen ergeben, als [illegible] Gleichungssystem (LGS) entsteht.

[illegible] $= 12r \quad \Rightarrow r = \frac{4}{3}$

$8 = 6r \quad \Rightarrow r = \frac{4}{3}$

Da ein überbestimmtes LGS vorlie[illegible] erprüft werden, ob alle drei Gleichungen das gleich[illegible] liefern.
Das ist für $r = \frac{4}{3}$ erfüllt. Damit ist $r = \frac{4}{3}$ [illegible] des LGS.

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Algebra
selbstorganisiert erlernen

Kapitel

Lösen von Vektorgleichungen bei Linearkombination

02-031-266

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen 9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen 17

Einführung in die Vektorrechnung

Kapitel 3 – Koordinatensysteme 23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu des Vektoren 25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren 33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Linear[illegible]nation 43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und U[illegible]gigkeit 47

Geraden in der Ebene und [illegible] Ra[illegible]

Kapitel 8 – Parameterdarst[illegible]ng von Gera[illegible] 49
Kapitel 9 – Lagebeziehung [illegible] 55
Kapitel 10 – Skala[illegible] 59
Kapitel 11 – V[illegible] od[illegible]reuzpr[illegible]kt 65

Eben[illegible]un[illegible]

Kap[illegible] 12 – D[illegible]llung von Ebenen 69
Kap[illegible] 13 – Be[illegible]dere Ebenen 81
Kapitel [illegible] Lagebeziehung[illegible]ei Ebenen 85
Kapitel 15 – Abstände 99
Kapitel 16 – Schnittwinkel 105
Kapitel 17 – Ebenenscharen 107

Lineare Abbildungen

Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen 119
Kapitel 19 – [illegible] 125
Kapitel [illegible] 137
[illegible] 143
[illegible]renungen 145
Kapitel 23 – Verkettung von linearen Abbildungen 149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen Ax = x' 153

Gesa[illegible]bra selbstorganisiert erlernen (L[illegible]-031-266)
S[illegible]

[illegible]rbehalten. A[illegible]ghts reserved.
[illegible], auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
[illegible] aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

[illegible]SelbstVerlag
[illegible]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[illegible]
[illegible]lehrerselbstverlag.de
[illegible]www.f-druck.de

Kapitel 6: Lösen von Vektorgleichungen bei Linearkombinationen

1. Lösen einer Vektorgleichung durch "genaues Hinsehen"

Die folgenden Vektorgleichungen haben so einfache Lösungen, dass sie durch genaues Hinsehen ohne größeren Rechenaufwand lösen kann.

Beispiele:

a) $\begin{pmatrix}9\\12\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ Man erkennt sofort, dass **r = 3** die Gleichung erfüllt.

b) $\begin{pmatrix}-3\\5\\-1\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}15\\-25\\5\end{pmatrix}$ Man erkennt sofort, dass **s = –** die Gleichung erfüllt.

c) $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}6\\3\\-4\end{pmatrix}$ Man erkennt sofort, dass es **keine** Zahl r gibt, welche die Gleichung erfüllt.

d) $\begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}1\\\\\end{pmatrix}$ Man kann keinen Vektor der Ebene mit einem Vektor des Raumes verknüpfen.

Aufgabe 6.1

Geben Sie die Lösungen der folgenden Vektorgleichungen ohne ausführliche Rechnungen an:

a) $\begin{pmatrix}6\\\\8\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}-12\\-34\\-16\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1\\0\\\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}\\\\0\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}13\\17\\-23\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}117\\-153\\207\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}12\\16\\8\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix}$

t =____ s =____ r = ____ s = ____

2. Lösen von [illegible]ung

Bei [illegible] erhältnisse jedoch nicht so einfach, dass man die

[illegible] für Vektorgleichungen mit [illegible]

Beispiel 1:

$\begin{pmatrix}12\\16\\8\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}9\\12\\\end{pmatrix}$

Man löst die Klammern [illegible] auf, dass sich drei Gleichungen ergeben, als [illegible] Gleichungssystem (LGS) entsteht.

[illegible] = 12r $\Rightarrow r=\frac{4}{3}$

$8=6r \Rightarrow r=\frac{4}{3}$

Da ein überbestimmtes LGS vorlie[illegible] erprüft werden, ob alle drei Gleichungen das gleich[illegible] efern.

Das ist für $r=\frac{4}{3}$ erfüllt. Damit ist $r=\frac{4}{3}$ [illegible] des LGS.

Beispiel 2:

$\begin{pmatrix}12\\16\\8\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}9\\12\\15\end{pmatrix}$

Man löst die Klammern der Vektoren auf, das [illegible] Gleichungen ergeben, also ein linea[illegible]ungssystem (LGS) entsteht.

I: $12=9r \Rightarrow r=\frac{4}{3}$

II: $16=12r \Rightarrow r=\frac{4}{3}$

III: $8=15r \Rightarrow r=\frac{8}{15}$

Aus I und II f[illegible] $r=\frac{4}{3}$ [illegible] Gleichung III er[illegible] sich für $r=\frac{8}{15}$ also ein W[illegible]spruch. Dam[illegible] die Vektorg[illegible]ung nicht lösbar.

b) Beispiele für Vektorgleichung[illegible] mit zwei Variablen

Beispiel 1:

$r\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\\\\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\\\0\end{pmatrix}$

Auflösen de[illegible]gleichung in drei einzelne Gleichungen

I [illegible] $2r+s$ [illegible] weglassen

II [illegible] $-s=1$

III [illegible] $2s=0$ II-III

IV $-s=1$

$s=-1$ einsetzen in II $\Rightarrow r=2$

Da es sich um ein überbestimmtes LGS handelt, müssen die Lösungen in der für die Rechnung bisher nicht verwendeten Gleichung I überprüft werden. Da sich kein Widerspruch ergibt, sind s = –1 und r = 2 Lösungen des LGS.

Einsetzen von r und [illegible]

$+s\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}$

Auflösen de[illegible]g in drei einzelne Gleichungen

I $2r+s$ [illegible]

II $r+$ [illegible]

III [illegible]

[illegible] $=-1$ einsetzen in II $\Rightarrow r=2$

[illegible]tzen in I: $3=4$

Auch hier ergibt sich [illegible] II und III das Ergebnis r = 2 und s = [illegible] Einsetzen in I ergibt hier [illegible] also einen **Widerspruch**. Damit ist di[illegible]chung nicht lösbar.

Kei[illegible]g

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

3. Lösen Sie die folgenden Vektorgleichungen:

a) $\begin{pmatrix}6\\21\\-9\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}15\\49\\-21\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}6\\21\\-9\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}14\\49\\-21\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}18\\ \\ \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}1\\ \\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}1\\2\\ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\ \\ \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix}1\\-2\\ \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}1\\0\\ \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}1\\4\\ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix}1\\-4\\3\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}2\\ \\ \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$

Lösungen in unsortierter Reihe

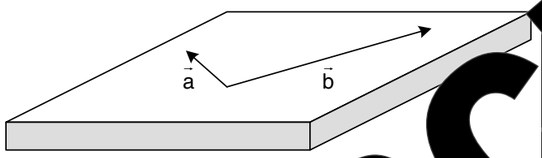
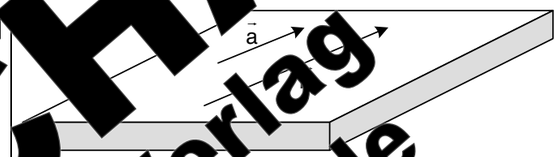
keine Lösun
keine Lösun
r = 15 und s =

ne Lösung
r = 3 und s =
r = 3/7

keine Lösung
r = 0,5 und s = 0,5
r = –3 und s = 1

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Kapitel 7: Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit

Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit in der Eb[illegible]	
Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 	Geg[illegible]n sind [illegible] $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ 
Der Ansatz $r\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ bedeut[illegible] dass der Vektor $\vec{b}$ als [illegible] des [illegible] $\vec{a}$ dargestellt werd[illegible] führt zum folgenden LGS:	Der Ans[illegible] $r\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ [illegible]eutet anschaulich, dass [illegible] Vektor $\vec{b}$ als [illegible] Vielfaches des Vektors $\vec{a}$ dargestellt w[illegible]en kann und führt zum folgenden LGS:
LGS: 0= [illegible] r = [illegible] ⇒ Widerspru[illegible]	LGS: 2r = 4 4r = 8
[illegible] _____ [illegible] welc[illegible]s das LGS [illegible].	Das LGS ist für r = _____ erfüllt.
Vektor $\vec{b}$ kann _____ durch Vervielfachen von Vektor $\vec{a}$ erzeugt werden.	Vektor $\vec{b}$ ist ein _____ von Vektor $\vec{a}$. Man sagt auch, die Vektoren sind **kollinear**.
[illegible] [illegible]rden kann, sind die Vekt[illegible] $\vec{a}$ und $\vec{b}$ **linear unabhängig.**	[illegible]nn in der Ebene ein Vektor $\vec{b}$ durch ein [illegible]ches eines Vektors $\vec{a}$ dargestellt [illegible]n kann, sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ [illegible]r **abhängig.**
Mathematischer Ansatz für die Untersuchung au[illegible]hängigkeit und Abhängigkeit in der Eben[illegible]	
	$r \cdot \vec{a} =$ [illegible]sung für r
[illegible]e: **Drei Vektoren in einer Ebene sind immer linear _____.**	

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Alge[illegible]a
selbstorganisiert [illegible]rle[illegible]en

Kap[illegible]

Lineare Abhängigk[illegible] Unabhängigkeit

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

02-031-266

Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen 9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen 17

Einführung in die Vektorrechnung

Kapitel 3 – Koordinatensysteme 23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu des Vektoren 25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren 33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Linea[illegible]mation 43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und U[illegible]gigkeit 47

Geraden in der Ebene und [illegible] Ra[illegible]

Kapitel 8 – Parameterdarst[illegible]ng von Gera[illegible] 49
Kapitel 9 – Lagebeziehung [illegible] 55
Kapitel 10 – Skala[illegible] 59
Kapitel 11 – V[illegible] od[illegible]reuzpr[illegible]kt 65

Eb[illegible]un[illegible]

Kap[illegible] **12** – L[illegible]llung von Ebenen 69
[illegible]**3** – Be[illegible]dere Ebenen 81
[illegible]**4** – Beziehun[illegible]ei Ebenen 85
[illegible]**15** – Abstände 99
[illegible]**16** – Schnittw[illegible] 105
Kapitel **17** – Eben[illegible]scharen 107

Lineare Abbildungen

Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen 119
Kapitel 19 – [illegible] 125
[illegible] 137
..... 143
[illegible]renungen 145
[illegible]**23** – Verkettung von linearen Abbildungen 149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen Ax = x' 153

Gesa[illegible]bra selbstorganisiert erlernen (L[illegible]031-266)

S[illegible]

[illegible]rbehalten. A[illegible]ghts reserved.
[illegible], auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
[illegible] aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

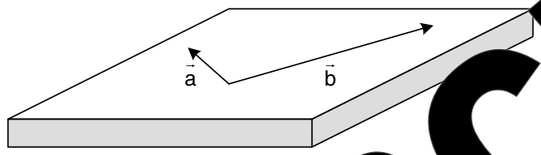
[illegible]SelbstVerlag
[illegible]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[illegible]
[illegible]lehrerselbstverlag.de
[illegible]www.f-druck.de

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Kapitel 7: Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit

Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit in der Eb[illegible]

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$



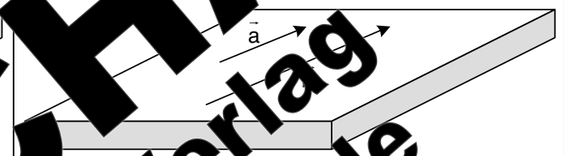
Der Ansatz $r\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ bedeut[illegible] dass der Vektor $\vec{b}$ als [illegible]elfa[illegible]es de[illegible]rs $\vec{a}$ dargestellt werd[illegible]führt zum folgenden LGS:

LGS: 0= [illegible]
r = [illegible] ⇒ Widerspru[illegible]

_____ [illegible] welches das LGS [illegible]

Vektor $\vec{b}$ kann _____ durch Vervielfachen von Vektor $\vec{a}$ erzeugt werden.

Gege[illegible]n sind [illegible] $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}$



Der Ansatz $r\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}$ bedeutet anschaulich, dass der Vektor $\vec{b}$ als ein Vielfaches des Vektors $\vec{a}$ dargestellt werden kann und führt zum folgenden LGS:

LGS: 2r = 4
4r = 8

Das LGS ist für r = _____ erfüllt.

Vektor $\vec{b}$ ist ein _____ von Vektor $\vec{a}$. Man sagt auch, die Vektoren sind **kollinear**.

[illegible]enn in der Ebene ein Vektor $\vec{b}$ durch ein [illegible]ches eines Vektors $\vec{a}$ dargestellt [illegible]n kann, sind die Vektoren [illegible]rden kann, sind die Vekto[illegible]
$\vec{a}$ und $\vec{b}$
linear unabhängig.

$\vec{a}$ und $\vec{b}$
[illegible]r abhängig.

Mathematischer Ansatz für die Untersuchung au[illegible]hängigkeit und Abhängigkeit in der Eben[illegible]

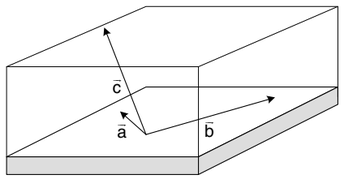
$r\cdot\vec{a}=$ [illegible]sung für r

[illegible]e: **Drei Vektoren in einer Ebene sind immer linear _____.**

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit im Raum

Gegeben sind: $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{c}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$



Der Ansatz $r\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ bedeu[illegible] anschaulich, dass der Vektor $\vec{c}$ als L[illegible]kombination a[illegible] den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ d[illegible]este[illegible]erden kann und führt zum folgenden [illegible]:

r + s = −1
s = [illegible]
0 [illegible] Wide[illegible]ruch

Es gib[illegible] [illegible] und s[illegible]che das LGS [illegible]llen.

Ve[illegible] $\vec{c}$ kann [illegible] aus einer Line[illegible]ation der Vekto[illegible] $\vec{a}$ und $\vec{b}$ [illegible] werden.

Gegeben sind: $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\[illegible]\\[illegible]\end{pmatrix}$ [illegible] $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ [illegible] $\begin{pmatrix}[illegible]\\[illegible]\\0\end{pmatrix}$

[illegible]satz $r\begin{pmatrix}1\\[illegible]\\[illegible]\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}[illegible]\\2\\0\end{pmatrix}$ bedeu[illegible]anschaulich, dass [illegible] Vektor $\vec{c}$ [illegible]inearkombination aus d[illegible]kt[illegible]ren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ [illegible]rgestellt werden kann [illegible]führt zum fol[illegible]den LGS:

r + [illegible] = [illegible]
[illegible]
0 = 0

Das LGS ist für s = _____ und r = _____ erfüllt.

Vektor $\vec{c}$ kann als _____ der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dargestellt werden, da alle drei Vektoren in einer Ebene liegen. Man sagt auch, die Vektoren sind **komplanar**.

Wenn ein Vektor $\vec{c}$ im Raum nicht durch eine Linearkombination zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dargestellt [illegible] in der [illegible]

[illegible]hängig.

Wenn ein Vektor $\vec{c}$ im Raum durch eine Linearkombination zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dargestellt werden kann, da er in der [illegible]n Ebene wie $\vec{a}$ und $\vec{b}$ liegt, sind die [illegible]ektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ **[illegible]ar abhängig.**

[illegible]athematischer Ansatz für die Untersuchung [illegible]ängigkeit und Abhängigkeit im Raum

$r\cdot\vec{a}+s\cdot\vec{b}=\vec{c}$ **hat keine Lösung**	$r\cdot\vec{a}+s\cdot\vec{b}=\vec{c}$ **[illegible]ung für r und s**

Ergänzen Sie:

[illegible] linear _____.

[illegible] sind linear _____, w[illegible]mplanar sind.

[illegible]ei Vektoren im [illegible]aum sind linear _____, we[illegible] in einer [illegible]Ebene liegen.

E[illegible]bungen: _____

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Alge[illegible]a
selbstorganisiert[illegible]rlen

[illegible]
Parameterdarstellung v[illegible]den

02-031-266

Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen 9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen 17

Einführung in die Vektorrechnung

Kapitel 3 – Koordinatensysteme 23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu des Vektoren 25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren 33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Linear[illegible]ation 43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und U[illegible]igkeit 47

Geraden in der Ebene und im Rau[illegible]

Kapitel 8 – Parameterdarst[illegible]ng von Gera[illegible] 49
Kapitel 9 – Lagebeziehung [illegible] 55
Kapitel 10 – Skala[illegible] 59
Kapitel 11 – V[illegible] - od[illegible]reuzpr[illegible]kt 65

Ebe[illegible]un[illegible]

Kap[illegible] 12 – D[illegible]llung von Ebenen 69
[illegible]3 – Be[illegible]dere Ebenen 81
[illegible]pite[illegible] [illegible]beziehun[illegible]ei Ebenen 85
[illegible]tel 15 – Abstände 99
[illegible]l 16 – Sch[illegible]ittw[illegible] 105
Kapitel 17 – Eben[illegible]scharen 107

Lineare Abbildungen

Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen 119
Kapitel 19 – [illegible] 125
Ka[illegible] 137
[illegible] 143
[illegible]enungen 145
[illegible]el 23 – Verkettung von linearen Abbildungen 149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen Ax = x' 153

Gesa[illegible]bra selbstorganisiert erlernen ([illegible]-031-266)

S[illegible]
[illegible]rbehalten. A[illegible]ghts reserved.
[illegible]k, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
[illegible] aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

[illegible]SelbstVerlag
[illegible]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[illegible]
[illegible]lehrerselbstverlag.de
[illegible]www.f-druck.de

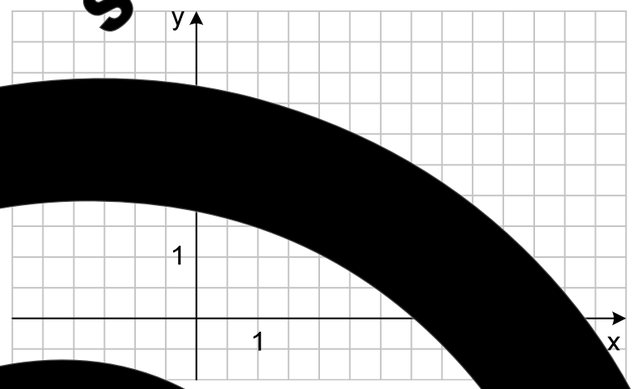
VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Kapitel 8: Parameterdarstellung von Geraden

Aufgabe 8.1

Der Vektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ sei ein Ortsvektor. Bestimmen Sie für d[illegible] Tabell[illegible]benen Werte von r jeweils die Koordinaten der Ortsvektoren $\vec{p}$ und die [illegible]rdinat[illegible] [illegible]ektor $\vec{p}$ jeweils zugehörigen Endpunkte P(x/y). Zeichnen Sie jeden Ortsvekt[illegible] und d[illegible] Punkt P(x/y) in ein Koordinatensystem ein.

Parameter $r \in IR$	Ortsvekt[illegible]unkt P[illegible]	Ko[illegible]ate[illegible]es Punktes P(x/y)
r = –1	$\vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \_\_ \begin{pmatrix} 2 \\ \_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix}$	P(____ / ____)
r = 0	$\vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \_\_ \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix}$	P(____ / ____)
r = 0.5	$\vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \_\_ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix}$	P(____ / ____)
r = [illegible]	$\vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \_\_ \begin{pmatrix} 2 \\ \_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix}$	P(____ / ____)
[illegible].5	$\vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \_\_ \begin{pmatrix} 2 \\ \_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix}$	P(____ / ____)



Bes[illegible]n Ort aller Endpunkte P:

[illegible] Sie diesen geometrischen Ort grafisch im [illegible]atensystem dar, [illegible]lie Punkte [illegible]ll verbinden.

Information: Parameterdarstellung der Gerade

Parameterdarstellung einer Geraden: $\boxed{\vec{x} = \vec{p} + r\vec{u}}$

Der Param[illegible] dient [illegible]gestanderung und bei nega[illegible] Vor[illegible]nen auch zur Um[illegible]ung [illegible]tur[illegible]vektors $\vec{u}$. Setzt man [illegible] Zal[illegible] gelangt man zu [illegible]em P[illegible] X auf der Geraden.

Stützvektor $\vec{p}$

Der Stützvektor $\vec{p}$ ist ein Ortsvektor zu einem beliebigen, aber bekannten Punkt auf der Geraden. Der Stützvektor [illegible] damit die Position der Geraden im Koordinatensystem fe[illegible]

Richtungsvektor $\vec{u}$

Der Richtungsvektor $\vec{u}$ [illegible]gt die Richtung (Steigung) der Geraden im Koordinatensystem fest. Man zeichnet $\vec{u}$ in der Regel ausgehend von P ein.

Man kann $\vec{u}$ berechnen, wenn zwei Punkte A und B auf der Geraden bekannt sind.

$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$

Der Vekto[illegible] ist ein Ortsvektor zu einem belieb[illegible] Punkt X auf der Geraden.

Parameterdarstellu[illegible]nten der Vektoren

Gerad[illegible]erade im Raum

[illegible] $= \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$

[illegible]er

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} u_1 \\ \end{pmatrix}$

oder

$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ [illegible] $\begin{pmatrix} u_1 \\ \end{pmatrix}$

Anm[illegible] [illegible] in der Analysis verwendete Form y = mx + b findet in der linear[illegible] [illegible]licherweise keine Anwendung, da diese Form [illegible]er Geradendarste[illegible] Geraden [illegible]n der Ebene und nicht für Geraden im Rau[illegible] ist.

Aufgabe 8.2

Standardaufgaben bei Geraden

Arbeiten Sie die unten aufgeführten Beispiele zu den Standardaufg[illegible] Gerad[illegible]urch und lösen Sie anschließend mit Hilfe dieser Beispiele Aufgaben aus dem Schu[illegible]ch.

1. Erstellen der Parameterdarstellung der Gerad[illegible] bekannte P[illegible]kte P(1/0/2) und Q(1/2/3)

Der Richtungsvektor $\vec{u}$ [illegible] entspricht dem V[illegible] von P nach Q.

[illegible] $= \vec{p} + ru$ mit p als Stützvektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ergibt sich als Richtungsvektor

$\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 2-0 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

[illegible] als Richtungsvektor wählen.

[illegible] $\vec{q} + r\vec{u}$ mit $\vec{q}$ als Stützvektor $\vec{q} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ [illegible]htungsvektor

$\vec{u} = \overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 0-2 \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

D[illegible]ene, jedoch gleichwertige Lösungen:

[illegible] $+ r\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ oder $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

2. Die Koordinaten eines Punkte B auf der Geraden berechnen, indem man für den Parameter r einen vorgegebenen Wert einsetzt

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ Für r = 4 folgt: $\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + 4\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+0\\0+8\\2+4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\ldots\\\ldots\\6\end{pmatrix}$ so B(1/8/6)

Der Vektor $\overrightarrow{PB}$ ist viermal so lang wie der Vektor $\vec{u}$, wenn man für r den Wert 4 einsetzt.

3. Punktprobe: Überprüfen, ob ein Punkt auf einer Geraden g liegt

a) Gegeben sind die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ und der Punkt A(1/4/4)

Schritt 1:

$\vec{a} = \vec{p} + r\vec{u}$

$\begin{pmatrix}1\\4\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$

Für $\vec{x}$ wird der Ortsvektor $\vec{a}$ zum Punkt A eingesetzt.

Schritt 2:

… die Vektorgleichung … und prüft ob … sfrei gelöst

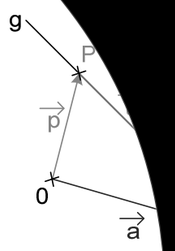
$\ldots = 0 + 2r \quad \Rightarrow r = 2$

$4 = 2 + r \quad \Rightarrow r = 2$

Ergebnis: Kein Widerspruch, also liegt der Punkt A auf der Ge…

… des Ergebnisses:

… wurde, ist der Vektor … nach A … so lang wie der … ichtungsvektor $\vec{u}$.



b) Gegeben sind die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ und der Punkt B(1/2/2)

Schritt 1:

$\vec{b} = \vec{p} + r\vec{u}$

$\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$

Schritt 2:

$1 = 1$

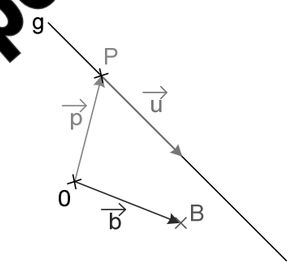
$2 = 0 + 2r \quad \Rightarrow r = 1$

$2 = 2 + r \quad \Rightarrow r = 1$

Ergebnis: Widerspruch, also liegt der Punkt B nicht auf der Geraden g.

Zeichnerische Interpretation des Ergebnisses:

… Punkt B kann durch Vervielfachen des … ntungsvektors … nie erreicht werden.



Übungen

Ü8.1 Begründen … beliebig viele Gleichungen in Parameterdarstellung haben … hiedlich und die Richtungsvektoren kollinear sind.

… Übungen:

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Raum für Notizen

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Alge
selbstorganisiert

Ka

Lagebeziehung von

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen 9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen 17

Einführung in die Vektorrechnung

Kapitel 3 – Koordinatensysteme 23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu des Vektoren 25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren 33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Linear[illegible]ation 43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und U[illegible]gigkeit 47

Geraden in der Ebene und [illegible] Rau

Kapitel 8 – Parameterdarst[illegible]ng von Gera[illegible] 49
Kapitel 9 – Lagebeziehung [illegible] 55
Kapitel 10 – Skala[illegible] 59
Kapitel 11 – V[illegible] oder reuzpro[illegible]kt 65

Eben[illegible]un[illegible]

Kap[illegible] 12 – D[illegible]llung von Ebenen 69
Kap[illegible] 13 – Be[illegible]dere Ebenen 81
Kapitel [illegible] – Lagebeziehung[illegible]ei Ebenen 85
Kapitel 15 – Abstände 99
Kapitel 16 – Schnittwinkel 105
Kapitel 17 – Ebenenscharen 107

Lineare Abbildungen

Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen 119
Kapitel 19 – [illegible] 125
Kapitel [illegible] 137
[illegible] 143
[illegible]rehungen 145
Kapitel 23 – Verkettung von linearen Abbildungen 149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen Ax = x' 153

Gesa[illegible]bra selbstorganisiert erlernen (L[illegible]031-266)

S[illegible]

[illegible]rbehalten. A[illegible]ghts reserved.
[illegible], auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
[illegible] aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

[illegible]SelbstVerlag
[illegible]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[illegible]
[illegible]lehrerselbstverlag.de
[illegible]www.f-druck.de

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Kapitel 9: Lagebeziehung von Geraden

Aufgabe 9.1

Sie wissen aus Untersuchungen in der Ebene bereits, dass sich zwei [illegible] schneiden können und dass sie parallel oder identisch sein können. Im Raum kommt eine weitere Lagebeziehung hinzu, die man als **windschief** bezeichnet. Die Lagebeziehungen von Geraden [illegible] lassen sich anschaulich an Flugrouten von Flugzeugen, die sich hier zur Vereinfachung geradlinig bewegen, veranschaulichen. Ergänzen Sie dazu in den folgenden Texten fehlende Informationen:

Die Flugzeuge fliegen auf dem gleichen Kurs.

Die Geraden g und [illegible] _____.

Die Richtungsvektoren von g und h sind _____.

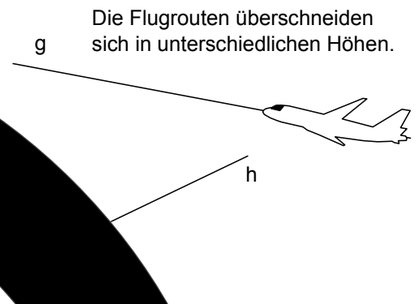
Die Richtungsvektoren von g und h sind _____ linear _____.

Die Flugzeuge fliegen auf gleichem Kurs in unterschiedlicher Höhe.

Die Geraden g und h sind _____.

Die Richtungsvektoren von g und h sind _____ linear _____.

Die Flugrouten überschneiden sich in unterschiedlichen Höhen.



Die Ge[illegible] _____

_____.

[illegible]gsvektoren von g und h sind

_____.

Die Geraden [illegible] _____

_____

Die Richtungsvek[illegible] und h sind

[illegible]near _____ _____.

Um rechnerisch zu bestimmen, welche Lagebeziehung bei zwei Geraden vorliegt, gibt es mehrere Wege. Hier soll der Weg beschritten werden, der den geringsten Rechenaufwand mit sich bringt und damit am wenigsten anfällig für Rechenfehler ist.

Schema für die Untersuchung der Lagebeziehung von Geraden

Aufgabe 9.2

Beispiele für Berechnungen zur Lagebeziehung von Geraden

Ergänzen Sie bei den folgenden Untersuchungen zur der Lagebeziehung von Geraden fehlende Angaben bzw. Rechnungen.

a) Untersuchen Sie die Lagebeziehung der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\5\\-4\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$

1. Untersuchung der Richtungsvektoren auf lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit

$$\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ll} -2r = 2 & \Rightarrow r = -1 \\ r = -1 & \Rightarrow r = -1 \\ -3r = 1 & \Rightarrow r = -1 \end{array}$$

Hier muss man nicht bedingt ausführlich rechnen, da die lineare Abhängigkeit schon durch genaues Hinsehen erkennbar ist.

Die Richtungsvektoren sind _____.

2. Punktprobe: Stützvektor von g in h einsetzen

$$\begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\5\\-4\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ll} 5 + -2r = 1 & r = \_\_ \\ 3 + r = 5 & \Rightarrow \quad r = \_\_ \\ 2 + -3r = -4 & r = \_\_ \end{array}$$

Widerspruch: Kein Widerspruch ⇒ g ist _____ h.

b) Untersuchen Sie die Lagebeziehung der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix}$ und $n: \vec{x} = \begin{pmatrix}7\\2\\5\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$

1. Wie bei a) erkennt man auch ohne Rechnung, dass die Richtungsvektoren linear abhängig sind.

Zur Erinnerung: Sowie ein Widerspruch auftaucht, wird nicht weitergerechnet.

2. Punktprobe

$$\begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ll} 5 + -2r = \_\_\_ & -2r = \_\_\_ \\ 3 + r = \_\_\_ & = 0 \\ 2 + -3 = \_\_\_ & \end{array}$$

⇒ Widerspruch

3. Ergebnis: Widerspruch _____ k. (kurz: WSK)

c) Untersuchen Sie die Lagebeziehung der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix}$ und $n: \vec{x} = \begin{pmatrix}7\\2\\5\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$

1. Durch genaues Hinsehen erkennt man ohne Rechnung, dass die Richtungsvektoren linear _____ sind.

2. Gleichsetzen g = n ergibt:

$$\begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\2\\5\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$$

LGS: … + 3s
… 2s
… ⇒ –3r = 3 ⇒ r = ____

r in II ⇒ __ = 2

r und s in I ⇒ 7 = 7

Kein Widerspruch ⇒ die Geraden _____

3. Schnittpunkt: r in g oder s in n einsetzen.

Schnittpunkt: S(___ /___ /___)

$$\begin{pmatrix}0\\\\\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}5\\\\\end{pmatrix}$$

… n, dass so … naufwand … ntsteht; … die Gerade n …

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

d) Untersuchen Sie die Lagebeziehung der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix}$ und $m: \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}\\\end{pmatrix}$

1. Untersuchung der Richtungsvektoren auf _____

$$r\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} r &= 0{,}5 \\ r &= 2 \end{matrix} \quad \Rightarrow \text{ Widerspruch}$$

Widerspruch erkennt man auch durch genaues Hinsehen.

2. Gleichsetzen g = n ergibt: $\begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\\\\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}\\\\-3\end{pmatrix}$

LGS lösen:

I	5	−	2r	=	1	−	s
II	3	+	r	=	0	+	s
			3r	=	3	+	3s
	−2r	+	s	=	−4		
II	r	−	3s	=	−3		
III	3r	+	9s	=	0		3II–III
IV			10s	=			
			s	=			

s in II ⇒ r − 2 = −3 ⇒ r = −1

r und s in I ⇒ _____ = ___

= ___ Widerspruch

Di _____ .

…lbüchern gibt es eine große Anzahl von Aufgabe… von Lagebeziehungen …den. Lösen Sie diese Aufgaben mit Hilfe der Beispiele …

Ergänz…

Kapitel 10: Skalarprodukt

1. Physikalische Betrachtungen und Begründung des Ausdru… …alarpro…

Wie viele andere mathematische Verfahren, findet das Produkt z…er v… …n eine Anwendung in der Physik. Aus dem Physikunterricht wissen Sie, dass … die A… …d…-Formel $W = F \cdot s$ berechnen kann. Diese Formel gilt in dieser Form jedoch … unter … Bedingung, dass F und s die gleiche Richtung haben, da man in diesem Sond…ll de… …ziell… …harakter von F und s vernachlässigen darf.

Im allgemeinen Fall muss man berücksi…gen, dass … größen F und s Vektoren sind, und damit in unterschiedliche Richtungen zeigen kö…en. Man schrei…e Formel dann wie folgt:

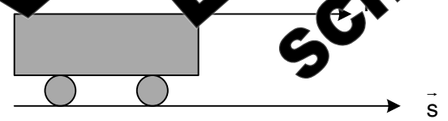
…rbeit: $= \vec{F} \cdot \vec{s}$

Das Produkt der beiden Ve…en in …diesem …dungsfall …bt keinen Vektor, sondern einen so genannten **Skalar**, da die A… Richtung hat. A… dieser Eigens…aft bei der Multiplikation zweier Vektoren leite… …n den …sdru… **Skalarprod…kt** ab.

2. Eigenschaften … …dukts veran…haulicht am Bei…piel der Kraft

Die f… …bild…n zeigen jew… …einen Wagen, …sich waagerecht nach rechts in Richtung des …eges s … …egt … mit der Kraft $\vec{F}$ gezogen wird. Die Wirkung der Kraft für die gewünschte …ew…ung ist i… …n drei Fällen …lerdings unters…hiedlich groß. Ergänzen Sie fehlende Angaben:

…1: $\vec{F} \parallel \vec{s}$

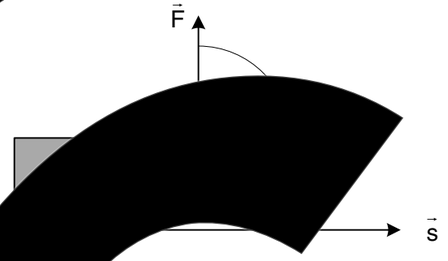


$\vec{F}$ zeigt in die Richtung des Weges $\vec{s}$, d.h.

Die Kraft $\vec{F}$ und der Weg $\vec{s}$ schließen einen Winkel von α = ___° ein. Die gesamte Kraft ist für die Bewegung wirksam und man kann ohne Beachtung des Vektorcharakters mit den Beträgen rechnen.

$W = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}|$, wenn $\vec{F} \parallel \vec{s}$

$\vec{F} \perp \vec{s}$



Mit eine… …echt nach oben zeigt, kann man den W… …e Richtung des horizontalen Weges $\vec{s}$ zieh… …hochheben. Damit ist die Kraft für die gewü… …ung nicht wirksam und es wird in physikali… …eine Arbeit verrichtet.

Es gilt: $W = \vec{F} \cdot \vec{s} =$ ___ … $\vec{s}$

Dieses Anwendungsbeis… …ich anschaulich eine wichtige Eigenschaft… …produkts:

Das Skalarprodukt zweier or… …oren ist immer

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Algebra
selbstorganisiert erlernen

Kap

Skalarprodu

02-031-266

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen 9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen 17

Einführung in die Vektorrechnung

Kapitel 3 – Koordinatensysteme 23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu des Vektoren 25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren 33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Linear ... ation 43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und U... ...igkeit 47

Geraden in der Ebene und ... Rau...

Kapitel 8 – Parameterdarst... ...ng von Gera... 49
Kapitel 9 – Lagebeziehung 55
Kapitel 10 – Skala... 59
Kapitel 11 – V... - od... ...reuzpr... ...kt 65

Eben... ...un...

Kap... 12 – D... ...llung von Ebenen 69
Kap... 13 – Be... ...dere Ebenen 81
Kapitel ... ...beziehungen bei Ebenen 85
Kapitel 15 – Abstände 99
Kapitel 16 – Schnittw... 105
Kapitel 17 – Eben... ...scharen 107

Lineare Abbildungen

Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen 119
Kapitel 19 – 125
Ka... 137
..... 143
... ...rehungen 145
Kapitel 23 – Verkettung von linearen Abbildungen 149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen Ax = x' 153

Gesa... ...bra selbstorganisiert erlernen (... ...-031-266)
S...

...rbehalten. A... ...ghts reserved.
...k, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
... aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

...SelbstVerlag
...tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ...
...lehrerselbstverlag.de
...www.f-druck.de

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Kapitel 10: Skalarprodukt

1. Physikalische Betrachtungen und Begründung des Ausdru[illegible]larpro[illegible]

Wie viele andere mathematische Verfahren, findet das Produkt z[illegible]er [illegible] eine Anwendung in der Physik. Aus dem Physikunterricht wissen Sie, dass [illegible] die A[illegible] Formel $W = F \cdot s$ berechnen kann. Diese Formel gilt in dieser Form jedoch [illegible]nter [illegible] Bedingung, dass F und s die gleiche Richtung haben, da man in diesem Sond[illegible]ll de[illegible]ielle[illegible]harakter von F und s vernachlässigen darf.

Im allgemeinen Fall muss man berücks[illegible], dass [illegible]rößen F u[illegible] s Ve[illegible]oren sind, und damit in unterschiedliche Richtungen zeigen kö[illegible]n. Man schrei[illegible]e Formel da[illegible]n wie folgt:

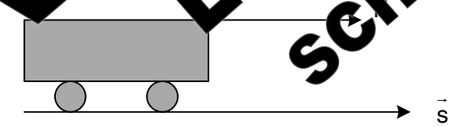
[illegible]rbeit: [illegible] $= \vec{F} \cdot \vec{s}$

Das Produkt der beiden Ve[illegible]en in [illegible]dungsfa[illegible]bt keinen [illegible]ktor, sondern einen so genannten **Skalar**, da die A[illegible] Richtung hat. A[illegible] dieser Eigens[illegible] bei der Multiplikation zweier Vektoren leite[illegible] de[illegible]usdru[illegible] **Skalarprod[illegible]** ab.

2. Eigenschaften [illegible]dukts veran[illegible]licht am B[illegible] der Kraft

Die f[illegible]bbil[illegible]n zeigen jew[illegible]inen Wagen, [illegible]sich waagerecht nach rechts in Richtung des [illegible]eges s [illegible]egt u[illegible] mit der Kr[illegible] F gezogen w[illegible]. Die Wirkung der Kraft für die gewünschte Bew[illegible]ng ist i[illegible]n drei Fällen [illegible]rdings unters[illegible]lich groß. Ergänzen Sie fehlende Angaben:

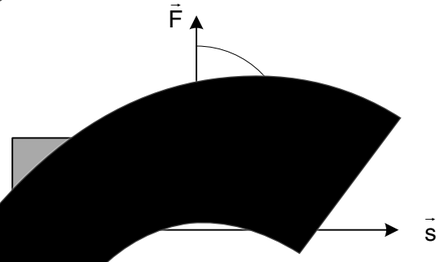
[illegible]1: $\vec{F} \parallel \vec{s}$



$\vec{F}$ zeigt in die Richtung des Weges $\vec{s}$, d.h.
Die Kraft $\vec{F}$ und der Weg $\vec{s}$ schließen einen Winkel von α = ___° ein. Die gesamte Kraft ist für die Bewegung wirksam und man kann ohne Beachtung des Vektorcharakters mit den Beträgen rechnen.

[illegible] $W = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}|$, wenn $\vec{F} \parallel \vec{s}$

$\vec{F} \perp \vec{s}$



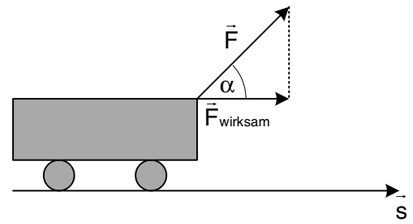
Mit eine[illegible]echt nach oben zeigt, kann man den W[illegible]e Richtung des horizontalen Weges $\vec{s}$ zieh[illegible]hochheben. Damit ist die Kraft für die gew[illegible]ung nicht wirksam und es wird in physikali[illegible]eine Arbeit verrichtet.

Es gilt: $W = \vec{F} \cdot \vec{s} =$ ___ [illegible] $\perp \vec{s}$

Dieses Anwendungsbeis[illegible]ich anschaulich eine wichtige Eigenschaft [illegible]rodukts:

Das Skalarprodukt zweier or[illegible]oren ist immer [illegible]

Allgemeiner Fall:
Die Kraft $\vec{F}$ und der Weg $\vec{s}$ schließen einen beliebigen Winkel ein



Nur der Teil der Kraft, der in die [illegible]ng de[illegible]eges $\vec{s}$ zeigt, also $\vec{F}_{wirksam}$ is[illegible] Bewe[illegible] damit für die verrichtete Arbe[illegible]m und es gilt somit entsprechend z[illegible]m Fall [illegible] $W =$ [illegible] $\vec{s}$

Der wirk[illegible]me Te[illegible] Kra[illegible]rksam hängt vom _____ [illegible] dem Weg $\vec{s}$ und der Kraft $\vec{F}$ [illegible]

Winkelbezi[illegible]hu[illegible]ur α:

co[illegible] $\frac{|\vec{F}_{wirksam}|}{|\vec{F}|}$ [illegible] $\vec{F}_{wirksam} =$ _____

Für die [illegible]chnung der A[illegible]eit gilt daher allgemein:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cos\alpha$$

Aufgabe [illegible]

Erlä[illegible]n S[illegible] [illegible]ormel $W = \vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cos\alpha$ [illegible]r Berechnung der Arbeit hergeleitet werden [illegible]ann.

_____

_____

_____

Aufgabe 10 [illegible]

Z[illegible] Fälle 1 und 2 in der Formel für den [illegible]en sind:

[illegible] $\Rightarrow W =$ _____

$\alpha = 90° \Rightarrow W =$ _____

3. Die Definition [illegible]

Ersetzt[illegible]bige Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, gilt für das S[illegible]

Skalarprodukt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\alpha$

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag schuldruckportal.de

4. Die Koordinatenform des Skalarprodukts

Aufgabe 10.3

In der Ebene sind die Ortsvektoren

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ gegeben.

a) Zeichnen Sie die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ [illegible] mit Lineal in das Koordinatensystem neben an ein.

b) Messen Sie den von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossenen Winkel α gen[illegible] mit dem Geodreieck:

$\alpha =$ _____

c) Berechnen Sie den Betrag (Länge) der Vektoren.

$|\vec{a}| =$ _____

$|\vec{b}| =$ _____

Berechnen Sie das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit Hilfe der berechneten Längen und des gemessenen Winkels:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\alpha =$ _____

e) Berechnen Sie [illegible] der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die folgende Summe:

_____

Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem [illegible] Skalarprodukt.

Die Ergebnisse sind _____

f) Begründen Sie auf Basis des Ergebnisses in e), warum das Skalarprodukt auch wie folgt berechnet werden kann: $\vec{a} \cdot \vec{b} =$

_____

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

5. Überblick zur Definition des Skalarprodukts

Definition des Skalarproduktes zweier Vektoren mit Hilfe des eingeschlossenen Winkels:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\alpha$$

Definition des Skalarproduktes zweier Vektoren in Koordinatenform:

Ebene: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$ **Raum:** $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$

Aufgabe 10.4

a) Lesen Sie in einer geeigneten Quelle zum Beweis für die Gültigkeit der Regeln im Kasten oben nach.

b) Informieren Sie sich mithilfe einer geeigneten Quelle über die Rechengesetze für das Skalarprodukt.

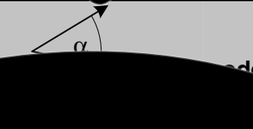
6. Folgerungen aus dem Skalarprodukt

a) Mit Hilfe des Skalarprodukts kann man überprüfen, ob zwei Vektoren orthogonal sind.

Wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal ist, dann gilt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ und: $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$

b) Löst man die Formel zur Definition des Skalarprodukts nach cos α um, so kann man den eingeschlossenen Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ berechnen. Die berechneten Werte für die Winkel liegen im Intervall [0°; 180°]

Winkel zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

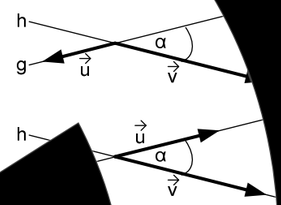


$\alpha < 90°$ oder $\alpha > 90°$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

[illegible]schnittwinkel von Geraden:

[illegible]schnittwinkel von Geraden berechnet man mit [illegible] Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ der beiden Geraden. Beim Schnitt von zwei Geraden g und h [illegible] Winkel, von denen einer größer als 90° und einer kleiner als 90° ist. Den kleineren Winkel, der **Schnittwinkel von Geraden** bezeichnet wird, erhält man, wenn man im Zähler den Betrag des Skalarprodukts verwendet. Ohne Betrag erhält man den von den Vektoren eingeschlossenen Winkel, und der kann dann [illegible]



[illegible] liefert in beiden Fällen α

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Aufgabe 10.5

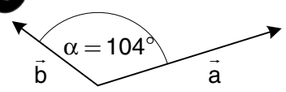
Die folgenden Beispiele zeigen grundlegende Anwendungen und den Umgang mit den Anwendungen des Skalarprodukts. Ergänzen Sie fehlende Anmerkungen und Rechenschritte.

1. Berechnen des Winkels zwischen zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$

   Man setzt beide Vektoren in die Formel für die Berechnung des Winkels ein.

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}}{\sqrt{\quad}\cdot\sqrt{\quad}} = \frac{\quad + \quad + \quad}{\sqrt{\quad}\cdot\sqrt{\quad}} = \frac{\quad}{\quad} = -0{,}24$$

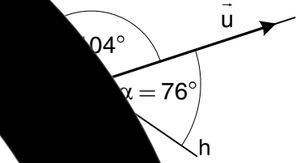
$$\alpha = \cos^{-1}(-0.24) \approx \quad$$



Berechnen des Schnittwinkels zwischen den Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$

Man setzt die Richtungsvektoren der Geraden in die Formel ein. (Beachten Sie dabei, dass die Richtungsvektoren mit den Vektoren aus 1. übereinstimmen.)

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{|\quad + \quad + \quad|}{\sqrt{\quad + \quad + \quad}\cdot\sqrt{\quad + \quad + \quad}} = \frac{|\quad + \quad + \quad|}{\quad} = 0{,}24$$



$\alpha = \quad$

Erläutern Sie die Wirkung der Betragsstriche im Zähler des Bruchs:

3. Prüfen, ob zwei Vektoren oder zwei Geraden orthogonal sind.

   a) Erläutern Sie folgende Rechnung:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{0}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = \cos^{-1}(0) = 90°$$

4. Gegeben sind die Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ \end{pmatrix}$ h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$ und die Gerade $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

   Alle drei Geraden liegen in einer Ebene und haben jeweils einen Schnittpunkt. Geben Sie an, welche der Geraden orthogonal sind. Ergänzen Sie die folgenden Rechnungen und den Text ergänzen:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \quad \\ 3 \\ \quad \end{pmatrix} = \quad + \quad + \quad = 8$$ Die Geraden ___ und ___ sind _____

$$\vec{\quad}\cdot\vec{\quad} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \quad + \quad + \quad = 0$$ Die Geraden ___ und ___ sind _____

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \quad + \quad + \quad = 3$$ Die Geraden ___ und ___ sind _____

Erläutern Sie die Wirkung der Betragsstriche im Zähler des Bruchs:

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Algebra

selbstorganisiert erlernen

Kap

Vektor- oder Kreuzp

02-031-266

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen 9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen 17

Einführung in die Vektorrechnung

Kapitel 3 – Koordinatensysteme 23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu des Vektoren 25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren 33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Linear[illegible]ation 43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und U[illegible]igkeit 47

Geraden in der Ebene und [illegible] Rau[illegible]

Kapitel 8 – Parameterdarst[illegible]ng von Gera[illegible] 49
Kapitel 9 – Lagebeziehung [illegible] 55
Kapitel 10 – Skala[illegible] 59
Kapitel 11 – V[illegible] - od[illegible]reuzpr[illegible]kt 65

Eben[illegible]un[illegible]

Kap[illegible] 12 – D[illegible]llung von Ebenen 69
Kap[illegible] 13 – Be[illegible]dere Ebenen 81
Kapitel [illegible] [illegible]beziehungen bei Ebenen 85
Kapitel 15 – Abstände 99
Kapitel 16 – Schnittw[illegible]el 105
Kapitel 17 – Eben[illegible]scharen 107

Lineare Abbildungen

Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen 119
Kapitel 19 – [illegible] 125
Ka[illegible] 137
[illegible] 143
[illegible]rehungen 145
Kapitel 23 – Verkettung von linearen Abbildungen 149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen Ax = x' 153

Gesa[illegible]bra selbstorganisiert erlernen ([illegible]-031-266)
S[illegible]

[illegible]rbehalten. A[illegible]ghts reserved.
[illegible]k, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
[illegible] aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

[illegible]SelbstVerlag
[illegible]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[illegible]
[illegible]lehrerselbstverlag.de
[illegible]www.f-druck.de

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Kapitel 11: Vektor- oder Kreuzprodukt

Neben dem Skalarprodukt, bei dem das Ergebnis der Multiplikation ein Skalar ist, gibt es eine weitere Möglichkeit Vektoren miteinander zu multiplizieren. Wie der Name Vektorprodukt bereits vermuten lässt, ist das Ergebnis dieser Multiplikation ein Vektor.

Eine Anwendung dieser Multiplikation ist in der Physik bei der Berechnung der Lorentzkraft, die bei der Bewegung geladener Teilchen im Magnetfeld auftritt, zu finden.

Die Definition des Vektor- oder Kreuzprodukts zweier Vektoren des $\mathbb{R}^3$ aus $\vec{a} \times \vec{b}$ (gesprochen: a kreuz b) kann in jedem Tafelwerk nachgeschlagen werden und ist

Definition Vektorprodukt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Neben der Anwendung dieser Formel kann man auch geeignete Taschenrechner einsetzen, um das Vektorprodukt zu ermitteln. Es bestehen zudem die Möglichkeit dieses Produkt manuell zu berechnen. Hierbei wird ersichtlich, dass dieses Produkt auch als Kreuzprodukt bezeichnet.

Berechnung des Kreuzprodukts ohne Verwendung der Formel oder des Taschenrechners:

1. Schritt
Die Vektoren untereinander anhängen.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Schritt
x-Komponente berechnen:

$$\Rightarrow -1 \cdot 1 - 3 \cdot 1$$

y- und z-Komponenten werden über Kreuz multipliziert.

3. Schritt
y-Komponente berechnen:

$$\Rightarrow 3 \cdot 3 - 2 \cdot 1$$

z- und angehängte x-Komponenten werden über Kreuz multipliziert.

$$\begin{pmatrix} -1 \cdot 1 - 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 3 - 2 \cdot 1 \\ 2 - (-1) \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - 3 \\ 9 - 2 \\ 2 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

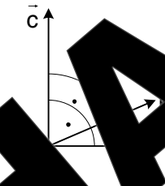
4. Schritt
z-Komponente berechnen:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

x- und y-Komponenten werden über Kreuz multipliziert.

Eigenschaften des Vektorprodukts $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$

1. Der Vektor $\vec{c}$ ist orthogonal zu den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$



Aufgabe 11.1

Ergänzen und erläutern Sie die folgende Rechnung:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_ = 0$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_ = 0$$

2. Das Vektorprodukt bildet ein Rechtssystem.

Der Vektor an der zweiten Position, hier $\vec{b}$, zeigt in Richtung Zeigefinger.

Der Vektor an der ersten Position, hier $\vec{a}$, zeigt in Richtung Daumen.

$\vec{c}$ zeigt in Richtung Mittelfinger.

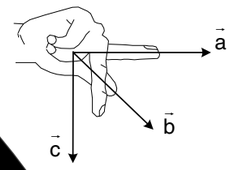
$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$

Vertauschen von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bewirkt Umkehrung von $\vec{c}$.

$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{c}$

Die Richtung des Vektorprodukts ab

...net, und kann mit der **Rechte-Hand-Regel** ermittelt werden.



Aufgabe 11.2

Weisen Sie durch Rechnung nach, dass gilt: $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$

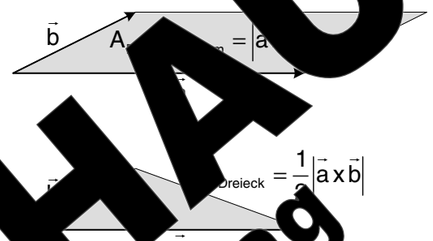
$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ \_ \\ \_ \end{pmatrix}$$

=

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

3. Mit dem Vektorprodukt kann man Flächen berechnen.

Für die Fläche eines Parallelogramms, das durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird, gilt:



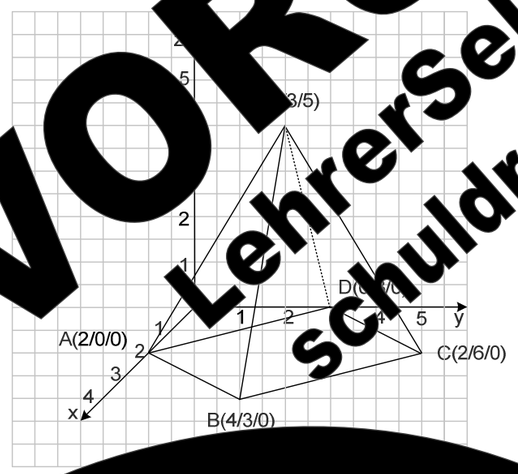
$A_{Parallelogramm} = |\vec{a} \times \vec{b}|$

Für das markierte Dreieck gilt demnach:

$A_{Dreieck} = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$

Aufgabe 11.3

Zeigen Sie, dass die Grundfläche der gebildeten Pyramide eine Raute ist und ergänzen bzw. erläutern Sie die Berechnung der nachfolgenden drei Berechnungen:



Berechnung 1:

$\_\_\_\_\_ = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ \_ \\ \_ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ \_ \\ \_ \end{pmatrix} \right|$

$= \left| \begin{pmatrix} \_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_ \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} \right|$

$= \sqrt{144} = 12$

Erläuterung:

Berechnung 2:

$\_\_\_\_\_ = 4 \cdot \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right|$

$= 2 \cdot \left| \begin{pmatrix} \_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_ \end{pmatrix} \right| = 2 \left| \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} \right|$

$= 2\sqrt{\_\_\_\_\_} = 2\sqrt{361}$

Erläuterung:

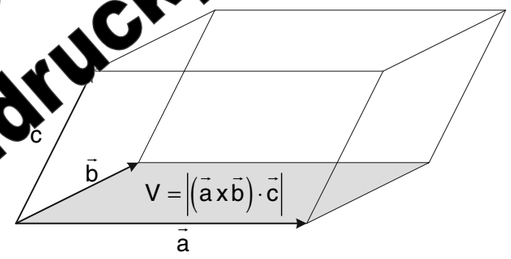
Berechnung 3:

A = 12 + 38 = 50

Erläuterung:

3. Mit dem Vektorprodukt kann man Volumen berechnen

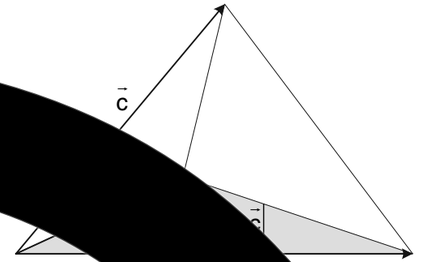
a) Volumen eines Spats



$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$

b) Volumen

Grundfläche

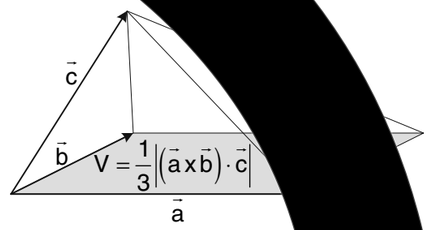


c) Volumen einer beliebigen Pyramide mit beliebiger Grundfläche

$\vec{a}$ und $\vec{b}$

Parallelogramm ein

Quader



$V = \frac{1}{3}|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$

Erläuterungen:

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Alge
selbstorganisiert

Kap

Darstellung von E

02-031-266

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen 9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen 17

Einführung in die Vektorrechnung

Kapitel 3 – Koordinatensysteme 23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu des Vektoren 25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren 33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Linea 43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und U 47

Geraden in der Ebene und

Kapitel 8 – Parameterdarst 49
Kapitel 9 – Lagebeziehung 55
Kapitel 10 – Skala 59
Kapitel 11 – V 65

Eben

Kapitel 12 – D 69
Kapitel 13 – Be 81
Kapitel 14 – 85
Kapitel 15 – Abstände 99
Kapitel 16 – Schnittw 105
Kapitel 17 – Eben 107

Lineare Abbildungen

Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen 119
Kapitel 19 – 125
Kapitel 20 – 137
Kapitel 21 – 143
Kapitel 22 – 145
Kapitel 23 – Verkettung von linearen Abbildungen 149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen Ax = x' 153

Gesa bra selbstorganisiert erlernen (L 031-266)
S

rbehalten. ights reserved.
, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

SelbstVerlag
tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ
lehrerselbstverlag.de
www.f-druck.de

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

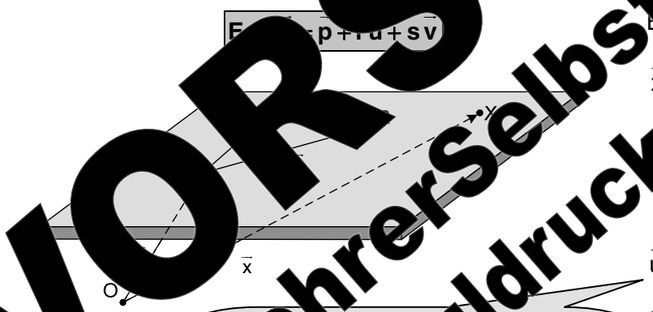
Kapitel 12: Darstellung von Ebenen

Aufgabe 12.1

Während Geraden im Raum in der linearen Algebra nur mit Hilfe der [illegible]gleichung angegeben werden, kann man Ebenen mit drei verschiedenen Darstellungsform[illegible]. Erarbeiten Sie sich mit Hilfe der folgenden Informationen und Aufgabenstellun[illegible] die Eb[illegible]stellung im Raum.

1. Ebenen in Parameterdarstellung

Sie wissen bereits, dass eine Gerade durch zwei P[illegible] und mit Hilfe der Parametergleichungen g: $\vec{x} = \vec{p} + s\overrightarrow{PQ}$ oder g: $\vec{x} = \vec{p} + s\vec{u}$ ange[illegible] wird. [illegible] man aus der folgenden Abbildung erkennt, kann durch Hinzufügen eines dritten P[illegible]es R und dar[illegible]urch Hinzufügen eines zweiten Vektors von P nach R eine Ebene festgelegt w[illegible]n (vgl. [illegible]itel 7 Lineare Unabhängigkeit). Durch Linearkombination der beiden [illegible]ren [illegible]d $\vec{v}$ [illegible]steht entsprechend zur Geradengleichung eine Ebenengleichung in Param[illegible]darstellung:



Bezeichnungen:

$\vec{x}$: [illegible]ktor zu einem beliebigen Punkt [illegible]der Ebene

$\vec{p}$: Stützvektor der Ebene = Ortsvektor zum Punkt P

$\vec{u}$: Spannvektor $\vec{u} = \overrightarrow{PQ}$

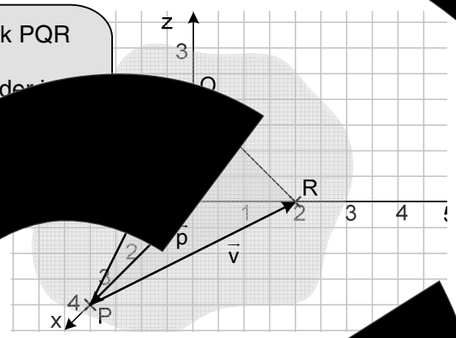
$\vec{v}$: Spannvektor $\vec{v} = \overrightarrow{PR}$

Man spricht bei Ebenen nicht mehr von einem Richtungsvektor, sondern von zwei Spannvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$, welche die Ebene aufspannen.

Um die [illegible]darzustellen, werden Ebenen, wie im folgenden [illegible]atensystem dargestellt.

[illegible]eben ist eine Ebene, welche die folgenden Pu[illegible]0), Q(0/2/0) und R(0/0/2)

Das Dreieck PQR ist nur ein Ausschnitt der [illegible] unendlic[illegible] aus[illegible] E[illegible]



$\overrightarrow{Q} + s\overrightarrow{PR}$

E: $\begin{pmatrix} -4 \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

oder mit g[illegible]annvektoren

E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Ebenen in Normalendarstellung

Für die Normalendarstellung der Ebene benötigt man einen Stützvektor $\vec{p}$ und [illegible] beliebigen Repräsentanten des Vektors, der orthogonal zur Ebene E verläuft. Di[illegible] Vektor [illegible] **Normalenvektor $\vec{n}$** der Ebene bezeichnet. Wie man den folgenden A[illegible]n entnehmen kann, legen der Stützvektor die Position der Ebene und der Normalenvektor [illegible] Lage der Ebene im Raum fest.

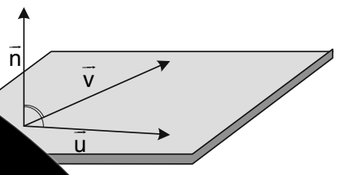
Der Stützvektor $\vec{p}$ ist der Ortsvektor eines beliebigen bekannten Punktes auf E.

Die Lage der [illegible] wird [illegible]h den Normalenvektor bes[illegible] Ände[illegible] Normalenvektors [illegible] R[illegible]ung, verände[illegible]h auch die [illegible]age der Ebene.

Begr[illegible]n Sie, warum [illegible]n den Norma[illegible]nvektor einer Ebene mit Hilfe des Vektorprodukts bestimmen kann, in dem Sie den fo[illegible]den Satz vervollständigen:

Das Vektorprodukt aus zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$

erzeugt einen Vekto[illegible] zu den beide[illegible] sen[illegible]



[illegible]espannt wird. Damit gilt für d[illegible]

[illegible]ektor $\vec{n}$ der Ebene:

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$$

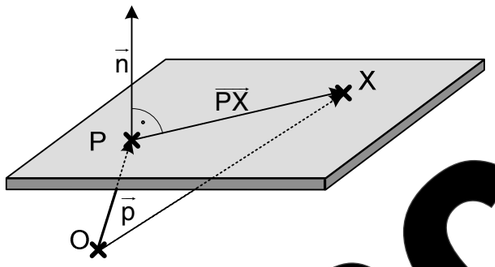
[illegible]nvektoren [illegible]enau [illegible]ektoren

Für di[illegible] gilt damit:

$$\begin{pmatrix} \cdot \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \cdot \end{pmatrix}$$

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Anhand der folgenden Abbildung wird nun die Überlegung, die der Ebenendarstellung in Normalenform zugrunde liegt, erläutert:



Bezeichnung

$\vec{x}$: Ortsvektor zu einem beliebigen Punkt bekannt Punkt auf der Ebene

$\vec{p}$: Ortsvektor der Ebene = Ortsvektor zum Punkt

$\vec{n}$: beliebiger Repräsentant des Normalenvektors der Ebene E

$\overrightarrow{PX}$: Vektor vom Punkt $P(p_1 / p_2 / p_3)$ zum Punkt $X(x_1 / x_2 / x_3)$

Die Ebenengleichung ergibt sich aus der Zusammenfassung der drei Überlegungen:

1. Der Vektor $\vec{n}$ und der Vektor $\overrightarrow{PX}$ sind [illegible]

2. Bei orthogonalen Vektoren ist das Skalarprodukt Null: $\overrightarrow{PX} \cdot \vec{n} = 0$

3. Für den Vektor $\overrightarrow{PX}$ gilt: $\overrightarrow{PX} = \vec{x} - \vec{p}$

$$E_N: \ (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{oder} \quad \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0$$

Für das Beispiel 1 gilt damit:

E_N: [illegible] E_N: $\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

3. Darstellung einer Ebene in Koordinatenform

Multipliziert man das Skalarprodukt der Ebene aus der Normalendarstellung aus, erhält man die Ebene in Koordinatendarstellung.

$$\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow n_1x + n_2y + n_3z - (n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3) = 0$$

$$\Rightarrow n_1x + n_2y + n_3z = d$$

Wichtig: Die Vorfaktoren von x, y und z entsprechen den Komponenten des Normalenvektors.

Da man die Zahlenwerte von n_i und p_i kennt, ergibt diese Summe einen Zahlenwert, den man mit d bezeichnet.

In Tafelwerken findet man die Koordinatendarstellung in der Regel in der folgenden Form:

$$E_K: \ ax + by + cz = d \quad \text{mit} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie durch Ausmultiplizieren der Normalendarstellung, dass sich die Ebene aus Beispiel 1, wie unten angegeben, darstellen lässt:

$$\left[\begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \ \_\_\_\_ + \_\_\_\_ + \_\_\_\_ + \_\_\_\_) = 0$$

E_K: x + [illegible]

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag schuldruckportal.de

Aufgabe 12.2

Eine Ebene F ist durch die Punkte A(–4 / 1 / 3), B(1 / 0,5 / 1) und C(2 / –3 / [illegible] gegeben.

a) Zeigen Sie durch Rechnung, dass sich bei der Wahl von Punkt [illegible] punkt [illegible] die Ebene die folgende Ebenengleichung in Parameterdarstellung erg[illegible] $E_P: x \begin{pmatrix} -4 \\ [illegible] \\ [illegible] \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

[illegible]eln Sie di[illegible] Norm[illegible]endarste[illegible] der Ebene F. (Zur Kontrolle: $E_N: \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 17 \\ 34 \\ 34 \end{pmatrix} = 0$)

c) Ermitteln Sie die Gleichung der Ebene F in Koordinatendarstellung und zeigen Sie, dass [illegible] Ergebnis mit der Koordinatendarstellung der Ebene E im Beispiel 1 von Aufga[illegible] 1 übe[illegible]timmt.

A[illegible]

Vergleichen Sie die Ergebnisse aus den Aufgaben 12.1 und 12.2 und ergänzen Sie:

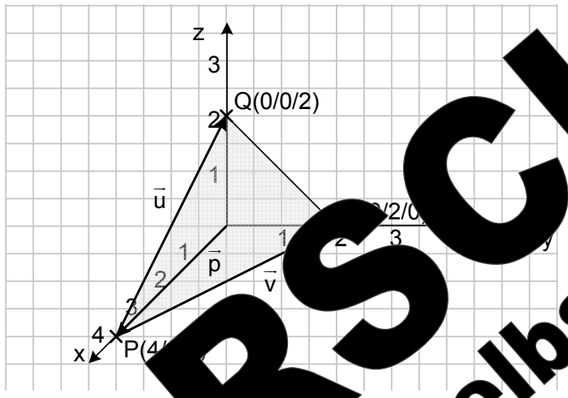
- Die Parameterdarstellungen der Ebenen E und F weisen _____ Gemeinsamkeiten auf und man kann _____ erkennen, dass es sich um die gleichen Ebenen handelt.
- D[illegible] _____ [illegible] Normalenvektoren sin[illegible] _____.
- Die Koordinatendarstellung der Ebenen E und F ist _____.
- Wenn man über[illegible] zwei Ebenen identisch sind, gi[illegible] Die _____ ist dafür ungeeignet, da ein un[illegible]ene ve[illegible] kann.
- [illegible] _____darstellung ist am besten geeignet, da gleiche [illegible]tische [illegible]ngen haben.

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag schuldruckportal.de

Aufgabe 12.4

Zusammenhang der Koordinatendarstellung einer Ebene und ihrer Achsenabschn

Die Ebene aus dem Einstiegsbeispiel in Aufgabe 12.1 soll hier ern… …rstellu… …er Zusammenhänge herangezogen werden.



…dinat…leichung in der einfachsten …ung:

E_K: x + 2 + 2z = 4

Umfor…g der K…dinatengleichung:

W… m… …telte Koordi…tendarstellung d… Ebene E so umformt, dass auf der rechten Seite de… …eichn… …eichens ei… …tent, erhält m… die Gleichung:

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=1$$

Formulieren Sie einen Zusammenhang zwischen den Nennern der umgeformten Koordinatendarstellung der Ebene E sowie den Koordinaten der Achsenabschnitte, indem Sie die folgenden Lücken vervollständigen:

…z = 1

…abschnitt auf der …-Achse P(4/0/0)

Achsen… …Achsenabschnitt auf der-…-Achse Q(0/0/2)

Stellt man eine Ebene in der Koordinatendarstellung so dar, dass … …leichheitszeichen eine 1 steht und im … …e links vom Gleichheitszeichen … …z ohne Vorfaktoren erscheinen, … _____ der Eben… …r Nenner bestimmen.

D… …oordinaten… …ellung einer Ebene wird auch als **Achsen… …form** bezeichnet.

4. Eine Ebene – Drei verschiede Darstellungen – Zusammenhänge am Beispiel aus A…be 12.1

Die Ebene E enthält die Punkte:

P(4/0/0) Q(0/2/0) R(0/0/2)

Ortsvektor von P als Stützvektor wählen

Spannve… … $\vec{u}=\overrightarrow{PQ}$ und … …den

Zu einer Ebene gibt es je nach Wahl der drei Punkte unendlich viele unterschiedliche Parameterdarstellungen.

Spannvektoren darf man kürzen.

Parameterdarstellung

$E_P: \vec{x} = \overrightarrow{OP} + r\overrightarrow{PQ} + s\overrightarrow{PR}$

$E_P: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-4\\2\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-4\\0\\2\end{pmatrix}$

Der Stützvektor von E ist der bekannte Punkt P auf der Ebene

Das Vektorprodukt … … ergibt den Normalenvektor

Normalenvektoren darf man kürzen.

Gleiche Ebenen haben gleiche gekürzte Normalenvektoren.

…ndarstellung

$E: \left[\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} = 0$

…larprodukt

Gleiche Ebenen haben in Koordinatendarstellung identische Gleichungen.

$E_K: x + 2y + z$

…natendarstellung

Koeffizienten bilden den Norma…

$$x+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=1$$

Achtung
Im Zä… …
und …
Z…

…s ein + …auf der …eite eine 1.

…er liefern die Achsenabschnitte der Ebe…

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Aufgabe 12.5

Vertiefendes Beispiel

Die Punkte P(1/1/0), Q(2/0/1) und R(0/1/2) liegen in einer Ebene E.

a) Ermitteln Sie eine Parameter-, eine Normalen- und eine Koordinatendarstellung der Ebene. (Kontrollergebnis: E: 2x + 3y + z = 5)

b) Erläutern Sie, warum es sinnvoll ist, ein Kontrollergebnis in Koordinatendarstellung oder in der Achsenabschnittsform anzugeben.

c) Zeichnen Sie die Ebene anhand ihrer Achsenabschnitte so, dass ein räumlicher Eindruck von der Lage der Ebene entsteht.

5. Zusammenfassung der Ergebnisse zur Darstellung von Ebenen

Parameterdarstellung: $E_P: \vec{x} = \vec{p} + r\vec{u} + s\vec{v}$

Normalendarstellung: $E_N: (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$ mit $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$

Koordinate… mit $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

…itte

$$\frac{x}{\frac{d}{a}} + \frac{y}{\frac{d}{b}} + \frac{z}{\frac{d}{c}} = 1$$

Achsenabschnitt x – Achse:

Achsenabschnitt y – Achse: Y(0…

…chnitt z – Achse: Z(0/0…

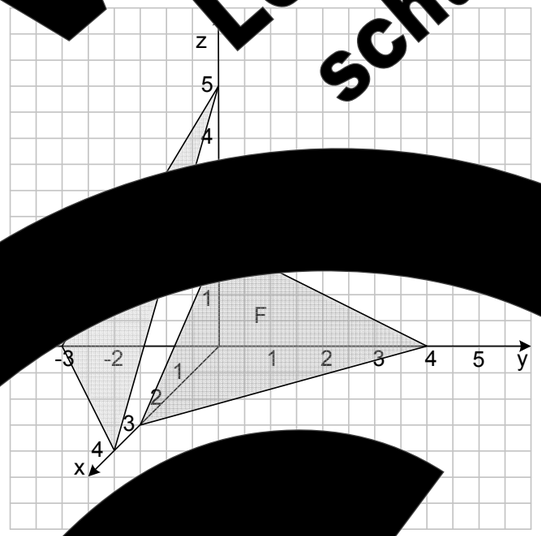
VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Aufgabe 12.6

Zeichnen Sie die Ebene E: 3x + 2y + 6z = 6 mit Hilfe der Achsenabschnitte anschaulich.

Aufgabe 12.7

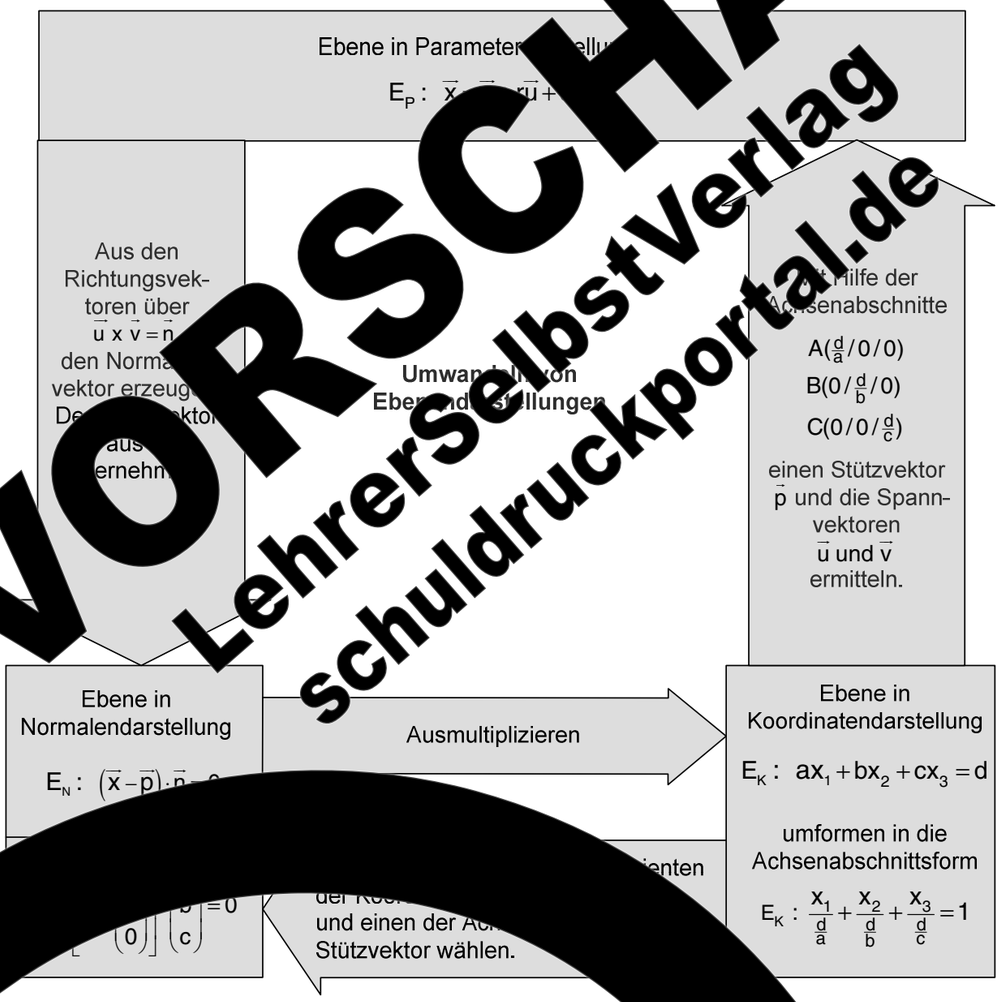
Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E in Koordinatenform mit dem geringst möglichen Rechenaufwand.



Ergänzungen:

6. Überblick Umwandeln von Ebenen

Es gibt eine Vielzahl von Möglichkeiten, eine Ebene von einer Darstellung in eine andere umzuwandeln. Die in der folgenden Abbildung dargestellten Verfahren geben in Pfeilrichtung gelesen eine begrenzte Auswahl an Varianten an, mit der man jede Darstellung einer Ebene in eine andere umwandeln kann.



Ergänzungen:

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Algebra

selbstorganisiert erlernen

Kap

Besondere Ebe

02-031-266

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen 9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen 17

Einführung in die Vektorrechnung

Kapitel 3 – Koordinatensysteme 23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu des Vektoren 25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren 33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Linear ... nation 43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und U... ...igkeit 47

Geraden in der Ebene und ... Rau...

Kapitel 8 – Parameterdarst... ...ng von Gera... 49
Kapitel 9 – Lagebeziehung 55
Kapitel 10 – Skala... 59
Kapitel 11 – V... - od... ...reuzpr... ...kt 65

Eben... ...un...

Kap... 12 – D... ...llung von Ebenen 69
...ap... 13 – Be... ...dere Ebenen 81
...pite... ...beziehun... ...ei Ebenen 85
...tel 15 – Abstände 99
...l 16 – Sc...ittw... 105
Ka...tel 17 – Eben... ...scharen 107

Lineare Abbildungen

Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen 119
Kapitel 19 – 125
Ka... 137
... . 143
... ...enungen 145
...tel 23 – Verkettung von linearen Abbildungen 149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen Ax = x' 153

Gesa... ...bra selbstorganisiert erlernen (... ...-031-266)
S...

...rbehalten. A... ...ghts reserved.
...k, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
... aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

...SelbstVerlag
...tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ...
...lehrerselbstverlag.de
...www.f-druck.de

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

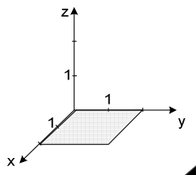
Kapitel 13: Besondere Ebenen

Aufgabe 13.1

In den folgenden Abbildungen sind die Koordinatenebenen abgebi[illegible]eln Sie zu jeder Koordinatenebene eine möglichst einfache Gleichung in Parameterd[illegible]rmalendarstellung und Koordinatendarstellung.

x,y-Ebene

Parameterdars[illegible]g:

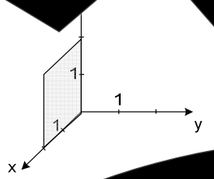


N[illegible]llung:

[illegible]tendarstellung:

x[illegible]be

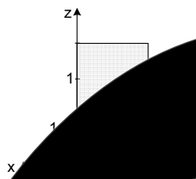
Parameterdarstellung:



Normalendarstellung:

[illegible]ene

Parameterdarstellung:



[illegible]darstellung:

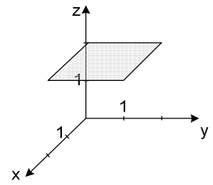
Koordinatendarstellung:

Aufgabe 13.2

In den folgenden Abbildungen sind zu den Koordinatenebenen parallele Ebenen ab[illegible]det. E[illegible]teln Sie zu jeder abgebildeten Ebene eine möglichst einfache Gleichung in Pa[illegible]terdars[illegible] Normalendarstellung und Koordinatendarstellung.

Zu den Koordinatenebenen parallele Ebenen

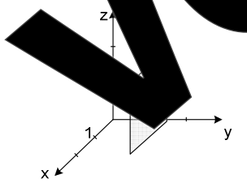
Parameterdarstellung:



Normalendarstellung:

[illegible]tenda[illegible]g:

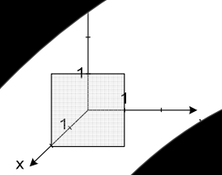
[illegible]arameterdar[illegible]ung:



Norm[illegible]endarst[illegible]ung:

Koordinatendarstellung:

Parameterdarstellung:



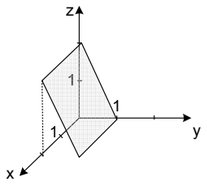
Normalendarstellung:

[illegible]arstellung:

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Aufgabe 13.3

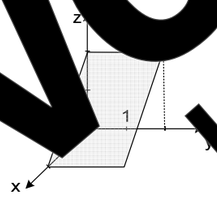
In den folgenden Abbildungen sind Ebenen dargestellt, die zu jeweils einer Koordinatenachse parallel sind. Ermitteln Sie zu jeder abgebildeten Ebene eine möglichst einfache Gleichung in Parameterdarstellung, Normalendarstellung und Koordinatendarstellung.



Parameterdarstellung:

Normalendarstellung:

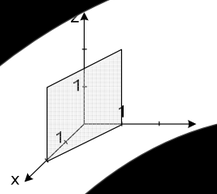
Koordinatendarstellung:



Parameterdarstellung:

Normalendarstellung:

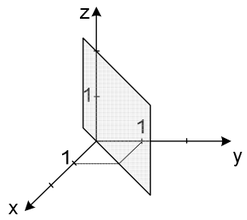
Koordinatendarstellung:



Parameterdarstellung:

Normalendarstellung:

Koordinatendarstellung:



Parameterdarstellung:

Normalendarstellung:

Koordinatendarstellung:

Aufgabe 13.4

a) Formulieren Sie eine Regel, welche beschreibt, wie man an der Koordinatendarstellung einer Ebene erkennen kann, dass sie zu einer der Koordinatenebenen parallel verläuft.

Formulieren Sie eine Regel, welche beschreibt, wie man an der Koordinatendarstellung einer Ebene erkennen kann, dass sie zu einer der Koordinatenachsen parallel verläuft.

c) Formulieren Sie eine Regel, welche beschreibt, wie man an der Koordinatendarstellung einer Ebene erkennen kann, dass die Ebene durch den Ursprung verläuft.

Parameterdarstellung:

Normalendarstellung:

Koordinatendarstellung:

Ergänze

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Alge
selbstorganisiert erlernen

Ka

Lagebeziehungen be

02-031-266

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen 9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen 17

Einführung in die Vektorrechnung

Kapitel 3 – Koordinatensysteme 23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu des Vektoren 25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren 33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Linear 43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und U 47

Geraden in der Ebene und

Kapitel 8 – Parameterdarst 49
Kapitel 9 – Lagebeziehung 55
Kapitel 10 – Skala 59
Kapitel 11 – V 65

Eben

Kap **12** – D 69
3 – Be 81
Kapitel 85
tel 15 – Abstände 99
l 16 – Schnittw 105
Kapitel 17 – Eben 107

Lineare Abbildungen

Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen 119
Kapitel 19 – 125
K 137
..... 143
..... 145
tel 23 – Verkettung von linearen Abbildungen 149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen Ax = x' 153

Gesa bra selbstorganisiert erlernen (L 031-266)
S

rbehalten. ghts reserved.
, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

SelbstVerlag
tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ
lehrerselbstverlag.de
www.f-druck.de

Kapitel 14: Lagebeziehungen bei Ebenen

In der linearen Algebra gibt es für die Untersuchung der Lagebeziehungen zw[illegible]n Eb[illegible] im Raum und Punkten sowie Geraden und anderen Ebenen eine Vielzahl vo[illegible]lichkeit[illegible] jedoch völlig ausreichend eine Methode zu beherrschen. Daher wird in den folge[illegible]schnitte[illegible] für die verschiedenen Aufgabentypen jeweils nur eine Variante vorgeschlag[illegible]

1. Lagebeziehung Ebene E und Punkt R

Prinzipielle Vorgehensweise:

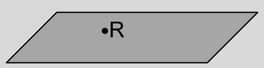
Die Koordinaten bzw. Komponenten d[illegible]rtsvektors z[illegible]unkt R, also $\vec{r}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$ werden unabhängig

von der Darstellung der Eben[illegible]er E[illegible]ngle[illegible]ung für d[illegible]n[illegible]onenten x[illegible]nd z eingesetzt.

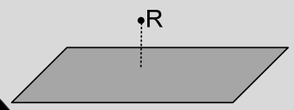
Ebene in Parameter[illegible]stellung	Ebene[illegible] Normale[illegible]stellung	Ebenen in Koordinatendarstellung
$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} p[illegible] \\ [illegible] \\ p_3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} u[illegible] \\ [illegible] \\ [illegible] \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} v_1 \\ [illegible] \\ v_3 \end{pmatrix}$ [illegible]e Pa[illegible]s und t mit Hil[illegible] eines [illegible]S berechnen. [illegible]Berechnung des [illegible]S ist oft [illegible]ändig. Dah[illegible] ist es günstiger, di[illegible] Ebene in die Koo[illegible]natendars[illegible]llung umzurechnen.	Ebene in [illegible]oordinatenda[illegible]stellung [illegible]nformen und dann wie rechts ne[illegible]al beschrie[illegible]m.	Komponenten von r für x, y und z einsetzen. $ar_1 + br_2 + cr_3 = d$ Linke Seite der Gleichung berechnen.

Interpretation der Ergebnisse

Rechnung ist wider[illegible]ruchsfrei ⇒ R liegt in E



[illegible]echnung liefert Widerspruch ⇒ [illegible]

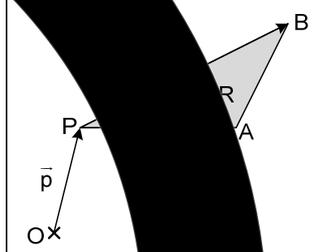


Zusatzinfo:

Bei Frag[illegible]em Dreieck PAB liegt, (s. Al[illegible]meterdarstellung ge[illegible]mittelt zu können.

[illegible]B, wenn für s und t [illegible] die folgenden drei Bedingungen gelten:

[illegible] $t < 1$ und
[illegible] $s < 1$ und
[illegible] $t + s < 1$



Aufgabe 14.1

Zeigen Sie, dass der Punkt R(6/0/2) auf der Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ [illegible] \\ [illegible] \end{pmatrix}$ liegt. E[illegible]zeig[illegible] die beiden Rechnungen und beurteilen Sie, bei welchem Weg der R[illegible]chenau[illegible]nd[illegible]ist.

Weg 1

Mit der Parameterdarstellung arbeiten und das[illegible] lösen.

$\vec{r}$ in E einsetzen:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ [illegible] \end{pmatrix}$$

LGS erstell[illegible]

I [illegible] [illegible] t = [illegible]

II [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible] $-s$ [illegible] t = -1 [illegible]

IV $-2t$ = [illegible]

t = -1

t in III: $-s + 1 = -1$

[illegible]

$-5 = -5$

[illegible]das LGS widerspruchsfrei gelöst werden kann, [illegible]egt R auf E.

Beurteilu[illegible]

[illegible]

Ebenen[illegible]ichung in K[illegible]rdinatendarstellung [illegible]

[illegible]malenvek[illegible]estimmen:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} [illegible] \\ [illegible] \\ [illegible] \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} [illegible] \\ [illegible] \\ [illegible] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [illegible] \\ [illegible] \\ [illegible] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$E: \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} [illegible] \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} = 0$$

E: [illegible]

$E: -2x - 3y + 7z = 2$

Koordinaten von R einsetzen:

[illegible]$12 + 0 + 14 = 2$
$2 = 2$

[illegible]uch ⇒ R liegt in E

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Aufgabe 14.2

Prüfen Sie, ob der Punkt R(1/0/2) auf der Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\1\\[illegible]\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-1\\[illegible]\end{pmatrix}$ li[illegible] Bere[illegible]en Sie beide Wege mit Hilfe des vorherigen Beispiels und geben Sie mit Begrü[illegible]ung [illegible]cher Rechenweg einfacher für Sie ist.

Weg 1

Mit der Parameterdarstellung arbeiten [illegible] das LGS lösen.

$\vec{r}$ in E einsetzen:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\1\\[illegible]\end{pmatrix} + [illegible]\begin{pmatrix}1\\[illegible]\\0\end{pmatrix}$$

LGS e[illegible]:

I [illegible] = [illegible] $\Rightarrow t = [illegible]$

[illegible] s [illegible] = 1

$-s$ [illegible] = [illegible] $\Rightarrow s = 1$

s,t in II: $-[illegible] \neq 1$

Widerspruch $\Rightarrow$ R liegt nicht in E

[illegible] 2

E[illegible]ngleichung in Koordinatendarstellung um[illegible]men.

Normale[illegible] bestimmen.

$$\begin{pmatrix}[illegible]\\[illegible]\\[illegible]\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}[illegible]\\[illegible]\\[illegible]\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\underline{\quad}\\\underline{\quad}\\\underline{\quad}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$E: \left[\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = 0$$

E: _____

$E: x + y - z = 1$

R in E einsetzen: $1 + 0 - 2 = 1$
$-1 \neq 1$

Widerspruch $\Rightarrow$ R liegt nicht in E

[illegible]

_____

_____

_____

[illegible]Übungen: _____

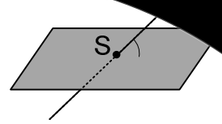
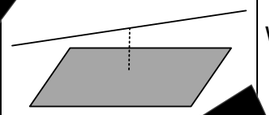
_____

2. Lagebeziehung Ebene E und Gerade g

Prinzipielle Vorgehensweise:

Die Komponenten x, y und z des Vektors $\vec{x}$ der Ebenengleichung E: [illegible] $\vec{u} + t\vec{v}$ [illegible]urch die entsprechenden Komponenten der Geradengleichung g: $\vec{x} = \vec{q} + r\vec{w}$ e[illegible]zt.

Gegeben: $E: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}[illegible]\\[illegible]\\q_3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix}$ bzw. $\begin{matrix}x = q_1 + rw_1\\y = q_2 + rw_2\\z = q_3 + rw_3\end{matrix}$

Ebene in Parameterdarstellung	[illegible]ene in N[illegible]alen-da[illegible]	Ebenen in Koordinatendarstellung
Die Ebenengleichung mit der Ge[illegible]gleichung gleichsetzen un[illegible] LG[illegible] nach r, s und t auflöse[illegible] $\vec{q} + r\vec{w} = \vec{p} + s\vec{u} + t\vec{v}$ oder $\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\q_3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}[illegible]\\[illegible]\\w_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p_1\\p_2\\[illegible]\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\[illegible]\end{pmatrix}$ [illegible] Be[illegible]nnung des LGS mit d[illegible] [illegible]t im Allgemeine[illegible] aufw[illegible] daher bess[illegible]r mit der Koordinatendarstellung [illegible]beiten. Wenn geprüft werden soll, ob der Durchstoßpunkt in einem bestimmten Dreieck liegt müssen s und t bestimmt werden. (Vgl. Zusatzinf[illegible] Lagebeziehu[illegible]	[illegible] in Koo[illegible]natendar-st[illegible]ng [illegible]formen [illegible] dann wie [illegible] neb[illegible] be[illegible]ben.	Kom[illegible]nenten vom [illegible]ktor $\vec{x}$ der [illegible]dengleichu[illegible] a[illegible]ö $q_1 + rw_1$, $q_2 + rw_2$ und $q_3 + rw_3$ für x, y [illegible] z in der Ebenengleichung $ax + by + cz = d$ [illegible]setzen und nach r auflösen: $a(q_1 + rw_1) + b(q_2 + rw_2) + c(q_3 + rw_3) = d$
[illegible]		[illegible]
[illegible]ng für r, s und t. [illegible] von r in die [illegible]engleichung g liefert die [illegible]ordinaten des Schnittpunktes bzw. Durchstoßpunktes $S(s_1/s_2/s_3)$.		[illegible]der Gleichung liefert [illegible]ösung für r. Einsetzen von [illegible]ngleichung g liefert die K[illegible] Schnittpunktes bzw. Dur[illegible] $S(s_1/s_2/s_3)$.
Das LGS ist unter[illegible] Lösungsmen[illegible]		Gleichun[illegible]e allgemeing[illegible] der Form 0=0; Lösung[illegible]ie Gerade.
Wid[illegible]st parallel z[illegible] g II E		Widerspruch $\Rightarrow$ [illegible]llel zu E

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Aufgabe 14.3

Gegeben ist die Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Untersuch[illegible] die Lag[illegible]ng von E zu den Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und [illegible] $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, indem Sie die folgenden Rechnungen vervollständigen. B[illegible]ünde[illegible] zunäch[illegible], warum es [illegible]oll ist, hier mit der Koordinatendarstellung der Ebene zu a[illegible] und ze[illegible] Sie durch R[illegible]chnung, dass sich für die Koordinatendarstellung die Gleichung: [illegible]x + 4y + 6z = [illegible] gibt.

Begründung:

_____

_____

Berechnung de[illegible]ord[illegible]darstellung von E:

[illegible]agebeziehung von E und g:

Aus $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ergeben sich die Komponenten: y[illegible] z = [illegible]

Eins[illegible] ___ – ___) + ___(___ + ___) = 9

_____ = 9

9 = 9

[illegible]rgebnis hat die Form 0 = 0, ist also allgem[illegible] ⇒ g liegt [illegible]

Lagebeziehung E und h:

Aus $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ergeben sich die Komponenten: x = _____ y = _____ z = _____

Einsetzen in E ergibt: ___ + ___ + ___(___ – ___) + ___(___ [illegible]) = 9

_____

_____ = ___

_____ = ___

Widerspruch ⇒ g ist [illegible] zu E

Lagebezi[illegible]ng E [illegible]i

Aus [illegible] $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ergeben sich die Komponenten: x = _____ y = _____ z = _____

Einse[illegible]n E ergibt: ___ + ___ + ___(___ – ___) + ___(___ + ___) = 9

_____ = 9

_____ =

_____ = ____

= 4

[illegible] eine Lösung gibt, existiert ein Schnittpunkt.
[illegible]punkt berechnen durch Einsetzen von r in die Gerade[illegible]

$\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \_\_\_\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \_\_\_ \\ [illegible] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ [illegible] \end{pmatrix}$

Die G[illegible] im Punkt S(__ / __/ __).

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

3. Spurpunkte von Geraden

Def.: Spurpunkte S sind die Durchstoßpunkte der Gerade g durch die Koordinatenebenen

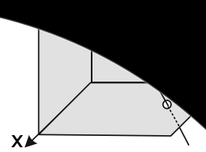
Aufgabe 14.4

Berechnen Sie die Spurpunkte für die Geraden g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [illegible] \\ [illegible] \\ [illegible] \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} [illegible] \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x = [illegible] - r \\ y = 6 - 2r \\ z = -1 + r \end{array}$

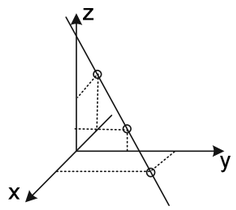
Ermittelt man die Spurpunkte mit [illegible] Koordinatendarstellung der Koordinatenebenen wird die Rechnung besonders einfach, da man die einzelnen Komponenten der Gerade zur Null setzen muss.

Spurpunkt x,y-Ebene	Spurpunkt x,z-Ebene	Spurpunkt y,z-Ebene
Koordinatengleichung: [illegible] 0	Koordinatengleichung: y = 0	Koordinatengleichung: x = 0
z-Koordinate Null setzen:	y-Koordinate Null setzen:	x-Koordinate Null setzen:
$-1 + [illegible] = 0$ $[illegible] = 1$	$6 - 2r = 0$ $r = 3$	$2 - r = 0$ $r = 2$
r in g einsetzen	r in g einsetzen	r in g einsetzen
$\vec{s}_{xy} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} [illegible] \\ [illegible] \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\vec{s}_{xz} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\Rightarrow \quad \vec{s}_{yz} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
Spurpunkt: $S_{xy}(1/4/0)$	Spurpunkt: $S_{xz}(-1/0/2)$	Spurpunkt: $S_{yz}(0/2/1)$

[illegible] Spurpunkte kann man [illegible] räumliche Lage von Geraden besonders anschaulich darstellen:



[illegible] der



Übungen

Ü14.1 Berechnen Sie die Spurpunkte der Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und zeichnen Sie die Gerade so, dass ein räumlicher Eindruck entsteht.

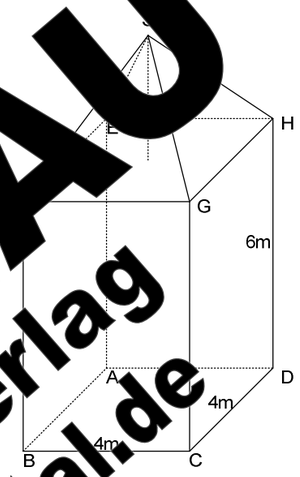
VORSCHAU LehrerSelbstVerlag schuldruckportal.de

Ü14.2 Auf einen Turm, dessen Dach aus einer quadratischen Pyramide besteht (s. Abbildung), treffen Sonnenstrahlen auf.

a) Ermitteln Sie die Koordinaten aller Eckpunkte so, dass der Punkt A im Ursprung des Koordinatensystems steht.

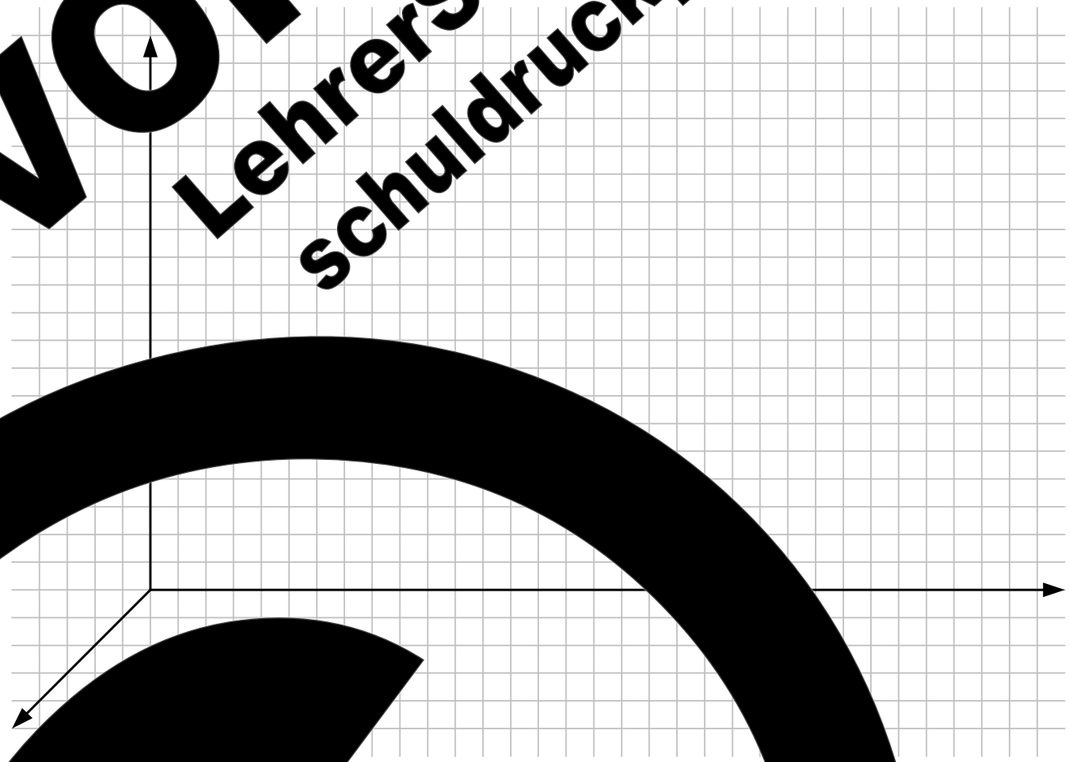
b) Zeichnen Sie ein Schrägbild des Turms. (1m $\hat{=}$ 2 Kästchen)

c) Die Richtung der Sonnenstrahlen wird d[illegible] den [illegible] $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ beschrieben. Auf den [illegible] (x,y-[illegible]e) entsteht dadurch ein Schatten[illegible]itteln [illegible] Eckpunkte der Schattenfläche [illegible]n Bod[illegible]kieren Sie die gesamte Schatten[illegible]che.



A(/ /) B(/ /) C(/ /) D(/ /)

E(/ /) F(/ /) G(/ /) H(/ /) S(/ /)



[illegible]nnungen auf der Folgeseite:

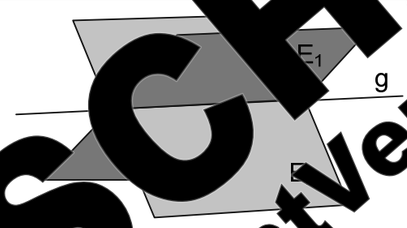
Ergänzen

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

4. Lagebeziehungen bei Ebenen

Bei der Bestimmung der Lagebeziehung von zwei Ebenen sollte man aufgr[und] des Rechenaufwandes darauf achten, dass entweder eine Ebene in K[oordinaten]d[arstellung] oder beide Ebenen in Koordinatendarstellung vorliegen. Damit kann man die [Aufgabenstellung] auf die beiden im Beispiel beschriebenen Fälle reduzieren.

Zwei Ebenen schneiden sich → Es existiert eine Schnittgerade g



Ebene 1 in Koordinatendarstellung
Ebene 2 in Parameterdarstellung

E_1: [3y] [= 36]

$\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\[ ]\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}[ ]\\[ ]\\-1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\0\\[ ]\end{pmatrix}$

$x = 3r + [3s]$

aus E_2 folgt: $y = [2r]$

$z = 3 - r - s$

Einsetzen der Komponenten x,y,z in E_1 ergibt:

$4(3r + 3s) + 3(2r) + 6(3 - r - s) = 36$

nach r oder [s]

[s]

[in] E_2 einsetzen

$\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}9-6r\\0\\-3+2r\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0+3r+9-6r\\0+2r\\3-r-3+2r\end{pmatrix}$

Zusammenfa[ssen]
Summa[nden]
Schri[ttweise]

$\Rightarrow \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix}9\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}$

Ebene 1 in Koordinatendarstellung
Ebene 2 in Koordinatendarstellung

Durch Additionsverfahren x, y oder z eliminieren

E_1: I $x + 2y + 2z = 6$
E_2: II $x - y + z = 3$ | I-II
III $3y + z = 3$

Da das LGS unterbestimmt ist, darf man eine Variable frei wählen. Hier z.B.: $z = 3t$

einsetzen z in III liefert y: $y = 1 - t$

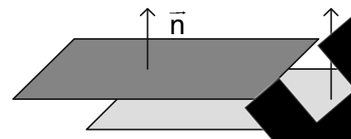
[und] z in II liefert x: $x = 4 - 4t$

Die Ausdr[ücke] [für] x, y und z werden als Vektor dargestellt un[d] [so], dass sich die Parameterdarste[llung] der Schnittgeraden g ergibt.

$\vec{x} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4-4t\\1-t\\3t\end{pmatrix} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-4\\-1\\3\end{pmatrix}$

Zwei Ebenen sind parallel zueinander → Es ergibt sich ein Widerspruch

Die Normalenvektoren der Ebenen sind kollinear und alle Verfahren erzeugen einen Widerspruch bei der Lösung der entsprechenden Gleichung.



Ebene 1 in Koordinatendarstellung
Ebene 2 in Parameterdarstellung

E_1: $2x + y + z = 1$

E_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\1\\[ ]\end{pmatrix}$

$x = -2$[r + 2s]

aus E_2 folgt: $y = 2r + s$

[z = 2 – 2r – s]

Einsetzen der Komponenten x,y,z in E_1 ergibt:

$2(-2[r + 2s]) + [2r + s] + [2 – 2r – s] = 1$

$-4[r + 2s] + 2r + s + 2 - 2r - s = 1$

[0]r [– 3]s + 2 = 1

2 = 1

Ebene 1 in Koordinatendarstellung
Ebene 2 in Koordinatendarstellung

Durch Additionsverfahren x, y oder z eliminieren

E_1: I $x + y + 2z = 6$
E_2: II $2x - y + 4z = 8$ | 2I-II
0

Zwei Ebenen sind identisch → Es ergibt sich eine allgemeingültige Lösung

Die Normalenvektoren der Ebenen sind kollinear und alle drei Verfahren erzeugen allgemeingültige Lösungen. Die Ebenen selbst sind dann Lösungsmenge.

Ebene 1 in Koordinatendarstellung
Ebene 2 in Koordinatendarstellung

E_1

$\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\1\\-5\end{pmatrix}$

$x =$

aus E_2 folgt:

Einsetzen der Komponenten x,y,z in E_1 ergibt:

$2(-$ [r + 2s]$) + $ [s + 1] $+ 2r - 5s = 1$

[$-4r - 4s + 2 + 2r + s + 1 + 2r - 5s = 1$]

$1 = 1$

Ebene 1 in Koordinatendarstellung
Ebene 2 in Koordinatendarstellung

Durch Additionsverfahren x, y oder z eliminieren

E_1: I x
E_2: II $2x - 4$[y] [+ 4z = 8] | 2I-II

0

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Beispiel: Schnitt zweier Ebenen, die zu einer Koordinatenachse parallel verla

Gegeben sind die Ebenen E_1: $2x + y = 7$
E_2: $4x - y = 5$

Zur Er
Wenn d z-K nente in der
benenge h ist die
ne zu nse parallel.

Additionsverfahren: E_2: II $4x - y = 12$ | I

$6x$

x

x in I $3 - y = 5$

3

z frei wählbar: $z = r$

Da die Komponente in keine Gleichung vorkommt, ist das LGS unabhängig von der Wahl für z lösbar. Daher kann man z frei wählen.

ungs $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0 \\ 3+0 \\ 0+r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ Schnittgerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Da die beiden Ebenen parallel zur z-Achse verlaufen, ist auch die Schnittgerade parallel zur z-Achse

Ergä

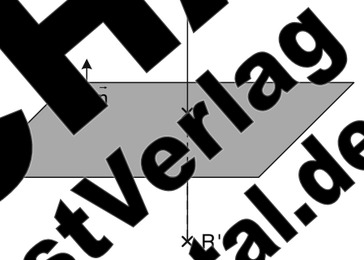
5. Orthogonale Spiegelung eines Punktes an einer Ebene

Aufgabe 14.3

Erarbeiten Sie sich das hier dargestellte Verfahren zur Spiegelung ein ktes R bene E (es gibt auch andere Verfahren, die hier nicht behandelt werden) inde m Beispiel dargestellten Rechenschritte erläutern.

Gegeben sind der Punkt R(4 / –3 / 6) und die
Ebene E: $x - 2y + z = 4$

Gesucht sind die Koordinaten des gespiegelten Punktes R'.



Schritt 1:

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$g: \vec{x}$ +

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Schritt 2:

$4 + t - 2(-3 - 2t) + 6 + t = 4$

$4 + t + 6 + 4t + 6 + t$

$+ 2t\vec{n}$

$\vec{r}' = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-4 \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \end{pmatrix}$

Ergebni

Erg ungen:

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Algebra
selbstorganisiert erlernen

Kap

Abstände

02-031-266

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen 9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen 17

Einführung in die Vektorrechnung

Kapitel 3 – Koordinatensysteme 23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu des Vektoren 25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren 33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Linear[illegible]ation 43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und U[illegible]igkeit 47

Geraden in der Ebene und [illegible] Rau[illegible]

Kapitel 8 – Parameterdarst[illegible]ng von Gera[illegible] 49
Kapitel 9 – Lagebeziehung [illegible] 55
Kapitel 10 – Skala[illegible] 59
Kapitel 11 – V[illegible] od[illegible]reuzpr[illegible]kt 65

Eben[illegible]un[illegible]

Kap[illegible] 12 – D[illegible]llung von Ebenen 69
Kap[illegible] 13 – Be[illegible]dere Ebenen 81
Kapitel [illegible] [illegible]beziehungen bei Ebenen 85
Kapitel 15 – Abstände 99
Kapitel 16 – Schnittw[illegible]el 105
Kapitel 17 – Eben[illegible]scharen 107

Lineare Abbildungen

Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen 119
Kapitel 19 – [illegible] 125
Ka[illegible] 137
[illegible] 143
[illegible]rehungen 145
Kapitel 23 – Verkettung von linearen Abbildungen 149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen Ax = x' 153

Gesa[illegible]bra selbstorganisiert erlernen ([illegible]-031-266)
S[illegible]

[illegible]rbehalten. A[illegible]ghts reserved.
[illegible]k, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
[illegible] aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

[illegible]SelbstVerlag
[illegible]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[illegible]
[illegible]lehrerselbstverlag.de
[illegible]www.f-druck.de

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Kapitel 15: Abstände

1. Abstandsberechnungen Punkt–Ebene

Aufgabe 15.1

Herleitung der Formel zur Abstandsberechnung Punkt–Eben

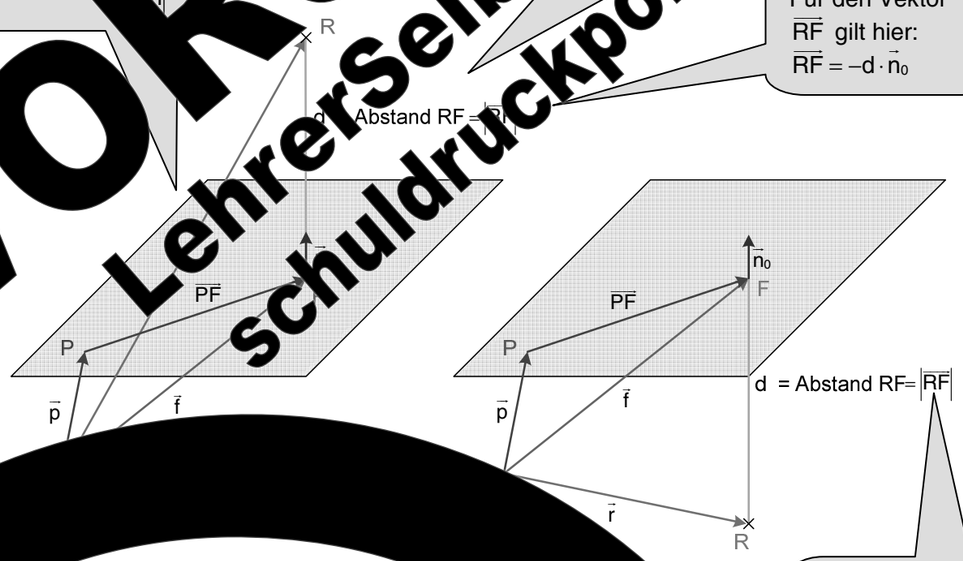
Es gibt unterschiedliche Möglichkeiten den Abstand eines Punktes von einer Ebene E zu berechnen. Die Betrachtungen sollen hier auf die Herleitung der Abstandsformel, die sich in den Tafelwerken befindet beschränkt werden. Verdeutlichen Sie die Herleitung dieser Formel, indem Sie die geforderten Begründungen und Erläuterungen formulieren.

Da E bekannt ist, kennt man auch einen Punkt P auf E und den Normaleneinheitsvektor $\vec{n}_0$.

Erinnerung: $\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$

Die Länge der Strecke $\overline{RF}$ also der Betrag des Vektors $\overrightarrow{RF}$ ist die kürzeste Verbindung von R zur Ebene E und gibt damit den Abstand d von R und E an, wobei F nicht bekannt ist.

Für den Vektor $\overrightarrow{RF}$ gilt hier: $\overrightarrow{RF} = -d \cdot \vec{n}_0$



Für den Vektor $\overrightarrow{RF}$ gilt hier: $\overrightarrow{RF} = d \cdot \vec{n}_0$

1. Begründen Sie, warum gilt: $(\vec{f} - \vec{p}) \cdot \overrightarrow{n_0} = 0$

2. [illegible] kannt. Begründen Sie, warum unabhängig von der Lage des Punktes [illegible]

3. Begründen Sie, warum gilt:

Wenn R und $\vec{n}_0$ auf der gleichen Seite von E liegen, gilt: $\vec{f} = \vec{r} - d\vec{n}_0$.	Wenn R und $\vec{n}_0$ auf unterschiedlichen Seiten von E liegen, gilt: $\vec{f} = \vec{r}$ [illegible]

4. Setzen Sie den unter 3. ermittelten Ausdruck für $\vec{f}$ nur jeweils in den Ausdruck $(\vec{f} - \vec{p}) \cdot \overrightarrow{n_0} = 0$ ein und zeigen Sie durch geeignete Umformungen, dass sich jeweils die beiden angegebenen Beziehungen ergeben:

R liegt oberhalb von E	R liegt unterhalb von E
$d = (\vec{r} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_0$	$d = -(\vec{r} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_0$

5. Begründen Sie, warum man die beiden Ergebnisse zu der folgenden Formel zusammenfassen kann:

Abstand eines Punktes R von einer Ebene E: $d = \left|(\vec{r} - \vec{p}) \cdot \overrightarrow{n_0}\right|$

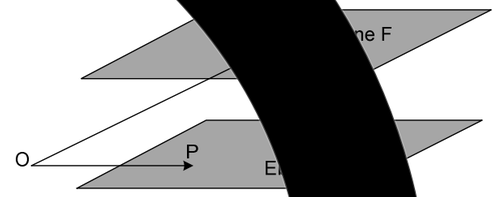
Begründung [illegible]

[illegible] 15.2

[illegible]standsprobleme, die sich auf den Abstand Punkt - Ebene [illegible]lassen

a) Abstand zweier Ebenen

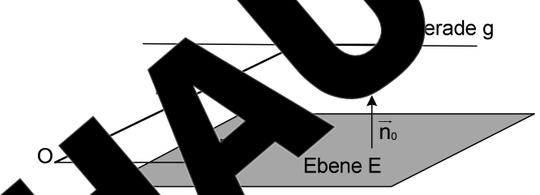
Begründen Sie [illegible]chts, dass die [illegible]nen E und F [illegible]chnung zwi[illegible]ene E ist u[illegible]rmel $d = \left|(\vec{r} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_0\right|$ [illegible]werden kann.



VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

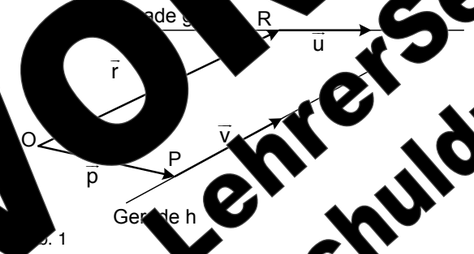
b) Abstand zwischen Ebene und paralleler Gerade

Begründen Sie anhand der Abbildung rechts, dass die Abstandsberechnung der Ebene E und Gerade g identisch mit der Abstandsberechnung zwischen dem Punkt R und der Ebene E ist und somit die Formel $d = \left|(\vec{r} - \vec{p}) \cdot \vec{n_0}\right|$ angewandt werden kann.



c) Abstand zwischen wind[illegible]en Ge

Begründen Sie anhand f[illegible]dungen 1 bis 3, dass man den Abstand zwischen zwei windschiefen G[illegible]mit der Abst[illegible]sformel Punkt-Ebene $d = \left|(\vec{r} - \vec{p}) \cdot \vec{n_0}\right|$ berechnen kann und geben Sie [illegible]e d[illegible]ormale[illegible]nheitsve[illegible]r[illegible] berechnet wird.



[illegible]. 1

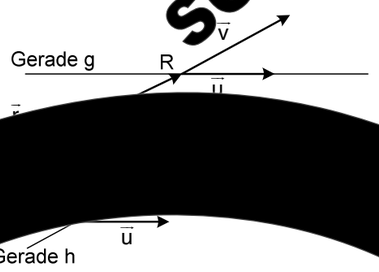
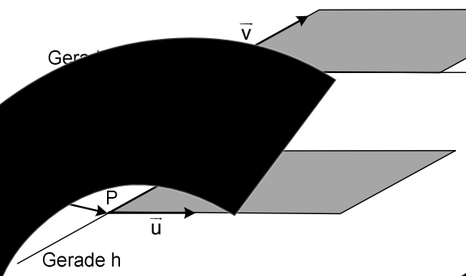


Abb. 2



[illegible]. 3

2. Abstand Punkt–Gerade

Ein klassisches Beispiel hinsichtlich der Berechnung des Abstandes vo[illegible]Punkten[illegible]Gera[illegible]findet sich im Bereich der Flugsicherung. Oft müssen Flugrouten, die im Ide[illegible]Gera[illegible]sehen werden können, in einem bestimmten Abstand von wichtigen Einrichtu[illegible]en, [illegible]ielsweise von Türmen verlaufen. Der Ort der Einrichtung kann dann als Pun[illegible]betrac[illegible]w[illegible]

Aufgabe 15.3

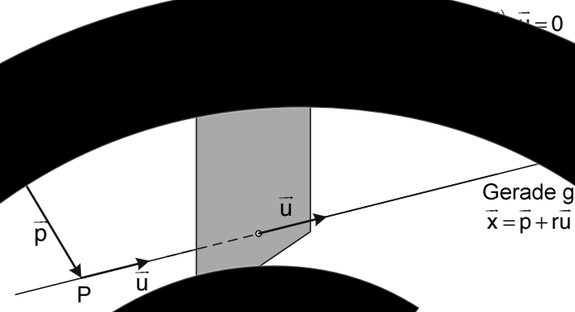
Erarbeiten Sie sich da[illegible]e Verfahre[illegible]Bestimmun[illegible]es Abstands eines bekannten Punktes R v[illegible]beka[illegible]n Gerade g, in[illegible]n S[illegible]as Beis[illegible]ie[illegible]s[illegible]ttweise durcharbeiten und die Texte erg[illegible]n.

Gegeben sind der Punkt R(3/4/4) und die Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Gesucht ist der Abstand des Punktes R von der Geraden g.

Schritt 1:



$$E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

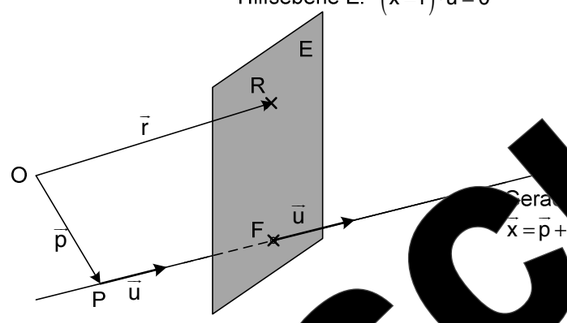
$x - 4y + z = -9$

Mit [illegible]wird eine Hilfsebene E in _____ [illegible]lung durch _____ ermittelt. Der Normalenvektor entspricht dem _____ mit verläuft die Gerade g _____ zur Ebene

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Schritt 2:

Hilfsebene E: $(\vec{x}-\vec{r})\cdot\vec{u}=0$



Gera
$\vec{x}=\vec{p}+s$

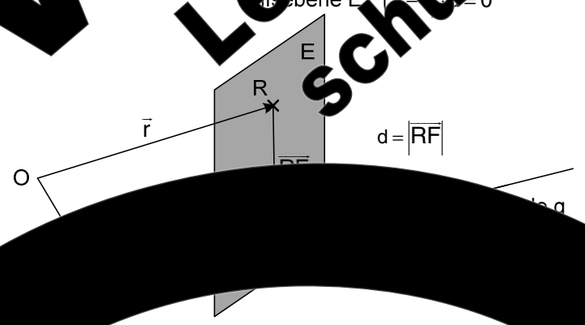
$$\begin{aligned} s-4(\ldots)\ldots+s &= -9 \\ 20+\ldots s+4+s &= -9 \\ 18s &= -36 \\ s &= -2 \end{aligned}$$

$$\vec{f}=\begin{pmatrix}3\\-5\\4\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-2\\-5+8\\4-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$$

Ermitteln des _____ F(3/2) der _____ g durch die Hilfsebene E

Schritt 3:

Hilfsebene E: $(\vec{x}-\vec{r})\cdot\vec{u}=0$



$d=|\overrightarrow{RF}|$

$$d=|\overrightarrow{RF}|=\left|\begin{pmatrix}1-3\\3-4\\2-4\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}-2\\-1\\-2\end{pmatrix}\right|=\sqrt{4+1+4}$$

$d=3LE$

Berechnen _____ von ... Betrag des Vektors $\overrightarrow{RF}$ entspricht dem _____ des Punktes ... de g.

Übungen: _____

Raum für Notizen

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Algebra

selbstorganisiert erlernen

Kap

Schnittwinke

02-031-266

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen 9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen 17

Einführung in die Vektorrechnung

Kapitel 3 – Koordinatensysteme 23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu des Vektoren 25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren 33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Linear ... ation 43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und U... ...igkeit 47

Geraden in der Ebene und ... Rau...

Kapitel 8 – Parameterdarst... ...ng von Gera... 49
Kapitel 9 – Lagebeziehung 55
Kapitel 10 – Skala... 59
Kapitel 11 – V... - od... ...reuzpr... ...kt 65

Eben... ...un...

Kap... 12 – D... ...llung von Ebenen 69
Kap... 13 – Be... ...dere Ebenen 81
Kapitel ... ...beziehungen bei Ebenen 85
Kapitel 15 – Abstände 99
Kapitel 16 – Schnittwinkel 105
Kapitel 17 – Ebenenscharen 107

Lineare Abbildungen

Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen 119
Kapitel 19 – 125
Ka... 137
..... 143
... ...rehungen 145
Kapitel 23 – Verkettung von linearen Abbildungen 149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen Ax = x' 153

Gesa... ...bra selbstorganisiert erlernen (... ...-031-266)
S...

...rbehalten. A... ...ghts reserved.
...k, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
... aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

...SelbstVerlag
...tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ...
...lehrerselbstverlag.de
...www.f-druck.de

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

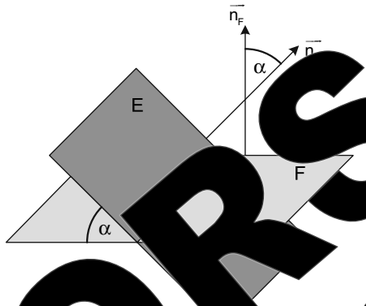
Kapitel 16: Schnittwinkel

Aus Kapitel 10 ist die Berechnung von Schnittwinkeln zwischen zwei Geraden [illegible]its be[illegible]nt. Die Ermittlung von Schnittwinkeln bei Ebenen läuft in der Regel darauf [illegible] die in [illegible]werken angegebenen Formeln richtig anzuwenden.

Aufgabe 16.1

Verdeutlichen Sie sich die gegebenen Formeln anh[illegible] der A[illegible]ge[illegible]d berechnen Sie die geforderten Schnittwinkel.

a) Schnittwinkel zwischen zwei Eben[illegible]

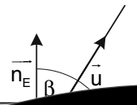


Der Schnittwi[illegible] zwischen de[illegible] Ebenen entspricht dem Schnittw[illegible]el der Normalen[illegible]ektoren.

Schnittwinkel z[illegible]ischen Ebenen: $\cos\alpha = \dfrac{|\vec{n}_E \cdot \vec{n}_F|}{|\vec{n}_E| \cdot |\vec{n}_F|}$

B[illegible]chnen Sie [illegible]en Schnittwinkel zwischen den Ebenen [illegible]: $2x + y + 3z = 4$ und F: $x - 5y = 3$

[illegible]nittwinkel zwis[illegible]en Gera[illegible] [illegible] Ebene



Der Richtungsvektor der Geraden $\vec{u}$ schließt mit dem Normalenvektor der Ebene den Winkel β ein. Es gilt damit:

$$\cos\beta = \frac{|\vec{n}_E \cdot \vec{u}|}{|\vec{n}_E| \cdot |\vec{u}|}$$

[illegible] $\beta = \cos 90° - \alpha = \sin\alpha$, also $\cos\beta = \sin\alpha$ gilt, folgt:

[illegible] $\alpha + \beta = 90° \Rightarrow \alpha = 90° - \beta$

g

zwisch[illegible] Gerade: $\sin\alpha = \dfrac{|\vec{n}_E \cdot \vec{u}|}{|\vec{n}_E| \cdot |\vec{u}|}$

Berechnen Sie den Schnittwinkel zwischen der Ebene E: [illegible] und der Geraden [illegible]

[illegible]de Übungen:_____

Raum für Notizen

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag schuldruckportal.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Algebra
selbstorganisiert erlernen

Kap

Ebenenschare

02-031-266

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen 9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen 17

Einführung in die Vektorrechnung

Kapitel 3 – Koordinatensysteme 23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu des Vektoren 25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren 33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Linear ... nation 43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und U... ...igkeit 47

Geraden in der Ebene und ... Rau...

Kapitel 8 – Parameterdarst... ...ng von Gera... 49
Kapitel 9 – Lagebeziehung 55
Kapitel 10 – Skala... 59
Kapitel 11 – V... - od... ...reuzpr... ...kt 65

Eben... ...un...

Kap... 12 – D... ...llung von Ebenen 69
Kap... 13 – Be... ...dere Ebenen 81
...pitel ... ...beziehungen bei Ebenen 85
...tel 15 – Abstände 99
...l 16 – Schnittw... 105
Kapitel 17 – Eben... ...scharen 107

Lineare Abbildungen

Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen 119
Kapitel 19 – 125
Ka... 137
... . 143
... ...rehungen 145
...tel 23 – Verkettung von linearen Abbildungen 149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen Ax = x' 153

Gesa... ...bra selbstorganisiert erlernen (... ...-031-266)
S...

...rbehalten. A... ...ghts reserved.
...k, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
... aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

...SelbstVerlag
...tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ...
...lehrerselbstverlag.de
...www.f-druck.de

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Kapitel 17: Ebenenscharen

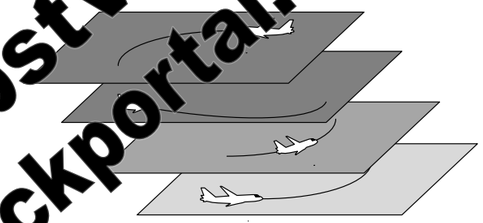
Der Begriff Ebenenschar

Die bisherigen Betrachtungen zu Ebenen haben sich bereits auf L[illegible]hunge[illegible]en Ebenen bezogen. Dieses Kapitel beschränkt sich auf Ebenen, die **parallel z[illegible]na[illegible]liegen)** und auf Ebenen, welche **eine gemeinsame Schnittgerade** besitzen. Da es i[illegible]beiden [illegible]elzahl von Ebenen mit den angegebenen Lagebeziehungen gibt, spricht man hie[illegible] **Eben[illegible]aren**. Man erkennt eine Ebenenschar anhand der Ebenengleichung. Die Ebe[illegible]engleic[illegible]en e[illegible]lten neben den Variablen x, y und z noch einen **Parameter**, wie z.B. den Parame[illegible]

Beispiel für eine Ebenenschar: E_a: $ax + 2a^2$[illegible] $= 12$[illegible]

Ebenenscharen bei parallelen [illegible]en

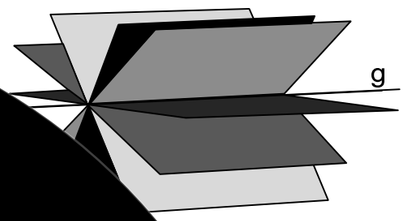
Zur Veranschaulichung findet [illegible] Beispiel aus dem Bereich der Fl[illegible]ich[illegible]. Wen[illegible]ch an einem Flugplatz meh[illegible] Landu[illegible]effende Flugzeuge in Wa[illegible]nleif[illegible] befind[illegible]d eine Kollision der Flugz[illegible]lassen werden soll, kann m[illegible]den [illegible]er Fl[illegible]euge al[illegible] Flugbah[illegible]f pa[illegible]en Ebenen li[illegible] interpr[illegible]en. D[illegible]ilme[illegible] der Eben[illegible], [illegible] de[illegible]en [illegible] Flugba[illegible]n verlaufen kö[illegible]n, bildet [illegible] e[illegible]genan[illegible]e Ebenensc[illegible] D.h., aus de[illegible] u[illegible]llich[illegible] der mögliche[illegible] parallelen Eb[illegible]n gehören nur die Eb[illegible]e zur Ebene[illegible], [illegible]ie [illegible]ie Flugbahnen z[illegible]lassen sind.



Kollisionsfreie Flugbahnen befinden sich auf einer Schar paralleler Ebenen.

Ebenenscharen bei sich sch[illegible]denden Geraden

Alle Ebenen, die als besondere Eigenschaft eine gemeinsame Gerade als S[illegible] haben, werden als E[illegible] gemei[illegible] [illegible] parallelen Ebenen bei den [illegible]en, unter den unendlich vielen Ebenen im [illegible]chel einen Teil von Ebenen, die eine bestimmte Bedingung erfüllen müssen. Diese Teilmenge von Ebenen bezeichnet man dann, wie bei den parallelen Ebenen, als Ebenenschar.



Das Ver[illegible]hörigkeit zu einer Ebenenschar e[illegible], wird in den folge[illegible]d von parallelen Ebenenscharen ve[illegible]

Aufgabe 17.1

Ebenenscharen bei parallelen Ebenen

Die Ebenengleichungen bei einer Ebenenschar haben in der Regel folgendes charakteristisches Aussehen:

E_a: $(1 + 2a)x + (2 + 4a)y - (3 + 6a)z = 1 + a$ mit $a \in IR$

Für jedes $a \in IR$ erhält man eine Ebene, die zur Ebenens[illegible] gehört, wobei man für a = 0 die besonders einfach [illegible]rech[illegible]e Ebene E_0 erhält.

E_0: $x + 2y - 3z = 1$ oder $x +$ [illegible] $3z - 1$

Erläutern Sie für die Ebenenschar E[illegible] $2 + 4a)y - (3 +$ [illegible]$)z = 1 + a$ di[illegible]folgenden Rechenschritte bzw. ergänze[illegible] Lücken im T[illegible]

a) E_a: $(1 + 2a)x + (2 +$ [illegible] $- (3$ [illegible] $6a)z =$ [illegible] a

(1) x [illegible] $+ 4a$ [illegible] $z - 6az - 1 -$ [illegible] _____

_____

(2) [illegible] $+ 2y - 3z - 1 + 2ax$ [illegible] $4ay - 6az - a$ [illegible] _____

_____

(3) $\underbrace{x + 2y - 3z - 1}_{E_0} + a(\underbrace{2x + 4y - 6z - 1}_{E^*}) = 0$ _____

_____

[illegible]e Ebene E* gilt: $2x + 4y - 6z = 1$

[illegible]ne Ebenenschar E_a als [illegible]ion aus der Ebene E_0 und [illegible]ne E* auffassen. Hier gilt: [illegible]*

(4) $\vec{n}_{E}$ [illegible] $\times \vec{n}_{E_0}$

Da die Normalenv[illegible] E_0 und E*

_____ [illegible]en die Ebenen

E_0 und E* nur _____ oder

_____

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag schuldruckportal.de

(5) $\begin{array}{rl} x + 2y - 3z &= 1 \\ \underline{2x + 4y - 6z} &\underline{= 1} \\ 0 &= -1 \end{array}$

Prüfen, ob die Ebe[illegible] paralle[illegible]
Aus dem Widerspruc[illegible]ibt sic[illegible]

E_0 und E^* [illegible]

Zur Information:

Die Ebene E_0 gehört zur Eb[illegible]nschar E_a, da man durch Einsetzen von $a = 0$ die Ebene E_0 erzeugen kann. Di[illegible]ene E^* [illegible] zwar parall[illegible]llen Ebe[illegible] Ebenenschar, geh[illegible]och n[illegible]enschar E_a, da es kein a[illegible] gibt, mit dem sich durch [illegible]setzen [illegible] E_a d[illegible]ene E^* berechnen lässt.

Aufgabe 17.2

Rechner[illegible]erp[illegible]g der Zugeh[illegible]keit einer Eb[illegible] M zu einer parallelen Ebenenschar

Wie in [illegible]gabe 1 [illegible]erdeutlicht wurde, gehört jede E[illegible], die sich durch Einsetzen einer Zahl $a \in IR$ i[illegible]e E[illegible]engleic[illegible]g E_a ergibt, z[illegible]dieser Ebenenschar. Um zu prüfen, ob eine Ebene M ebenfalls zu d[illegible]r S[illegible] muss man [illegible]ne Ebene M [illegible]nformen können, dass sie der Berechnungsvorschrift de[illegible]har ge[illegible]t. Das kan[illegible] dem folgen[illegible]Ansatz überprüft werden:

$$\mathbf{E_a = b \cdot M} \quad \text{mit } b \in IR$$

Beispiel 1:

Die Ebene M: $3x + 6y - 9z = 2$ bzw. $3x + 6y - 9z - 2 = 0$ entsteht durch Einsetzen von 1 in die Ebenenschar E_a aus [illegible]hört damit zur Ebenenschar E_a. Damit muss der Ansatz [illegible]

[illegible]nf Unbekannten, nämlich mit den [illegible] sowie den Parameter[illegible]

[illegible]eichung: $\underbrace{(1 + 2a)x + (2 + 4a)y - (3 + 6a)z - (1 + a)}_{E_a} = \underbrace{[illegible] 2b}$

Die Lösung einer derartigen Gleichung kann mit Hi[illegible]zientenvergleichs s[illegible]rden.

Sch[illegible][illegible]en E_a und $b \cdot M$ übereinander schrei[illegible]

$$\begin{array}{lrcrcrcrl} E_a: & (1 + 2a)x & + & (2 + 4a)y & - & (3 + 6a)z & - & (1 + a) & =0 \\ b \cdot M: & 3bx & + & 6by & - & 9bz & - & 2b & =0 \end{array}$$

Schritt 2: Wenn beide Seiten der Gleichung $E_a = b \cdot M$ identisch sind, dann m[illegible]sen die Koeffizienten identisch sein. Koeffizientenvergleich führt zu einem [illegible]

Koeffizienten von x	I	$1 + 2a = 3b$
Koeffizienten von y	II	$2 + 4a = 6b$
Koeffizienten von z	III	$3 + 6a = 9b$
Ausdruck ohne Variable	IV	$1 + a = 2$[illegible]

Schritt 3: LGS lösen:

I – 2IV $\Rightarrow$ $-1 = -b$ $\Rightarrow$ b[illegible]

b in IV $\Rightarrow$ $a = 1$

a, b in II $\Rightarrow$ $6 = 6$[illegible]

a, b in III $\Rightarrow$ 9[illegible]

Ergebnis: Das LG[illegible]t sic[illegible]widerspruchsfrei löse[illegible]it ist der A[illegible] $E_a = b \cdot M$ erfüllt, und es ist rechne[illegible]en, dass di[illegible]ene M zur E[illegible]nschar E_a gehört.

Beispi[illegible]2:

Hier wir[illegible]t de[illegible]piel 1 e[illegible]n Verfahren d[illegible]s Koeffizientenvergleichs gezeigt, dass die [illegible]e E[illegible]ht zur Ebenenschar E[illegible]gehört, da der Ansatz $E_a = b \cdot E^*$ zu einem Widerspruch führt.

Gleich[illegible] $\underbrace{(1 + 2a)x + (2 + 4a)y - (3 + 6a)z - (1 + a)}_{E_a} = \underbrace{2bx + 4by - 6bz - b}_{b \cdot E^*}$

Auch hier wird die Lös[illegible] mit Hilfe eines Koeffizientenvergleichs schrittweise ermittelt.

Schritt 1: Die Ebenengleichungen E_a und $b \cdot E^*$ übereinander schreiben:

[illegible] $(1 + a) = 0$
[illegible] $b = 0$

[illegible]ide Seiten der Gleichung [illegible]nd, dann müssen die [illegible]oeffizienten identisch sein. Koeffizienten[illegible]em LGS.

Koeffizienten von x	I	$1 + 2a = 2$[illegible]
Koeffizienten von y	II	$2 + 4a = 4b$
Koeffizienten von z	III	$3 + 6a = 6b$
Ausdruck[illegible]	IV	$1 + a = b$

Schritt 3: [illegible]

[illegible]Widerspruch

Erg[illegible] [illegible]as LGS lässt sich nicht widerspruchsfrei lösen. Damit ist der Ansa[illegible] E^* nicht [illegible]erfüllt und es ist rechnerisch nachgewiesen, [illegible]ie Ebene E^* nich[illegible]nschar E_a gehört.

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag schuldruckportal.de

Wenden Sie das Verfahren aus Beispiel 1 und 2 an, um zu zeigen, dass die Ebene [illegible] 2y + 3z = 0 zur Ebenenschar E_a aus Aufgabe 17.1 gehört:

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Aufgabe 17.3

Prüfen Sie, ob es sich bei einer Ebenenschar um eine Schar aus parallelen Eb[illegible] han[illegible]

Erläutern Sie für die Ebene E_a: $(2 + 2a)x + (2 + 2a)y – (3 + 3a)z = 1 + 2a$ [illegible]den [illegible]mungs- und Rechenschritte.

(1) E_0: $2x + 2y – 3z = 1$

(2) E_1: $4x + 4y – 6z = 3$

(3) $\overrightarrow{n_{E_0}} = \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{n_{E_1}} = \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix}$ Da d[illegible] Normalenvektoren von E_0 und E_1 _____ sind, können die Ebenen E_0 und E_1 nur _____ oder _____ sein. Damit ist E_a eine Schar [illegible]eler Ebenen.

Ergänzen Sie: Man prüft, ob es sich bei einer Ebenenschar um eine Schar paralleler Ebenen handelt, indem man die _____vektoren von zwei beliebigen Ebenen der Schar auf [illegible]

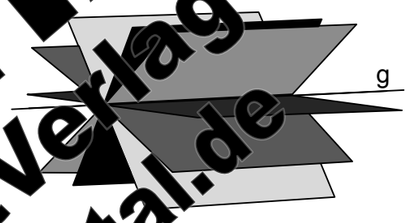
VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Aufgabe 17.4

Ebenenscharen bei Ebenenbüscheln

Grundlegend kann man die bei den parallelen Ebenenscharen erfo[illegible]legung[illegible] auch auf Ebenenbüschel übertragen.

Die Struktur der Gleichung für ein Ebenenbüschel is[illegible] vergleichbar mit der Gleichung für eine Ebenenscha[illegible] parallelen Ebenen. Für $a \in \mathbb{R}$ soll folgendes B[illegible]piel betrachtet werden.



E_a: $(1 - 2a)x + (1 - 3a)y + (1 + a)z = 1 + 2$[illegible]

oder

E_a: $(1 - 2a)x + (1 - 3a)y + (1 +$ [illegible] $(1 +$ [illegible] $=0$

Zeigen Sie durch [illegible]pred[illegible]de U[illegible]ung, da[illegible] auch bei Ebenenbüsch[illegible] [illegible]schar E_a in die Form $E_a = E_0 + aE^*$ umfo[illegible] [illegible]ich damit [illegible]gender Ausdruck

E_a: x [illegible] $z - 1$ [illegible] $-2x - 3y + z - 2) =$

E[illegible] $+ y$[illegible]

E^*: [illegible] $- 3y + z = 2$

Information:
Wie bei parallelen Ebenen gilt auch hier: Die Ebene E^* gehört zwar zum Büschel mit der Trägergeraden g, jedoch nicht zur Ebenenschar E_a.

Raum für Umformungen:

Aufgab[illegible]

R[illegible] **Zugehörigkeit einer Ebene E zu einer** [illegible]**ar**

[illegible]berlegungen hinsichtlich der Überprüfung, ob eine Ebene zu ein[illegible]char gehört, [illegible]n der Betrachtung bei den parallelen Ebenen[illegible]aren auf Ebenenb[illegible]tragen werden. [illegible]d für die Überprüfung auch hier der Ansat[illegible] **M** verwendet [illegible]tehende [illegible]g mit Hilfe eines Koeffizientenvergleic[illegible]

Beispiel 1:

Prüfen Sie, ob die Ebene

M: $-x - 2y + 2z = 3$ bzw. $-x - 2y + 2z - 3 = 0$

zur Ebenenschar E_a gehört.

Der Ansatz $E_a = b \cdot M$ führt, wie bei Scharen paralleler Eb[illegible]n, zu [illegible] Glei[illegible]ng mit fünf Unbekannten, nämlich mit den Variablen x, y und z sowie [illegible] und b, die [illegible]nfalls wieder mit Hilfe eines Koeffizientenvergleichs gelöst werd[illegible]n.

Gleichung: $(1 - 2a)x + (1 - 3a)y + (1 + a)z -$ [illegible] $+ 2a) =$ [illegible] $- 2by + 2bz$ [illegible]

Schritt 1: Die Ebenengleichung[illegible] M übereinande[illegible]schreiben:

E_a: $(1 -$ [illegible] $- 3a)$[illegible] $+ a)z$ [illegible] $(1$ [illegible] $2a)$ $=0$
$b \cdot M$: [illegible] $-bx$ [illegible] $2by$ [illegible] $2bz$ [illegible] $3b$ $=0$

Schritt 2: [illegible] Sc[illegible] der Gleichung $E_a = b \cdot M$ identis[illegible] sind, dann müssen die [illegible]oeffizie[illegible] ide[illegible]sch sein. K[illegible]effizientenvergl[illegible]ch führt zu einem LGS:

[illegible]ffizie[illegible] von x	I	[illegible] $-2a$	$= -b$
K[illegible]ten von y	II	[illegible] $-3a$	$=-2b$
Koeffizienten von z	III	[illegible] $+ a$	$= 2b$
Ausdruck ohne Variable	IV	$-1 - 2a$	$=-3b$

Schritt 3: LGS lösen:

I – IV $\Rightarrow$ $2 = 2b$ $\Rightarrow$ $b = 1$

b in I $\Rightarrow$ $a = 1$

[illegible] Das LGS lässt sich widerspruchsfrei lösen. Da[illegible] $E_a = b \cdot M$ erfüllt, und es ist rechnerisch nachgewiesen, dass die Ebene M z[illegible] E_a gehört.

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag schuldruckportal.de

Beispiel 2:

Die Ebene E* von Aufgabe 17.4 gehört zwar zum Ebenenbüschel mit der Trägergeraden, jedoch nicht zur Ebenenschar E_a, da man durch Einsetzen einer Zahl a die Ebene E* nicht erhält. Zeigen Sie, dass der Ansatz $E_a = b \cdot E^*$ zu einem Widerspruch führt.

Gleichung: $(1 - 2a)x + (1 - 3a)\,y + (1 + a)z - (1 + 2a) = -2b - 3by + z - 2b$

Schritt 1: Gleichungen übereinander schreiben:

E_a: $(1 - 2a)x + (1 - 3a)\,y + (1 + a)z - (1 + 2a) = 0$

$b \cdot E^*$: ____x ____y ____z ____ = 0

Schritt 2: Wenn beide Seiten der Gleichung $E_a = b \cdot E^*$ identisch sind, dann müssen die Koeffizienten identisch sein. Koeffizientenvergleich führt zu einem LGS.

Koeffizienten von x I $1 - 2a = -2b$
Koeffizienten von y II $1 - 3a = -3b$
Koeffizienten von z III $1 + a =$
Koeffizienten von Variable IV $-1 - 2a = -2b$

Schritt 3: LGS lösen:

$$\frac{\text{I}}{\text{IV}} \quad \frac{\text{II}}{\text{IV}} = \frac{\text{III}}{\text{IV}}$$

$$\frac{\text{I}}{\text{IV}} = \frac{\text{II}}{\text{IV}} = \frac{\text{III}}{\text{IV}}$$

$2 = 0 \Rightarrow$ Widerspruch

Ergebnis: Das LGS führt zu einem Widerspruch. Damit ist der Ansatz $E_a = b \cdot E^*$ nicht erfüllt, und die Ebene E* gehört (wie oben schon erläutert) nicht zur Ebenenschar.

Ü17.6

Trägergerade bei einem Ebenenbüschel bestimmen

Für die Bestimmung der Trägergeraden gibt es zwei Verfahren.

Verfahren 1: Die Trägergerade von zwei möglichst einfachen Repräsentanten einer Ebenenschar, beispielsweise die Schnittgerade von E*.

Verfahren 2: Ebenenschar wie in Aufgabe 17.5 in $E_a = E_0$ ermittelt die Schnittgerade von E_0 und E*.

Übungen

Ü17.1 Bestätigen Sie durch Rechnung mit Hilfe von Verfahren 1, dass die Ebenenschar

E_a: $(1 - 2a)x + (1 - 3a)\,y + (1 + a)z = 1 + 2a$ die Trägergerade $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ besitzt.

Ü17.2 Ebenen Ebene $2x + 3y - z = 1$ und F: $x - 2z = 2$ eine Ebene G_a, zu der nicht gehört, und eine Ebenenschar H_a, zu der die Ebene E* gehört.

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag schuldruckportal.de

Ü17.3 Ermitteln Sie die Trägergerade g zur Ebenenschar E_a: (a – 1)x + 2y + (2a + 3)z – 2 mit Hilfe von Verfahren 2, und geben Sie eine Ebene an, welche die Trägergerade g enthält, jedoch nicht zur Ebenenschar E_a gehört. (Zur Kontrolle: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ \\ \end{pmatrix}$

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Übungen: _____

Raum für Notizen

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Alge
selbstorganisiert

Kap

Grundlegendes zu M

02-031-266

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen 9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen 17

Einführung in die Vektorrechnung

Kapitel 3 – Koordinatensysteme 23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu des Vektoren 25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren 33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Linea[r]ation 43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und U[n]gigkeit 47

Geraden in der Ebene und [im] Ra[um]

Kapitel 8 – Parameterdarst[ellu]ng von Gera[den] 49
Kapitel 9 – Lagebeziehung [...] 55
Kapitel 10 – Skala[rpro]dukt 59
Kapitel 11 – V[ektor]- od[er] Kreuzpr[odu]kt 65

Eben[en] [...]un[gen]

Kap[itel] 12 – D[arst]ellung von Ebenen 69
Kap[itel] 13 – Be[son]dere Ebenen 81
Kapitel [...] Beziehun[gen] bei Ebenen 85
Kapitel 15 – Abstände 99
Kapitel 16 – Schnittw[inkel] 105
Kapitel 17 – Eben[en]scharen 107

Lineare Abbildungen

Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen 119
Kapitel 19 – [...] 125
Kapitel [...] 137
..... 143
[...]ehnungen 145
Kapitel 23 – Verkettung von linearen Abbildungen 149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen Ax = x' 153

Gesa[mt] [...]ebra selbstorganisiert erlernen (L[...]-031-266)
S[...]

[...]rbehalten. A[ll] rights reserved.
[...]K, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
[...] aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

[...]SelbstVerlag
[...]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[any]
[...]lehrerselbstverlag.de
[...]www.f-druck.de

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Kapitel 18: Grundlegendes zu Matrizen

Der Begriff der Matrix und die Rechenregeln für den Umgang mit Matrizen wa… ereits … 19. Jahrhundert bekannt. Die Bedeutung der Matrizen für die Anwendung w… jedoch … deutlich. Man kann Matrizen beispielsweise bei der Verschlüsselung bzw. Kodier… …ten, … Beschreibung von Produktions- und Transportprozessen sowie für die Transformation … Ko… …tensystemen bei der Programmierung von Robotersteuerungen und vielem me… …rwend… … dieser Unterlagen wird der Einsatz der Matrizen auf die Anwendung bei lineare… …bildu… und den dazu notwendigen Rechenoperationen für Matrizen beschränkt. Darüb… …inau… …de … …eln und Verallgemeinerungen können Tafelwerken und Schulbüchern entnommen …

Begriff Matrix

Als Matrix bezeichnet man ein Zahlenfeld … m Zeil… …nd n Spalten. Bei linearen Ab…ungen kommen nur Matrizen mit gleiche… …ahl … Zeilen … Spalte… … Man nennt d… Matrizen **quadratische Matrizen**.

Quadratische Mat… … Ebene, als… R^2: $A = \begin{pmatrix} \ldots & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Quad… …atrix … Raum, also i… : $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{13} \\ b_{21} & \ldots & b_{23} \\ \ldots & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$

Di… E…ente einer Matrix A w… …en mit a_{mn} oder für eine …atrix B mit b_{mn} angegeben.
Die **erste Ziffer** gibt die **Zeile** m an.
Die **zweite Ziffer** gibt die **Spalte** n an.

Au… …be 1…

… und Subtrakt… von Matrize…

Ergänzen Sie im folg… …den Beisp… fe… …ende Zahlenwerte, erläutern Sie anschließend, wie man zwei Matrizen addiert.

Addition im R^2 … $\begin{pmatrix} 1+3 & 2+4 \\ \ldots & __ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & __ \end{pmatrix}$

…im R^3 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix} 2 & 4 & __ \\ 3 & __ & __ \\ \ldots & 2 & __ \end{pmatrix}$

Subtraktion im R^3 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ \ldots \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ \ldots 0 & 0 & 1 \\ \ldots & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 & 0-4 & \ldots \\ ____ & ____ & 1- \ldots \\ ____ & ____ & ____ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots & -4 & __ \\ \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots \end{pmatrix}$

Ergä…

… werden addiert bzw. subtrahiert, indem man die an den ents… … Stellen …en ____________________ addiert bzw. sub… …ert.

Aufgabe 18.2

Multiplikation einer Matrix mit einer reellen Zahl r

Verdeutlichen Sie sich die Vorgehensweise am Beispiel und ergänzen S… … der R… …und im Text fehlenden Angaben:

Multiplikation im R^2 $2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & -10 \end{pmatrix}$ oder im R^3 $3 \ldots \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots \\ \ldots & 5 & \ldots \\ \ldots & \ldots & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots & \ldots & __ \\ __ & __ & __ \\ 21 & \ldots & -27 \end{pmatrix}$

Man multipliziert eine Matrix mit einer reellen Zah… … ma… ____________ …ment der Matrix mit der Zahl r __________________.

Aufgabe 18.3

Multiplikation einer Matrix … …inem Vektor

a) Verdeutlichen Sie si… …e Vo… …ensweise am Beis…, …d ergänze… …e die in der Rechnung und im Text fehlenden Ang…

Die Multipl… …on Matrizen mit einem Spalten…ektor entspricht dem Skalarprodukt jede… …eile der Matrix mit dem Spaltenvektor.

…ultip… …ion im R… $\begin{pmatrix} 2 & \ldots \\ 3 & \ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ \ldots 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 + \ldots \\ 3 \cdot 4 + \ldots \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8+6 \\ 12-30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -18 \end{pmatrix}$

Multiplikation im R^3 $\begin{pmatrix} \ldots & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ \ldots \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 \\ 4 \cdot (-1) + __ \cdot 4 + 6 \cdot __ \\ 7 \cdot (-1) + __ \cdot 4 + __ \cdot __ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 8 + __ \\ __ + 20 + 18 \\ __ - __ + __ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 34 \\ -2 \end{pmatrix}$

Eine Matrix A wird mit ein… … multipliziert, indem man jedes Element in einer _________ der Matrix m… … …ie drei Produkte anschließend zeilenweise …

…utlichen Sie sich durch Berechnung des folgenden Pr… … der Multiplikation der Matrix mit einem Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \ldots \end{pmatrix}$ ein lineares Gleichungssystem …

$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & \ldots \\ 3 & \ldots \end{pmatrix} \ldots = \begin{pmatrix} \ldots + z \\ \ldots y + 2__ \\ \ldots ___ + ___ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 2x + \ldots \\ x + 4y + 2\ldots \\ 3x + y + 2z \ldots \end{matrix}$

…urch die Multiplikation entsteht ein Vektor.

D… …chung wi… …nten- we… …t.

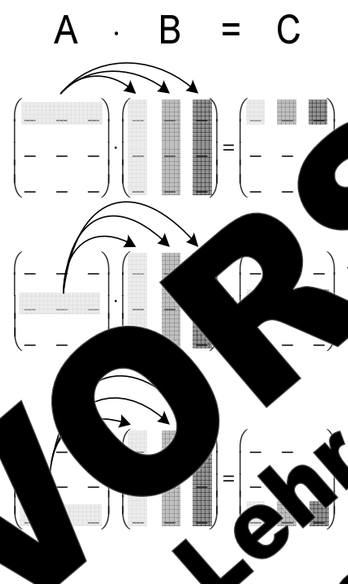
VORSCHAU Lehrerselbstverlag schuldruckportal.de
VORSCHAU Lehrerselbstverlag schuldruckportal.de

Aufgabe 18.4

Multiplikation einer Matrix mit einer Matrix

Verdeutlichen Sie sich anhand der Graphik die Vorgehensweise bei [illegible] quadratischen Matrizen mit drei Zeilen und 3 Spalten und ergänzen Sie im Text fehlende [illegible].

a)



– Das 1. Element der 1. Zeile von C entsteht durch Multiplikation der __ Zeile von A mit der __ Spalte von B.

– Das 2. Element der 1. Zeile von C entsteht durch Multiplikation der _____ von A mit der _____ von B.

– Das 3. Element der 1. Zeile von C entsteht durch Multiplikation der _____ von A mit der _____ von B.

– Das 1. Element der 2. Zeile von C entsteht durch Multiplikation der _____ von A mit der _____ von B.

– Das 2. Element der 2. Zeile von C entsteht durch Multiplikation der _____ von A mit der _____ von B.

– Das 3. Element der 3. Zeile von C entsteht durch Multiplikation der _____ von A mit der _____ von B.

b) Übertragen Sie das Verfahren zur Multiplikation auf 2x2 Matrizen und bestätigen Sie das angegebene Ergebnis für die folgenden Matrizen durch Nachrechnen:

$$\begin{pmatrix} 2 & [illegible] & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

[illegible]gen Sie die angegebenen Ergebnisse d[illegible]d begründen Sie damit, dass für die Matrizenmultiplikation das Kommutativgesetz nicht [illegible]

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ [illegible] & [illegible] & [illegible] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 6 \\ 10 & 2 & 11 \\ 7 & 4 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} [illegible] \\ [illegible] \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} [illegible] \\ [illegible] \\ [illegible] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 7 & 2 \\ 15 & -1 & 7 \\ 9 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

[illegible]trizenmultiplikation ist nicht kommutativ, [illegible]e Produkte A · B _____

_____ _____ _____.

d) Bestätigen Sie mit Hilfe der Matrizen A, B und C, dass das Assoziativgesetz A · (B · C) = [illegible] · C für die Matrizenmultiplikation gültig ist:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot (B \cdot C) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \end{pmatrix}$$

$$(A \cdot B) \cdot C = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & [illegible] \\ [illegible] & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \end{pmatrix}$$

Kontrollergebnis: In beiden Fälle[illegible]e Matrix: $\begin{pmatrix} 19 & [illegible] \\ [illegible] & [illegible] \end{pmatrix}$

Aufgabe 18.5

Berechnen [illegible] Deter[illegible]nte [illegible]er Matrix

Durch [illegible] Be[illegible]ung [illegible] Determinante [illegible]er Matrix wird dieser ein Skalar bzw. Zahlenwert zugeord[illegible] De[illegible]ete Skalar[illegible] enthaltet vielseitig verwendbare Informationen, auf die an dieser [illegible]le jedo[illegible] nicht ausführlich ein[illegible]egangen werden soll. Es wird hier jedoch jeweils an einem Beispiel b[illegible]b[illegible] wie man bei ein[illegible]2x2 Matrix und einer 3x3- Matrix die Determinante berechnen kann.

a) Determ[illegible]ante bei einer [illegible]-Matrix

Anstatt den Ausdruck Det vor die Matrix mit runden Klammern zu schreiben, kann man die Matrix auch mit [illegible]n darstellen. Die Elemente [illegible]nander multipliziert.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

–bc ad

Zeigen Sie, dass sich für die Determinante der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ der [illegible]t.

VORSCHAU Lehrerselbstverlag Schuldruckportal.de

b) Determinante bei einer 3x3-Matrix

Auch hier kennzeichnen die beiden senkrechten Striche, dass die Determinante der Matrix berechnet wird.

Die ersten beiden Spaltenvektoren d… Matrix werden hinte… angehängt.

$$\text{Det A} = \text{Det}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{vmatrix}$$

$-ceg \quad -afh \quad -bdi \quad aei \quad bfg$

$$\text{Det A} = aei + bfg + cdh - ceg - afh$$

Die Elemente unter den diagonalen Linien … multipliziert.

Das Produkt erhält ein **positives** Vorzeichen, wenn von oben links nach unten rechts multipliziert wird.

Das Produkt erhält ein **negatives** Vorzeichen, wenn von oben rechts nach unten links multipliziert wird.

Zeigen Sie, dass die Determinante der Matrix $D = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ den Wert $1^{(*)}$ hat.

(*) Hinweis: Sie werden später in Übung 22.1 lernen, dass die Matrix D eine … Drehmatrix ist. Bei einer linearen Abbildung … hat die Determinante … Drehmatrix immer den Wert 1. (vgl. auch Kapitel … Blick zu Drehung)

Aufgabe 18.6

Besondere Matrizen

a) Die Einheitsmatrix

Die Matrix $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ wird als **Einheitsmatrix E** bezeichnet.

Weisen Sie am folgenden Beispiel nach, dass für die Multiplikation einer Matrix A mit der Einheitsmatrix E gilt: $A \cdot E = A$ und auch $E \cdot A$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Zeigen Sie durch Rechnung, dass für die folgenden Matrizen jeweils gilt: $A \cdot B = E$

$$\begin{pmatrix} 3 & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & 1 & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ -\frac{2}{3} & \_\_ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \_\_ \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 & 4 & \_\_ \\ 31 & -13 & 7 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Die Matrix B wird als **inverse Matrix** zur Matrix A bezeichnet. Man schreibt für B auch A^{-1}.

Für inv…

…enoperationen, hier vor allem das Berechnen von inv… …vertieren von Matrizen), … Regel eines umfangreichen Rechenaufwands bedürfen, ist … Taschenrechner zu …wenden. Erarbeiten Sie sich ggf. mit Hilfe der Bedienungsanleitung … …er Multiplikation von Matrizen Ihren Taschenrechner einsetzen können und wie Sie mit Hilfe … …rechners eine Matrix invertieren kön…

Er… …ungen: _____

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Algebra
selbstorganisiert erlernen

Kap

Projektion

02-031-266

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen 9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen 17

Einführung in die Vektorrechnung

Kapitel 3 – Koordinatensysteme 23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu des Vektoren 25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren 33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Linear[illegible]ation 43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und U[illegible]gigkeit 47

Geraden in der Ebene und [illegible] Rau[illegible]

Kapitel 8 – Parameterdarst[illegible]ng von Gera[illegible] 49
Kapitel 9 – Lagebeziehung [illegible] 55
Kapitel 10 – Skala[illegible] 59
Kapitel 11 – V[illegible] od[illegible]reuzpr[illegible]kt 65

Eben[illegible]un[illegible]

Kap[illegible] 12 – D[illegible]llung von Ebenen 69
Kap[illegible] 13 – Be[illegible]dere Ebenen 81
Kapitel [illegible] [illegible]beziehungen bei Ebenen 85
Kapitel 15 – Abstände 99
Kapitel 16 – Schnittw[illegible]el 105
Kapitel 17 – Eben[illegible]scharen 107

Lineare Abbildungen

Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen 119
Kapitel 19 – [illegible] 125
Ka[illegible] 137
[illegible] 143
[illegible]rehungen 145
Kapitel 23 – Verkettung von linearen Abbildungen 149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen Ax = x' 153

Gesa[illegible]bra selbstorganisiert erlernen ([illegible]-031-266)
S[illegible]

[illegible]rbehalten. A[illegible]ghts reserved.
[illegible]k, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
[illegible] aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

[illegible]SelbstVerlag
[illegible]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[illegible]
[illegible]lehrerselbstverlag.de
[illegible]www.f-druck.de

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Kapitel 19: Projektion

Was man in der linearen Algebra unter einer Projektion versteht, kann man sich nur sehr anschaulich verdeutlichen, wenn man an die Programmierung von Computerspielen denkt. Hier sind beispielsweise Spielabläufe, die im dreidimensionalen Raum stattfinden, auf dem Bildschirm eines Monitors dargestellt werden. Das bedeutet unter Verwendung der Fachsprache, dass der dreidimensionale Raum R^3 auf die zweidimensionale Fläche des Bildschirms, also den R^2, projiziert wird. Um ein möglichst hohes Maß an Anschaulichkeit zu erhalten, werden wir in den ersten Aufgaben nur Projektionen in der Ebene betrachtet.

Aufgabe 19.1

Projizieren Sie die Punkte in der x,y-Ebene in Richtung der zweiten Winkelhalbierenden auf die Gerade g_B: y = 0,5x oder in vektorieller Darstellung $\vec{x} = r\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

a) Erläuterung der Aufgabenstellung

Umgangssprachlich bedeutet das, wie man der Abbildung 19.1 entnehmen kann, dass alle Punkte der Ebene in Richtung der zweiten Winkelhalbierenden, hier die **Bildgerade** g_B, "geworfen", also projiziert werden, bis sie auf der Projektion bzw. "Verschiebung" nicht mehr durch ein Gerade an, die als **Projektionsgerade g_P** bezeichnet wird.

Der Punkt A hat beispielsweise den Bildpunkt A'. Punkte, welche bereits auf der Bildgeraden g_B liegen werden auf sich selbst abgebildet, hier z.B D = D'. Punkte, die auf sich selbst abgebildet werden, nennt man **Fixpunkte**.

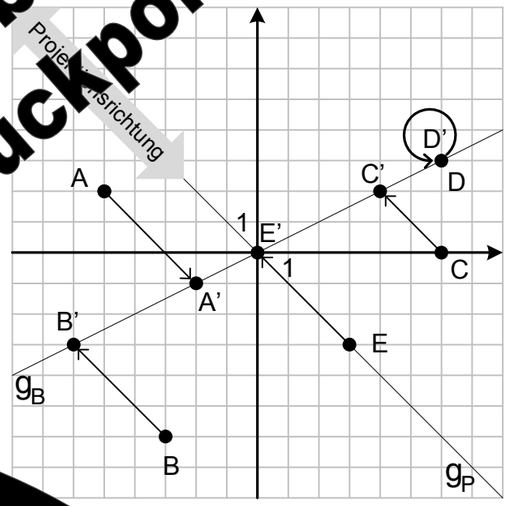


Abb. 19.1

Geben Sie jeweils die Koordinaten der eingezeichneten Punkte an:

A(__ /__) ⟶ A'(__ /__)

B(__ /__) ⟶ B'(__ /__)

C(__ /__) ⟶ C'(__ /__)

D(__ /__) ⟶ D'(__ /__)

E(__ /__) ⟶ E'(__ /__)

Jedem Punkt P(x/y) der Ebene durch Projektion in Richtung der Projektionsgeraden g_P ein Bildpunkt P'(x'/y') auf der Geraden g_B zugeordnet. Man nennt eine solche Zuordnung eine Abbildung der Ebene (also des zweidimensionalen Raumes R^2) auf eine Gerade (also auf den eindimensionalen Raum R^1)

VORSCHAU Lehrerselbstverlag Schuldruckportal.de

b) Ermittlung der Abbildungsvorschrift in Form einer Projektionsmatrix

Schritt 1: Bestimmen der Geradengleichung der Projektionsgeraden g_P, welche die Richtung der Projektion vorgibt

$$g_P: \quad \vec{x'} = \vec{x} + s\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

$$g_P: \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

Ein beliebiger Punkt mit dem Ortsvektor $\vec{x}$ wird auf die Bildgerade projiziert (gestrichelt oben), sodass man den Bildpunkt X' mit dem Ortsvektor $\vec{x'}$ erhält.

Schritt 2: Die in Abb. 19.1 eingezeichnete Projektionsgerade verläuft durch den Punkt E. Der Bildpunkt von E liegt im Schnittpunkt der Projektionsgeraden g_P mit der Bildgeraden g_B, hier also im Ursprung. Wenn Sie die Projektionsgerade durch den Punkt B zeichnen, erkennen Sie, dass der Bildpunkt B ebenfalls im Schnittpunkt der Bildgeraden mit der Projektionsgeraden liegt.

Ergänzen Sie:
Für alle Punkte der Ebene gilt: Der Bildpunkt X' eines beliebigen Punktes X liegt im _____ der Geraden g_P und g_B. D.h. man berechnet X' durch Gleichsetzen der Geraden _____ und _____.

Schritt 3: Gleichsetzen und Berechnung des Parameters s der Projektionsgeraden. Verdeutlichen sich die Rechenschritte und die Unterschiede zur bisherigen Schnittpunktsberechnung bei Bedarf.

$$g_B = g_P$$

$$r\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

Neu:
In der Geradengleichung hat der Stützvektor keine eindeutigen Zahlenwerte, sondern ist variabel.

$$\begin{array}{lll} \text{I} & 2r = x + s & \\ \text{II} & r = y - s & \mid\ \text{I} - 2\text{II} \end{array}$$

Neu:
Der Parameter s nimmt nun keinen Zahlenwert an, sondern ist von x und y abhängig.

Berechnen des von x und y abhängigen Parameters s und Einsetzen von s in die Gleichung der Projektionsgeraden g_P.

$$\vec{x'} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + (-\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}y)\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

zusammenfassen

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y\\ \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x - \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y\\ y + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y\end{pmatrix}$$

$$\vec{x'} = \begin{pmatrix}\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y\\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y\end{pmatrix}$$

Die Matrix $A = \begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$ wird speziell als **Projektionsmatrix** bezeichnet.

$$\vec{x'} = \begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

Der Ausdruck in der Klammer entspricht dem Produkt aus Matrix und dem Vektor. Der Vektor kann ausgeklammert werden.

VORSCHAU Lehrerselbstverlag Schuldruckportal.de

c) Anwenden einer Abbildungsmatrix

Die folgende Aufgabenstellung verdeutlicht die Anwendung der unter b) erhaltenen Projektionsmatrix in Bezug auf die in Abb. 19.1 dargestellten Punkte. Verdeutlichen Sie sich die Vorgehensweise am Beispiel von Punkt A, berechnen Sie anschließend analog dazu die Koordinaten der Bildpunkte von B, C, D und E und vergleichen Sie die Ergebnisse mit der Abb. 19.1.

$A(-5/2) \Rightarrow \vec{a'} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{10}{3} + \frac{4}{3} \\ -\frac{5}{3} + \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ A(__/__)

B(__/__) ⇒ $\vec{b'} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix}$ ⇒ B'(__/__)

C(__/__) ⇒ $\begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix}$ ⇒ C'(__/__)

__ $\vec{\_\_} = \begin{pmatrix} \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix}$ ⇒ __'(__/__) (Fixpunkt)

E(__/__) ⇒ $\vec{\_\_} = \begin{pmatrix} \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix}$ ⇒ __'(__/__)

Vergl[illegible]

Zusammenfassung: Projektion auf eine Gerade im R^2

Mit Hilfe der Gleichu[illegible] kann man bei der Projektion eines [illegible] die Koordinaten des Bildpunktes X[illegible]

De[illegible]

[illegible]ng, die man mit einer Gleichung der Form $A\vec{x} = \vec{x'}$ besc[illegible]nn, wird als [illegible]bildung bezeichnet. Bei einer linearen Abbildung auf eine G[illegible]n die [illegible]te immer auf einer Ursprungsgeraden.

Aufgabe 19.2

Eigenschaften der Projektionsmatrix

Anhand des Beispiels von Aufgabe 19.1 sollen nun wichtige Eigenschaften von Projektionsmatrizen dargestellt und neue Begriffe wie Fixpunkt- und Bildmenge sowie Kern einer Abbildung erläutert werden. Verdeutlichen Sie sich die folgenden Ausführungen und ergänzen Sie ggf. fehlende Angaben.

a) Zeigen Sie durch Berechnung des Produkts $A \cdot A = A^2$, dass gilt: A

$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \end{pmatrix}$

Geometrische Erläuterung:
Eine einmalige Anwendung der M[illegible]en Punkt projiziert bzw. verschiebt diesen Punkt auf die Bildgerade. Alle Punkte auf der Bildgeraden (vgl. Punkte in Abb. 19.1) sind Fixpunkte und werden nicht verschoben. Bedeutet, wenn man die Matrix A zweimal hintereinander erst auf den Punkt und danach auf den Bildpunkt anwendet, wird das Ergebnis der ersten Abbildung nicht mehr verändert.

b) Vergleichen Sie den Richtungsvektor der Bildgeraden mit den Spaltenvektoren der Matrix A und ergänzen Sie den folgenden Satz.

Bildgerade: $g_B: \vec{x} = r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ Abbildungsmatrix: $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Die Spaltenvektoren der Abbildungsmatrix sind linear abhängig und entsprechen dem

_____ der Bildgeraden.

c) Fixpunktme[illegible]

D[illegible] Bedeutung der Begriffe bei einer [illegible]and des Beispiels von[illegible]

[illegible]tz Fixpunktmenge: $A \cdot \vec{x} = \vec{x} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

[illegible]unktmenge liefert [illegible] die bei der [illegible]f sich selbst [illegible]den.

Zu lösendes LGS:

I $\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y = x$
II $\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y = y$

I $-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y = 0$
II $\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y = 0$

Beide Gleichu[illegible]ntisch.
$\Rightarrow x - 2y = 0$

Int[illegible] Ergebnisses: Das Ergebnis ist die Gerade $y = \frac{1}{2}x$ c[illegible] $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Damit entspricht die[illegible]xpunktmenge der [illegible].

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Ansatz Kern: $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Kern liefert als Ergebnis die Menge aller Punkte, die auf den Ursprung abgebildet werden.

Zu lösendes LGS:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y = 0 \\ \text{II} & \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y = 0 \end{array}$$

Beide Gleichungen sind identisch. Umgeformt: $x + y = 0$

Interpretation des Ergebnisses: Das Ergebnis ist die Projektionsgerade $y = -x$ und damit die 2. Winkelhalbierende. Alle Punkte auf der Projektionsgeraden werden in der Projektion auf den Ursprung abgebildet.

Ansatz Bildmenge: $A \cdot \vec{x} = \vec{x}'$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Die Bildmenge ist hier nur bestimmbar, weil alle abgebildeten Punkte auf Bildgeraden liegen, aber keine einheitlich beschreibbare Bildmenge haben.

Zu lösendes LGS:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y = x' \\ \text{II} & \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y = y' \quad \cdot 2 \\ \hline & 0 = x' - 2y' \end{array}$$

Das LGS muss umformen lassen, da auf der linken Seite

Interpretation des Ergebnisses: Das Ergebnis kann zu $y' = \frac{1}{2}x'$ umgeformt werden und entspricht der Fixpunktmenge oder der Menge aller Bildpunkte auf der Bildgeraden.

Übungen

Projizieren Sie die Punkte der x,y-Ebene in Richtung der Geraden $y = -\frac{1}{3}x$ auf die x-Achse.

Führen Sie die Berechnungen im Heft durch.

a) Zeigen Sie anhand einer Zeichnung, dass der Punkt P(–1/2) auf den Punkt P'(5/0) abgebildet wird.

b) Zeigen Sie durch Rechnung analog zur Aufgabe 19.1, dass sich als Projektionsmatrix die

Matrix

gsmatrix A linear abhängig sind und

Richtungsvektor der Bildgera

c) Bestimmen Sie analog zur Aufgabe 19.1 e, den Kern und die Bildmenge bei der Projektion und interpretieren Sie die

Ü19.2 Projizieren Sie die Punkte der x,y-Ebene in Richtung = –x auf die Gerade y = x (orthogonale Fixpunkte). Führen Sie die Berechnungen

a) Zeigen Sie anhand einer Zeichnung, dass der Punkt P Punkt P'(6/6) abgebildet wird und ein Fixpunkt ist.

b) analog zur Aufgabe 19.1, dass jektionsmatrix die

bt.

berprüfen Sie, ob gilt: $A \cdot A = A^2 = A$

Überprüfen Sie, ob die Spaltenvektoren der Abbildungsmatrix A ngig sind und dem Richtungsvektor der Bildgeraden ents chen.

e) Bestimmen Sie analog zur Aufgabe 19 punktmenge, de die Bildmenge bei der Projektion und interpretiere bnisse.

Aufgabe 19.3

Projektionen im Raum

Die Erkenntnisse zur Projektion in der Ebene können im Wesentlichen a um übertragen werden. In der folgenden Aufgabe werden die Punkte des Raumes in Richtung einer Projektionsgeraden g_p auf eine Projektionsebene bzw. Bildebene E_B projiziert. Wie bei den "linearen" Abbildungen ist die Projektionsebene eine Ursprungsebene.

Projektionsebene: $E_B: \vec{x} = r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

oder

$E_B: y - z = 0$

Veranschaulichung der Abbildung im 1. Quadranten:

Projektionsrichtung: g_p:

a) Ermitteln der Projektionsmatrix

Schritt 1: Bestimmen der Gleichung der Projektionsgeraden g_P. Diese Gerade gibt die Verschiebungsrichtung bzw. Projektionsrichtung an, in der ein beliebiger Punkt X(x/y/z) auf die Bildebene bzw. Projektionsebene projiziert (geschoben) wird.

$$g_p: \vec{x}' = \vec{x} + s\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Schritt 2: rchstoßpunkten der Geraden g_p durch die te. Einsetzen von g_p in E_B liefert den

$$\begin{aligned} y - s - z - 2s &= 0 \\ 3s &= y - z \\ s &= \tfrac{1}{3}y - \tfrac{1}{3}z \end{aligned}$$

Schritt 3: Einsetzen von s in die Gerade g_p:

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} x \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + 0 \\ \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z) \\ + 2(\frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y - \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z \\ z + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{Abbildungsmatrix: } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

b) Anwenden der Abbildungsmatrix auf Punkte im Raum

Zeigen Sie, dass der Punkt P(3/9/6) auf den Punkt P'(3/8/8) abgebildet wird, wie der Punkt Q(3/1/1) und alle Punkte R(r/0/0) auf der x-Achse Fixpunkte bei der Abbildung sind.

$$P(3/9/6) \quad \Rightarrow \vec{p}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} \Rightarrow \quad (\_\_/\_\_/\_\_)$$

$$Q(\_\_/\_\_/\_\_) \quad \Rightarrow \vec{q}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} \Rightarrow \quad Q(\_\_/\_\_/\_\_) = Q$$

$$R(\_\_/\_\_/\_\_) \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} \Rightarrow \quad R(\_\_/\_\_/\_\_) = R$$

Aufgabe 19.4

Eigenschaften der Projektionsmatrix

Analog zu den Untersuchungen zu den Eigenschaften von Projektionsmatrizen in der Ebene wird nun die Projektionsmatrix aus Aufgabe 19.3 untersucht.

a) Zeigen Sie durch Berechnung des Produkts $A \cdot A = A^2$, dass auch bei einer Projektion im Raum der Zusammenhang

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} =$$

b) Vergleichen Sie [illegible] der Projektionsebene mit den [illegible]ren der Matrix A und ergänzen Sie:

[illegible]ene: $E_B: \vec{x} = \begin{pmatrix} \_ \\ \_ \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Projektionsmatrix: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Die Spaltenvektoren der Abbildungsmatrix lassen sich in der Form $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und [illegible] darstellen und

sind linear _____. Die Spaltenvektoren entsprechen den [illegible]en der

_____ .

c) Fixpunktmenge, Kern und Bildmenge bei einer Projektion

Die Berechnung von Fixpunktmenge, Kern und Bildmenge erfolgt nach den gleichen Verfahren wie bei der Abbildung in der Ebene. Arbeiten Sie [illegible] beispielhaft durch, und bearbeiten Sie die Aufgaben auf nachfolgende Übungsaufgaben a

Ansatz Fixpunktmenge: A[illegible] $\vec{x} = \vec{x}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & [illegible] \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Zu lösendes [illegible]

$$\begin{array}{lll} \text{I} & x & = x \\ \text{II} & \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z = & y \\ \text{III} & \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z = & z \\ \hline & 0 & = 0 \\ \text{II} & -\frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z = & 0 \\ \text{III} & \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z = & 0 \end{array} \quad \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} \text{II und III sind identisch: } \Rightarrow y - z = 0$$

Interpretation des Ergebnisses: [illegible]n diesem unterbestimmten LGS sind zwei Variablen frei wählbar. Wählt man x = r und z = s ergibt sich aus

$$\vec{x} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ oder nach Umrechnung die Ebene y – z = 0

[illegible]spricht die Fixpunktmenge der Projektions-

[illegible]0

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zu lösendes LGS:

$$\begin{array}{lll} \text{I} & x & = 0 \\ \text{II} & \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z = & 0 \\ & \frac{1}{3}z = & 0 \end{array} \quad \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow x = 0 \\ \\ \text{Beide Gleichungen sind identisch: } \Rightarrow 2y + z = 0 \end{array}$$

Interpretat[illegible] unterbestimmten LGS ist eine Va[illegible]hlbar. Wählt Ergebn[illegible] r, folgt z = –2r. Als Lösungsvektor er[illegible]

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ -2r \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$. Dies entspricht der Projektio[illegible]durch den

Ursprung des Koordina[illegible]ms, d.h. die Bere[illegible] Kerns liefert die Richtung[illegible].

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Ansatz Bildmenge:

$A \cdot \vec{x} = \vec{x'}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Zu lösendes LGS:

I $x = x' \Rightarrow$ x-Achs[e] wird [auf] [sich selbst] abgebildet

II $\frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z = y'$

III $\frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z = z'$ | II – III

$0 = y' - z'$

Links vom Gleichheitszeichen ergibt sich Null.

Interpretation des Ergebnisses: Die Bildmenge entspricht [einer] Fixpunktmenge. Damit handelt es sich bei der linearen Abbildung um eine Projektion.

Aufgabe 19.5

Bedeutung der Einheitsvektoren bei Projektionen

a) Als Projektionsebene wird die Ebene x + y + z = 0 gewählt. Zeigen Sie durch entsprechende Rechnung, dass folgende Abbildungsmatrizen ergeben:

$\begin{pmatrix} 0 & \_ & \_ \\ 0 & 1 & \_ \\ 0 & \_ & \_ \end{pmatrix}$, wenn man in Richtung des Einheitsvektors $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (x-Achse) projiziert.

$\begin{pmatrix} \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, wenn man in Richtung des [Einheitsvektors] $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \_ \end{pmatrix}$ (y-Achse) projiziert.

iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, wenn man in Richtung des Einheitsvektors $\vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (x-Achse) projiziert.

Ergänzen Sie:

Bei der Projektion in Richtung der Einheitsvektoren [mit] enthalten drei Matrizen jeweils eine Spalte mit Nullen auf. Bei Projektion in Richtung des Einheitsvektors $\vec{e_1}$ entspricht die ___ Spalte dem Nullvektor, bei Projektion in Richtung des Einheitsvektors ___ entspricht die 2. Spalte dem Nullvektor. Bei Projektion in Richtung des Einheitsvektors ___ entspricht die ___ Spalte dem Nullvektor.

In Aufgabe 19.4 wurde bei der Projektion auf die Ebene E: y – z = 0 in Richtung der Projektionsgeraden

$g_p: \vec{x'} = \vec{x} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ die Projektionsmatrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ermittelt. Setzt man in der Projektionsgeraden für den Vektor $\vec{x}$ nacheinander die Einheitsvektoren $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ und $\vec{e_3}$ ein und berechnet die Durchstoßpunkte mit der Projektionsebene E, erhält man deren Bilder $\vec{e_1}'$, $\vec{e_2}'$ und $\vec{e_3}'$. Führen Sie [die Rechnungen durch] und ergänzen Sie den nachfolgenden Satz.

i) $\vec{e_1}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ in $E_B \Rightarrow$ $-s - 2s = 0$ $\Rightarrow \vec{e_1}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

ii) $\vec{e_2}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ in $E_B \Rightarrow$ $1 - s - 2s = 0 \Rightarrow s = \frac{\_\_}{\_\_}$ $\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \_ \\ \_ \end{pmatrix} + \frac{\_\_}{\_\_}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

iii) $\vec{e_3}' = \begin{pmatrix} 0 \\ \_ \\ \_ \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ in $E_B \Rightarrow$ _____ $\Rightarrow s = \frac{\_\_}{\_\_}$ $\Rightarrow \vec{e}$ [...] $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

[Die] Einheitsvektoren entsprechen den _____ der Projektionsmatrix. Damit kann man die Projektionsmatrix über die Abbildung der Einheitsvektoren ermitteln.

VORSCHAU Lehrerselbstverlag Schuldruckportal.de

Aufgabe 19.6

Untersuchung auf Existenz einer inversen Matrix bei der Projektion

Aus Aufgabe 18.6 wissen Sie bereits, dass es zu einer Matrix A au[illegible]verse[illegible]ix A^{-1} geben kann und dass gilt: $A \cdot A^{-1} = E$

Aufgrund der Überlegungen aus Aufgabe 19.4 wissen Sie, d[illegible]ei P[illegible]tionen gilt: $A^2=A$.

In den folgenden Rechenschritten werden diese Zus[illegible]ng[illegible]ewandt, u[illegible] untersuchen, ob zu einer Projektionsmatrix A eine inverse Mat[illegible]$^{-1}$ ex[illegible] Erläu[illegible]n Sie die Ze[illegible]2) bis (5) und ergänzen Sie die Lücken im Text.

(1) Wenn A^{-1} existiert gilt: $A \cdot A^{-1} = E$

(2) $A \cdot (A$[illegible]$) = AE$

(3) [illegible]$A) \cdot A^{-1} = A$

([illegible] $A^2 \cdot A^{-1}$

(5) [illegible]t ein Widerspruch zur Zeile (1), da das Produkt einer [illegible]r inversen Matrix die _____ [illegible]eben muss.

Ergebnis: Bei einer Projektion existiert zur Projektionsmatrix [illegible]__ inverse Matrix A^{-1}.

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Raum für Notizen

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Algebra

selbstorganisiert erlernen

Kap

Spiegelung

02-031-266

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen 9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen 17

Einführung in die Vektorrechnung

Kapitel 3 – Koordinatensysteme 23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu des Vektoren 25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren 33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Linear[illegible]ation 43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und U[illegible]gigkeit 47

Geraden in der Ebene und [illegible] Rau[illegible]

Kapitel 8 – Parameterdarst[illegible]ng von Gera[illegible] 49
Kapitel 9 – Lagebeziehung [illegible] 55
Kapitel 10 – Skala[illegible] 59
Kapitel 11 – V[illegible] od[illegible]reuzpr[illegible]kt 65

Eben[illegible]un[illegible]

Kap[illegible] 12 – D[illegible]llung von Ebenen 69
Kap[illegible] 13 – Be[illegible]dere Ebenen 81
Kapitel [illegible] [illegible]beziehungen bei Ebenen 85
Kapitel 15 – Abstände 99
Kapitel 16 – Schnittw[illegible]el 105
Kapitel 17 – Eben[illegible]scharen 107

Lineare Abbildungen

Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen 119
Kapitel 19 – [illegible] 125
Ka[illegible] 137
[illegible] 143
[illegible]rehungen 145
Kapitel 23 – Verkettung von linearen Abbildungen 149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen Ax = x' 153

Gesa[illegible]bra selbstorganisiert erlernen ([illegible]-031-266)
S[illegible]

[illegible]rbehalten. A[illegible]ghts reserved.
[illegible]k, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
[illegible] aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

[illegible]SelbstVerlag
[illegible]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[illegible]
[illegible]lehrerselbstverlag.de
[illegible]www.f-druck.de

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Kapitel 20: Spiegelung

Aufgabe 20.1

Im Rahmen dieser Aufgabe wird entsprechend zur Projektion eine Spiegelmatrix ermittelt und anschließend die Eigenschaften dieser Matrix untersucht.

Wie bei allen "linearen" Abbildungen ist die Ebene, an der gespiegelt wird, eine Ursprungsebene.

Hier wird die Ebene E: x – y = 0 [illegible] u

in Richtung der Geraden g_S : [illegible]

gespiegelt.

Abb. 20.1

a) Ermitteln der Spiegelmatrix

Schritt 1: Bestimmen der Gleichung der Geraden g_S, welche die Richtung der Spiegelung vorgibt.

$$g_S: \vec{x'} = \vec{x} + s\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

Schritt 2: Wie Sie bereits im Kapitel 14 Aufgabe 14.3 gelernt haben, benötigt man zur Berechnung der Koordinaten [illegible] Punktes die Koordinaten des Durchstoßpunktes S ([illegible] die Ebene E. Die Berechnung liefert den Parameter s.

[illegible]: Koordinaten des Spiegelpunktes analog [illegible] berechnen.

$$\vec{x'} = \vec{x} + 2s\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x-2x+2y\\ \\z+2x-2y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x+2y+0\\0+y+0\\2x-2y+z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\\ \\2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Spiegelmatrix}: S = \begin{pmatrix}-1&2&0\\0&1&0\\2&-2&1\end{pmatrix}$$

b) Anwenden der Abbildungsmatrix S auf Punkte im Raum

Zeigen Sie, dass der Punkt P(–2/0/3) auf den Punkt P'(2/0/–1) abgebildet wird, s[illegible] der P[illegible] Q(2/2/3) und alle Punkte R(0/0/r) auf der z-Achse Fixpunkte bei der Ab[illegible]ng sind

$$P(-2/0/3) \quad \Rightarrow \vec{p'} = \begin{pmatrix}-1&2&0\\0&1&0\\2&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\_\_\\\_\_\\\_\_\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\_\_\_\_\_\\\_\_\_\_\_\\\_\_\_\_\_\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\_\_\\\_\_\\\_\_\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \_\_/\_\_/\_\_)$$

$$Q(\_\_/\_\_/\_\_) \quad \Rightarrow \vec{q'} = \begin{pmatrix}-1&2&0\\0&1&0\\2&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\_\_\\\_\_\\\_\_\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\_\_\_\_\_\\\_\_\_\_\_\\\_\_\_\_\_\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\_\_\\\_\_\\\_\_\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \_\_/\_\_) = Q$$

$$R(\_\_/\_\_/\_\_) \quad \Rightarrow \vec{r'} = \begin{pmatrix}-1&2&0\\0&1&0\\2&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\_\_\\\_\_\\\_\_\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\_\_\_\_\_\\\_\_\_\_\_\\\_\_\_\_\_\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\_\_\\\_\_\\\_\_\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \_\_/\_\_) = R$$

Aufgabe 20.[illegible]

Eigenschaften der Spiegelmatrix

Ent[illegible] zu Projektionsmatrizen weisen [illegible] Spiegelmatrizen charakteristische Eigenschaften auf.

a) Wenden Sie die Spiegelmatrix auf den Punkt P' aus Aufgabe 20.1 b) an und ergänzen Sie den folgenden Satz.

$$P'(2/0/-1) \quad \Rightarrow \quad \vec{p''} = \begin{pmatrix}-1&2&0\\ \\ \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\_\_\\\_\_\\\_\_\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\_\_\_\_\_\\\_\_\_\_\_\\\_\_\_\_\_\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\_\_\\\_\_\\\_\_\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad P''(\_\_/\_\_/\_\_) = P$$

[illegible]iche Matrix noch einmal

[illegible]rhält man den _____

[illegible]her gilt bei einer Spiegelung $S \cdot (S \cdot \vec{x}) = S \cdot S \cdot \vec{x} = S^2 \cdot \vec{x} = x$ u[illegible]kt $S \cdot S = S^2$ muss

daher der Zusammenhang $S^2 = E$ erfüllt sein.

Zeigen Sie d[illegible]s $S \cdot S = S^2$ für die Matrix aus [illegible] dass bei einer Spiegelun[illegible]g ist.

$$S^2 = \begin{pmatrix}\\ \\ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-1&2&0\\0&1&0\\2&-2&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1&2&0\\0&1&0\\2&-2&1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-1&2&0\\0&1&0\\2&-2&1\end{pmatrix} =$$

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

b) Fixpunktmenge, Kern und Bildmenge bei einer Spiegelung

Die Berechnung von Fixpunktmenge, Kern und Bildmenge erfolgt nach den [illegible]chen [illegible]ahren wie bei der Projektion. Arbeiten Sie die Beispiele durch, und wenden [illegible] die Ver[illegible] [illegible]achfolgende Übungsaufgaben an.

Ansatz Fixpunktmenge: $S \cdot \vec{x} = \vec{x}$ $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$

Zu lösendes LGS:

$$\begin{array}{lrrrl} \mathrm{I} & & & 2y & \\ & & & y & \\ & 2x & -2y & z & = 2 \\ \hline \mathrm{I} & & & & = 0 \\ & & & 0 & = 0 \\ & 2x & -2y & & = \end{array}$$

und III sind identisch: $\Rightarrow x - y = 0$

Interpretation des Ergebnisses: [illegible] diesem [illegible] sind zwei Variablen frei wählbar. Man erhält als Lösungsvektor eine Ebene, die der Ebene $x - y = 0$ entspricht. Damit entspricht die Fixpunktmenge der Spiegelebene, d.h. alle Punkte auf dieser Ebene werden auf sich selbst abgebildet.

Ansatz Kern: $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$ $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Zu lösendes LGS:

$$\begin{array}{lrrrll} \mathrm{I} & -x & +\ 2y & & = 0 & \\ \mathrm{II} & & y & & = 0 & \Rightarrow \quad y = 0 \\ \mathrm{III} & 2x & -\ 2y & +\ z & = 0 & \end{array}$$

y in I $\Rightarrow \quad x = 0$

[illegible] $\Rightarrow \quad z = 0$

[illegible]nge aller Punkte an, die auf den Urs[illegible]uf den Ursprung gespiegelt werden. Da[illegible]iegelung jedoch nur der Ursprung selbst [illegible]dere Punkt einen vom Ursprung verschied[illegible]hat. Dieses Ergebnis ist daher charakteristisch[illegible]lung.

Ansatz Bildmenge: $A \cdot \vec{x} = \vec{x'}$ $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

Zu lösendes LGS:

$$\begin{array}{lrrrll} \mathrm{I} & -x & +\ 2y & & = x' & \\ \mathrm{II} & & y & & = y' & \\ \mathrm{III} & 2x & -\ 2y & +\ z & = z' & \\ \hline \mathrm{IV} & -x & & & & \\ \mathrm{V} & x & & z & = & \end{array}$$

$z = 2x' - 2y' + z'$

Links vom Gleichheitszeichen ergibt sich durch die Addition nicht Null.

Interpretation des Ergebnisses: Da sich die [illegible]eite des [illegible] nicht so umformen lässt, dass [illegible]ei der Projektion Null ergibt, als [illegible] Ergebnis der Form [illegible] $2x' - 2y' + z$ [illegible]steht, existiert keine Bildmenge. Das [illegible]uch Sinn [illegible] bei einer Spiegelung jeder Punkt individuell auf [illegible] Bildpunkt abgebildet wird und somit keine einheitlich [illegible]eschreibende Bildmenge vorhanden ist.

Aufgabe 20.[illegible]

Unters[illegible] der Exi[illegible]nz einer inv[illegible] Matrix bei der Spiegelung

[illegible] Aufg[illegible] 18.6 wissen Sie bereits, dass es zu einer Matrix A auch eine inverse Matrix A^{-1} geben ka[illegible] gilt: $A \cdot A^{-1} = E$.

Aufgrund der Überlegungen aus Aufgabe 20.2 wissen Sie, dass bei Spiegelungen gilt: $S^2 = E$.

In den folgenden Rechenschritten werden diese Zusammenhänge angewendet, um zu untersuchen, ob zu einer Spiegelmatrix S eine inverse Matrix S^{-1} existiert. Erläutern Sie die Zeilen (2) bis (5) und ergänzen Sie die Lücken im Text.

(1) We[illegible]

$S \cdot (S \cdot S^{-1}) = S \cdot E$

(3)

(4) $S^2 \cdot S^{-1} = S$

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

(5) $E \cdot S^{-1} = S$

oder $S^{-1} = S$

Ergebnis: Wenn eine inverse Matrix existiert, gilt bei einer Spiegelung $S^{-1} = S$

Übungen

Ü20.1 Untersuchen Sie die orthogonale Spiegelung an der Ebene $x - z = 0$ in Ihrem Heft.

a) Zeigen Sie, dass sich als Spiegelmatrix $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ergibt.
b) Zeigen Sie, dass die Eigenschaft $S^2 = E$ erfüllt ist.
c) Zeigen Sie, dass die Fixpunktmenge der Spiegelebene entspricht.
d) Zeigen Sie, dass der Kern der Abbildung dem Nullvektor entspricht.
e) Zeigen Sie, dass keine Bildmenge existiert.

Ü20.2 Zeigen Sie durch Rechnung, dass es sich bei der [illegible] eine orthogonale Spiegelung handelt, indem Sie die Fixpunktmenge, den Kern und die Bildmenge suchen.

Raum für Notizen

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Algebra
selbstorganisiert erlernen

Kap

Zentrische Strec
aus dem Ursprung

02-031-266

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen 9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen 17

Einführung in die Vektorrechnung

Kapitel 3 – Koordinatensysteme 23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu des Vektoren 25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren 33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Linear ... ation 43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und U... ...igkeit 47

Geraden in der Ebene und ... Rau

Kapitel 8 – Parameterdarst... ng von Gera... 49
Kapitel 9 – Lagebeziehung 55
Kapitel 10 – Skala... 59
Kapitel 11 – V... - od... reuzpr... kt 65

Eben... un...

Kap... 12 – D... llung von Ebenen 69
Kap... 3 – Be... dere Ebenen 81
Kapitel ... ...beziehungen bei Ebenen 85
Kapitel 15 – Abstände 99
Kapitel 16 – Schnittw... el 105
Kapitel 17 – Eben... scharen 107

Lineare Abbildungen

Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen 119
Kapitel 19 – 125
Ka... 137
..... 143
... ...rehungen 145
Kapitel 23 – Verkettung von linearen Abbildungen 149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen Ax = x' 153

Gesa... ...bra selbstorganisiert erlernen (... ...-031-266)
S...

...rbehalten. A... ...ghts reserved.
...k, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
... aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

...SelbstVerlag
...tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ...
...lehrerselbstverlag.de
...www.f-druck.de

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Kapitel 21: Zentrische Streckung aus dem Ursprung

Aufgabe 21.1

Eigenschaften von Streckmatrizen bei zentrischer Streckung a[us] dem Urspr[ung]

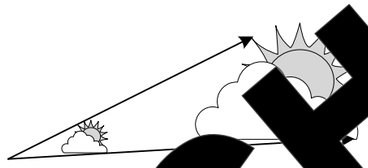


Abb. 21.1

Die Abbildungen 21.1 und 21.2 zeigen jew[eils] zentri[sche] Streckungen von Bildern und Vek[toren]. Sie [haben] bereits, dass man Vektoren durch Mult[iplikation] mit e[iner] reellen Zahl verlängern bzw. verkürzen un[d] die Streckung umkehren kann. Neu ist nun, dass man di[ese] Streckungen Operationen die Bedeutung einer l[inearen] Abbildung z[uge]ordnet und eine Abbildungsmatrix [zu]ordnet.

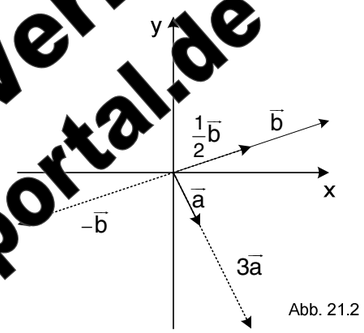


Abb. 21.2

Die folgende Umfor[mung] zeig[t] [die] Herleitung [der] Streckm[atrix] einer Eb[ene]:

a) Überlegen Sie [in] Vorgehensweise auf Vektoren in [der] Ebene und finden Sie [die] entsprechende Streckmatrix a[ls]

Streckmatrix der Ebene:

$$\vec{x}' = u\vec{x} \quad u\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+0 \\ 0+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ux+0 \\ 0+uy \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Streck-}\\ \text{matrix}\\ \text{Ebene}}}\vec{x} \qquad \Rightarrow A = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} u & \_ & \_ \\ \_ & u & \_ \\ \_ & \_ & u \end{pmatrix}$$

_____

[Zei]chnen Sie: Eine Streckmatrix erkennt man da[ran] [dass] [auf] der Diagonalen drei _____

Zahlenwerte stehen und in allen restlichen Feldern eine _[Zahl] steht.

c) Eigenschaften

Verd[eutlichen] Sie [sich] folgenden Angaben, inwiefern das Ergebnis bei einer zentrischen Streckung vom Ursprung von dem Zahlenwert u in der Streckmatrix abhängt.

u < 0 ⇒ Streckung in Richtung des Vektors $\vec{x}$

u = 1 ⇒ A entspricht der Einheitsmatrix und bildet $\vec{x}$ auf sich selbst ab.
Damit liegt für u = 1 keine zentrische Streckung vor.

–1 < u < 1 ⇒ Verkürzung des Vektors

u = 0 ⇒ Abbildung des Vektors $\vec{x}$ auf den Ursprung. In diesem Fall liegt **keine** zentrische Streckung vor.

–1 < u < 0 ⇒ Punktspiegelung am Ursprung mit Verkürzung des Vektors $\vec{x}$

u = –1 ⇒ Punktspiegelung am Ursprung

u < –1 ⇒ Punktspiegelung am Ursprung mit Streckung des Vektors $\vec{x}$

d) Fixpunktmenge, Kern und Bildmenge bei der zentrischen Streckung, [hier] für $u \neq 1$ und $u \neq 0$.

Fixpunktmenge: $A\vec{x} = \vec{x}$ $\quad \begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Lösen des LGS:

$$\left.\begin{aligned} ux &= x \\ uy &= y \\ uz &= z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Interpretation des Ergebnisses: Da die Fixpunktmenge alle Punkte liefert, die auf sich selbst abgebildet werden, kann, wie das Ergebnis zeigt, nur der Ursprung die Fixpunktmenge sein, da nur der Nullvektor wird auf sich selbst abgebildet.

Kern: $A\vec{x} = \vec{0}$ $\quad \begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lösen des LGS:

$$\left.\begin{aligned} ux &= 0 \\ uy &= 0 \\ uz &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Interpretation des Ergebnisses: Es kann nur der Nullvektor auf den Ursprung abgebildet werden. Der Kern ist der Nullvektor, da außer dem Ursprung selbst kein anderer Punkt auf den Ursprung abgebildet wird.

Bildmenge: $A\vec{x} = \vec{x}'$ $\quad \begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

Lösen des LGS:

$$\left.\begin{aligned} ux &= x' \\ uy &= y' \\ uz &= z' \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= \frac{x'}{u} \\ y &= \frac{y'}{u} \\ z &= \frac{z'}{u} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ keine Einschränkungen für x, y und z auf der reellen Zahlenmenge möglich

Interpretation des Ergebnisses: Jeder Punkt hat einen individuellen Bildpunkt. Da keine Einschränkungen vorliegen, ist keine einheitlich anzugebende Bildmenge.

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Algebra

selbstorganisiert erlernen

Kap

Drehungen

02-031-266

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen 9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen 17

Einführung in die Vektorrechnung

Kapitel 3 – Koordinatensysteme 23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu des Vektoren 25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren 33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Linear[illegible]ation 43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und U[illegible]igkeit 47

Geraden in der Ebene und [illegible] Rau[illegible]

Kapitel 8 – Parameterdarst[illegible]ng von Gera[illegible] 49
Kapitel 9 – Lagebeziehung [illegible] 55
Kapitel 10 – Skala[illegible] 59
Kapitel 11 – V[illegible] od[illegible]reuzpr[illegible]kt 65

Eben[illegible]un[illegible]

Kap[illegible] 12 – D[illegible]llung von Ebenen 69
Kap[illegible] 13 – Be[illegible]dere Ebenen 81
Kapitel [illegible] [illegible]beziehungen bei Ebenen 85
Kapitel 15 – Abstände 99
Kapitel 16 – Schnittw[illegible]el 105
Kapitel 17 – Eben[illegible]scharen 107

Lineare Abbildungen

Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen 119
Kapitel 19 – [illegible] 125
Ka[illegible] 137
[illegible] 143
[illegible]rehungen 145
Kapitel 23 – Verkettung von linearen Abbildungen 149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen Ax = x' 153

Gesa[illegible]bra selbstorganisiert erlernen ([illegible]-031-266)
S[illegible]

[illegible]rbehalten. A[illegible]ghts reserved.
[illegible]k, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
[illegible] aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

[illegible]SelbstVerlag
[illegible]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[illegible]
[illegible]lehrerselbstverlag.de
[illegible]www.f-druck.de

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Kapitel 22: Drehungen

Aufgabe 22.1

Die Betrachtung von Drehungen beschränkt sich hier auf die Drehachsen, die Koordinatenachsen. In der folgenden Abbildung ist die Drehachse die z-Achse und zeigt nach vorne, aus der Papierebene heraus. Die Position der Wolke vor und nach der Drehung wird durch die Koordinaten des Punktes X bzw. X' angegeben. Verdeutlichen Sie sich die Herleitung der Drehmatrix bei einer Drehung um die z-Achse, indem Sie die Umformungen erläutern.

$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \Rightarrow x = r\cos\alpha$ $\quad x' = r\cos(\alpha+\varphi)$

$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \Rightarrow y = r\sin\alpha$ $\quad y' = r\sin(\alpha+\varphi)$

$z = z$ $\quad z' = z$

Mit Hilfe der Additionstheoreme (vgl. Tafelwerk)

$\sin(\alpha+\varphi) = \sin\alpha\cos\varphi + \cos\alpha\sin\varphi$

$\cos(\alpha+\varphi) = \cos\alpha\cos\varphi - \sin\alpha\sin\varphi$

ergeben sich folgende Umformungen bei der Herleitung der Drehmatrix um die z-Achse. Erläutern Sie die Schritte (1) bis (4).

(1) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} r\cos(\alpha+\varphi) \\ r\sin(\alpha+\varphi) \\ z \end{pmatrix}$ (1) _____

(2) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} r\cos\alpha\cos\varphi - r\sin\alpha\sin\varphi \\ r\sin\alpha\cos\varphi + r\cos\alpha\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$ _____

(3) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} x\cos\varphi - y\sin\varphi + 0 \\ x\sin\varphi + y\cos\varphi + 0 \\ 0 + 0 + z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Drehmatrix M}} \vec{x} = M\vec{x}$ (3) _____

(4) _____

Wenn man die Betrachtungen zur Herleitung der Drehmatrix um die z-Achse auf Drehungen um die x- und y-Achse überträgt, ergibt sich folgender Überblick über Drehmatrizen:

Drehung um die x-Achse

$$M_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Drehung um die y-Achse

$$M_y = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Drehung um die z-Achse

$$M_z = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 22.2

Berechnen Sie

a) die Drehmatrix bei einer Drehung um 90° um die y-Achse: $M = \begin{pmatrix} \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ \end{pmatrix}$

b) die Drehmatrix bei einer Drehung um 45° um die y-Achse: $M = \begin{pmatrix} \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ \end{pmatrix}$

c) die Drehmatrix bei einer Drehung um 270° um die z-Achse: $M = \begin{pmatrix} \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ \end{pmatrix}$

Aufgabe 22.3

Eigenschaften von Drehmatrizen

Die Betrachtungen zu den Spaltenvektoren von $M_z = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \underbrace{\quad}_{\vec{a}_1} & \underbrace{\quad}_{\vec{a}_2} & \underbrace{\quad}_{\vec{a}_3} \end{pmatrix}$

der Spaltenvektoren

Zeigen Sie anhand der Drehmatrix um die z-Achse durch Berechnung der Länge bzw. der Länge der Spaltenvektoren, dass gilt: **Alle Spaltenvektoren einer Drehmatrix haben die Länge 1**.

$\left|\vec{a}_1\right| = \sqrt{\cos^2\varphi + \ldots}$

$\left|\vec{a}_2\right| = \ldots$

$\left|\vec{a}_3\right| = \ldots$

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

b) Orientierung der Spaltenvektoren

Zeigen Sie anhand der Drehmatrix um die z-Achse durch Berechnung der [illegible]ige bz[illegible]er Länge der Spaltenvektoren, dass gilt: **Alle Spaltenvektoren einer Dre[illegible]rix sin[illegible]e orthogonal.**

Def.: Orthonormale Matrizen

Matrizen, deren Spaltenvektoren normiert und pa[illegible]se zu[illegible]nder orthogonal sind, nennt man orthonormale Matrizen

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = -\cos\varphi\sin\varphi [illegible] \sin\varphi\cos\varphi = 0$$

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} = \_\_\_\_\_ = 0$$

$$\vec{a}_2 \cdot \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{pmatrix} = \_\_\_\_\_ = 0$$

c) [illegible]rechnung des Drehwinkels

Der Drehwinkel lässt sich über die Spur der Matrix berechnen.

Def.: Spur einer Matrix

Die Spur einer Matrix ist die Summe der Elemente in der Diagonalen.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots \\ \dots & a & \end{pmatrix} \qquad \text{Spur } A = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

[illegible]er gilt: $\cos\varphi = \frac{1}{2}$(Spur [illegible] – 1)

Zeigen Sie, dass die Matrix $D = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ eine Drehung [illegible]die z-Achse bewirkt.

d) Fixpunktmenge, Kern und Bildmenge bei Drehmatrizen

Fixpunktmenge: Bei einer Drehmatrix werden nur die Punkte der Drehachse au[illegible] abge[illegible]et. Daher ergibt sich bei der Fixpunktmenge die Drehac[illegible]lso die[illegible]z-Achse als Lösung.

Kern: Der Kern liefert alle Punkte, die auf den Urs[illegible]g abg[illegible]n. Daher liefert der Kern ebenfalls den Nullvektor, da außer [illegible]Urspr[illegible]selbst kein weiterer Punkt auf den Ursprung abgebildet wi[illegible]

Bildmenge: Eine einheitliche Bildmenge ist [illegible]bestimmbar, da[illegible]der Punkt individuell auf einen eigenen Bildpunkt abg[illegible]wird.

Übungen

Ü22.1 Ermitteln Sie für die folgen[illegible]D[illegible]n die Drehmatri[illegible]n. Geben Sie die Werte ggf. in Vielfachen von $\sqrt{2}$ oder $\sqrt{3}$

a) 45[illegible]die z[illegible]se $D = \begin{pmatrix} \_\_ & -\sin & 0 \\ \sin & \cos\_\_ & \_\_ \\ 0 & 0 & \_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{pmatrix}$

[illegible]90° um di[illegible]x-Ac[illegible]e $D = \begin{pmatrix} \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{pmatrix}$

c) [illegible] $D = \begin{pmatrix} \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{pmatrix}$

d) 270° um die z-Achse $D = \begin{pmatrix} \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{pmatrix}$

[illegible]um die z-Achse $D = \begin{pmatrix} \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{pmatrix}$

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Algebra
selbstorganisiert erlernen

Kap

Verkettung vo
linearen Abbildunge

02-031-266

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen 9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen 17

Einführung in die Vektorrechnung

Kapitel 3 – Koordinatensysteme 23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu des Vektoren 25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren 33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Linear ... ation 43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und U ... igkeit 47

Geraden in der Ebene und im Rau

Kapitel 8 – Parameterdarst ... ng von Gera 49
Kapitel 9 – Lagebeziehung 55
Kapitel 10 – Skala 59
Kapitel 11 – V ... - od ... reuzpr ... kt 65

Eben ... un

Kap ... 12 – D ... llung von Ebenen 69
Kap ... 3 – Be ... dere Ebenen 81
Kapitel ... ... beziehungen bei Ebenen 85
Kapitel 15 – Abstände 99
Kapitel 16 – Schnittw ... el 105
Kapitel 17 – Eben ... scharen 107

Lineare Abbildungen

Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen 119
Kapitel 19 – 125
Ka 137
..... 143
... ... rehungen 145
Kapitel 23 – Verkettung von linearen Abbildungen 149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen Ax = x' 153

Gesa ... bra selbstorganisiert erlernen (L ... -031-266)
S ...

... rbehalten. A ... ghts reserved.
... k, auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
... aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

... SelbstVerlag
... tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ ...
... lehrerselbstverlag.de
... www.f-druck.de

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de

Kapitel 23: Verkettung von linearen Abbildungen

Aufgabe 23.1

a) Für ein Computerspiel soll die dreidimensionale Umgebung einer Burganlage auf 25% der ursprünglichen Größe verkleinert und auf die y,z-Ebene des Monitors projiziert werden. Erläutern und ergänzen Sie die nachfolgenden Rechenschritte:

(1) $A = \begin{pmatrix} 0{,}25 & & 0 \\ 0 & & 0 \\ 0 & & \end{pmatrix}$

(2.1) $E_P: \quad x$

$\quad x + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(2.2) $x + r = 0$

$r =$ ___

(2.3)

$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3) P(4/8/12)

$\begin{pmatrix} & & \\ & 0{,}25 & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$= B \cdot \vec{p'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(4) $M = B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}25 \end{pmatrix}$

$M \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{p''}$

(5) $N = A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}25 \end{pmatrix}$

(6) $M \cdot \vec{p} = N \cdot \vec{p} = \vec{p''} \quad \Rightarrow \quad B = B$

b) Für eine andere Sequenz soll die Burganlage um 45° um die z-Achse gedreht und dann in [illegible]e in Richtung der Geraden $\vec{x} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf die y,z-Ebene des Monitors projiziert werden.

Erläutern Sie die nachfolgenden Angaben und Rechenschritte und ergänzen Sie fehlende Angaben:

(1) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ & & \end{pmatrix}$

A

(2.1) $E_P: \quad x = 0$

$g_P: \quad \vec{x'} = \vec{} \begin{pmatrix} 1 \\ & \end{pmatrix}$

([illegible]

___

VORSCHAU LehrerSelbstVerlag Schuldruckportal.de

(2.3)
$$\vec{x'} = \vec{x} - x\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0+0+0\\2x+y+0\\0+0+z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\vec{x}$$

$$\Rightarrow B = \begin{pmatrix}0&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

(3) P(4/8/12)

$$\vec{p'} = A\cdot\vec{p} = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\ \frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\ 0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\8\\12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\sqrt{2}\\6\sqrt{2}\\12\end{pmatrix}$$

$$\vec{p''} = B\vec{p'} = \begin{pmatrix}0&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\sqrt{2}\\6\sqrt{2}\\12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\sqrt{2}\\12\end{pmatrix}$$

(4)
$$M = B\cdot A = \begin{pmatrix}0&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\ \frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\ 0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0\\ \frac{3\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\ 0&0&1\end{pmatrix}$$

$$M\cdot\vec{p} = \begin{pmatrix}0&0&0\\ \frac{3\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\ 0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\8\\12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\sqrt{2}\\12\end{pmatrix} = \vec{p''}$$

$$N = A\cdot B = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\ \frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\ 0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sqrt{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\ \sqrt{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\ 0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B \neq B\cdot A$$

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

c) Ergänzen Sie anhand der Ergebnisse aus (6) in Aufgabenteil a) und (5) in Aufgabenteil b) folgenden Sätze:

Bei einer linearen Abbildung werden, wie im Aufgabenteil a) und b), zwei Abbildungen A und B nacheinander angewendet. Man bezeichnet das als **Verkettung** von A und B. Dabei gilt:

- Die Verkettung zweier linearer Abbildungen kann durch die _____ der beiden Abbildungsmatrizen berechnet werden.
- Es gibt Verkettungen, bei denen die Reihenfolge der Abbildungen keine Rolle spielt. In diesem Fall sind die Ergebnisse der Produkte A · B und B · A _____.
- Es gibt Verkettungen, bei denen die Ergebnisse der Produkte A · B und B · A unterschiedlich sind. Bei diesen Verkettungen ist die Reihenfolge der beiden Abbildungen von _____ Rolle.
- Da es Verkettungen gibt, bei denen A · B = B · A gilt, muss die _____, in der die Abbildungen ausgeführt werden, unbedingt beachtet werden.

Wird die Abbildung A zuerst und die Abbildung B danach durchgeführt wird, gilt für die resultierte Abbildung:

$$\vec{x'} = B\vec{x'} = B(A\vec{x}) = B\cdot A\vec{x} = M\vec{x} \quad \Rightarrow M = \_\_\_\_\_$$

Aus dem Produkt B · A erkennt man, dass zuerst Abbildung A und danach Abbildung B ausgeführt wurde.

Ergänze

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Oberstudienrätin Ursula Pirkl

Lineare Algebra
selbstorganisiert erlernen

Überblick
lineare Abbildungen Ax

02-031-266

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Lineare Gleichungssysteme

Kapitel 1 – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen 9
Kapitel 2 – Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen 17

Einführung in die Vektorrechnung

Kapitel 3 – Koordinatensysteme 23
Kapitel 4 – Grundlegendes zu des Vektoren 25
Kapitel 5 – Rechnen mit Vektoren 33
Kapitel 6 – Lösen von Vektorgleichungen bei Linea[illegible]nation 43
Kapitel 7 – Lineare Abhängigkeit und U[illegible]gigkeit 47

Geraden in der Ebene und [illegible] Rau

Kapitel 8 – Parameterdarst[illegible]ng von Gera[illegible] 49
Kapitel 9 – Lagebeziehung [illegible] 55
Kapitel 10 – Skala[illegible] 59
Kapitel 11 – V[illegible] od[illegible]reuzpr[illegible]kt 65

Eben[illegible]un[illegible]

Kap[illegible] 12 – D[illegible]llung von Ebenen 69
Kap[illegible] 13 – Be[illegible]dere Ebenen 81
Kapitel [illegible] Lagebeziehung[illegible]ei Ebenen 85
Kapitel 15 – Abstände 99
Kapitel 16 – Schnittwinkel 105
Kapitel 17 – Eben[illegible]scharen 107

Lineare Abbildungen

Kapitel 18 – Grundlegendes zu Matrizen 119
Kapitel 19 – [illegible] 125
Ka[illegible] 137
..... 143
[illegible]ehungen 145
[illegible]tel 23 – Verkettung von linearen Abbildungen 149
Kapitel 24 – Überblick lineare Abbildungen Ax = x' 153

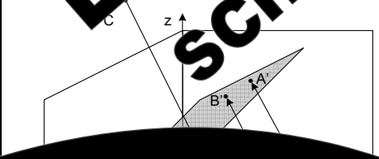
Gesa[illegible]bra selbstorganisiert erlernen (L[illegible]-031-266)
S[illegible]

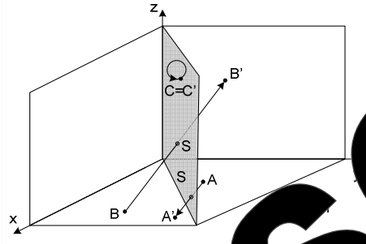
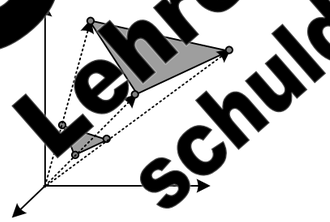
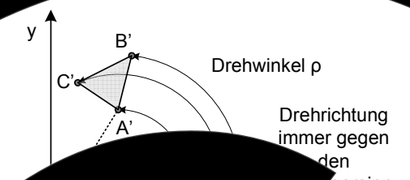
[illegible]rbehalten. A[illegible]ghts reserved.
[illegible], auch auszugsweise, vorbehaltlich der Rechte,
[illegible] aus §§ 53, 54 UrhG ergeben, nicht gestattet.

[illegible]SelbstVerlag
[illegible]tes & Freunde GmbH, Koblenz (Germ[illegible]
[illegible]lehrerselbstverlag.de
[illegible]www.f-druck.de

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Kapitel 24: Überblick lineare Abbildungen $A\vec{x}=\vec{x}'$

Abbildungsart	Darstellung / Informationen	Eigenschaften der Abbildungsmatrizen
Allgemeines	Bei einer "linearen" Abbildung $A\vec{x}=\vec{x}'$ sind Projektionsgeraden und Projektionsebenen sowie Spiegelgeraden und Spiegelebenen immer Ursprungsgeraden bzw. Ursprungsebenen.	Grundlegend zu [illegible], wobei E die Einheitsmatrix ist und zu A inverse Matrix angibt: **[illegible]: $E\cdot A=A\cdot E=E$** **$E\vec{x}=\vec{x}'=\vec{x}$ und $A^{-1}A=E$** **E[illegible]**
Verkettung	Werden zwei Abbildungen nacheinander ausgeführt, wird die gesamte Abbildung durch das Produkt der beiden Abbildungsmatrizen beschrieben. Da im Allgemeinen $A\cdot B\neq B\cdot A$, muss die Reihenfolge der Ausführung beachtet werden!	Es gilt: Matrix A beschreibt die erste Abbildung, Matrix B beschreibt die zweite Abbildung, dann folgt für die Verkettung M: $\mathbf{M=B\cdot A}$
Projektion		1. Eine einmalige Abbildung projiziert jeden Punkt P im Raum auf die Projektionsebene. Alle Punkte P' liegen auf der Projektionsebene und sind Fixpunkte. Es gilt: **1. Abbildung: $\vec{x}'=A\vec{x}$** **2. Abbildung: $\vec{x}''=A\vec{x}'=A(A\vec{x})=A^2\vec{x}$** $\Rightarrow$ $\boxed{A^2=A}$ 2. Es existiert **keine inverse Matrix A^{-1}**. Beweis: Wenn A^{-1} existiert gilt: $A\cdot A^{-1}=E$ $A(A\cdot A^{-1})=AE$ $(AA)\cdot A^{-1}=A$ $A\cdot A^{-1}=A$ $\Rightarrow$ Widerspruch! 3. Die Spalten von A sind linear abhängig. 4. Die Spalten von A liefern die Spannvektoren der Projektionsebene. 5. Die Bilder der Basisvektoren entsprechen den Spaltenvektoren. Ansatz für 1. Spalte: $\vec{x}+s\vec{u}$ etc. 6. Ist ein Spaltenvektor der Nullvektor, so entspricht die Projektionsrichtung der Richtung des entsprechenden Basisvektors.

Abbildungsart	Darstellung / Informationen	Eigenschaften der Abbildungsmatrizen
Spiegelung		1. Wendet man die Abbildung [illegible] mal an, so wird jeder Punkt X' wieder auf den ursprünglichen Punkt X bzw. zurückgebildet bzw. zurückversetzt. **1. Abbildung: $\vec{x}'=A\vec{x}$** **[illegible]: $A\vec{x}'=A(A\vec{x})=A^2\vec{x}=\vec{x}$** $\Rightarrow$ $\boxed{A^2=E}$ 2. Wenn A existiert, gilt bei der Spiegelung: $\boxed{A^{-1}=A}$ Beweis: $A\cdot A^{-1}=E$ $A(A\cdot A^{-1})=AE$ $(AA)\cdot A^{-1}=A$ $A\cdot A^{-1}=A$ $A^{-1}=A$
Zentrische Streckung aus Ursprung		Die Streckmatrix hat immer die Form: $A=\begin{pmatrix}u&0&0\\0&u&0\\0&0&u\end{pmatrix}$ und $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{u}&0&0\\0&\frac{1}{u}&0\\0&0&\frac{1}{u}\end{pmatrix}$ Das Abbildungsergebnis ist abhängig von u: $u>1$ $\Rightarrow$ Streckung in Richtung von $\vec{x}$ $0<u<1$ $\Rightarrow$ Verkürzung $-1<u<0$ $\Rightarrow$ Spiegelung mit Verkürzung $u=-1$ $\Rightarrow$ Punktspiegelung am Ursprung $u<-1$ $\Rightarrow$ Spiegelung mit Streckung
Drehung		[illegible]r für Drehung um die [illegible] Form: $M_z=\begin{pmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi&0\\\sin\varphi&\cos\varphi&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos-\varphi&\sin\varphi&0\\-\sin\varphi&\cos-\varphi&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 2. Spaltenvektoren [illegible]nge 1. 3. Spaltenvektoren sind [illegible] orthogonal. 4. Drehwinkel $\cos\alpha=\frac{1}{2}(\text{Spur } A-1)=\frac{1}{2}(a_{11}+a_{22}+a_{33}-1)$ 5. Zusatzinformation: Determinante gilt:

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Die Ergebnisse der Berechnung der Fixpunktmenge, des Kerns und der Bildmenge liefern für jede Abbildung charakteristische Ergebnisse.

Abbildungsart	Fixpunktmenge $A\vec{x} = \vec{x}$	Kern $A\vec{x} = \vec{0}$	Bildmenge $A\vec{x} = \vec{x}'$
Definitionen	Die Fixpunktmenge liefert alle Punke, die bei der Abbildung auf sich selbst abgebildet werden.	Der Kern liefert als Ergebnis die Menge aller Punkte, die auf den Ursprung abgebildet werden.	Die Bildmenge ist nur bestimmbar, wenn der Ort der abgebildeten Punkte auf einer Geraden oder einer Ebene liegt.
Ergebnisse bei der Projektion	**Projektionsebene** <u>Erläuterung:</u> Bei der Projektion ist der im R^3 die Ebene, im R^2 die Gerade, auf welche die Punkte des Raumes bzw. der Ebene projiziert werden, auf die Projektionsebene bzw. -gerade selbst abgebildet und bilden daher die Fixpunktmenge.	**Projektionsgerade durch den Ursprung** <u>Erläuterung:</u> Alle Punkte, die auf der Projektionsgeraden durch den Ursprung liegen, werden auf den Ursprung abgebildet.	**Projektionsebene** <u>Erläuterung:</u> Das Ergebnis ist identisch mit der Fixpunktmenge, da die Bildmenge aller Bildpunke auf der Projektionsebene liegen. Der Ansatz $A\vec{x} = \vec{x}'$ führt auf ein LGS, bei dem durch entsprechende Addition auf der linken Seite 0 entstehen muss. Auf der rechten Seite ergibt sich dann die Gleichung der Projektionsebene.
Ergebnisse bei der Spiegelung	**Spiegelebene** <u>Erläuterung:</u> Alle Punkte auf der Spiegelebene werden auf sich selbst abgebildet und gehören damit zur	**Ursprung O(0/0/0)** <u>Erläuterung:</u> Alle Punkte außerhalb von E werden auf einen individuellen Punkt außerhalb von E abgebildet. Die Punkte auf E sind Fixpunkte. Damit wird nur der Ursprung auf den	**existiert nicht** <u>Erläuterung:</u> Jeder Punkt, außer den Fixpunkten auf der Spiegelebene, hat einen individuellen Bildpunkt. Damit kann man keine Ebene oder Gerade als Bildmenge bestimmen. Bei der Rechnung lässt sich die linke Seite des LGS nicht auf Null bringen.
Ergebnisse bei der zentrischen Streckung	**Ursprung O(0/0/0)** <u>Erläuterung:</u> Nur	**Ursprung O(0/0/0)** <u>Erläuterung:</u> Nur der Ursprung wird auf den Ursprung abgebildet.	**existiert nicht** <u>Erläuterung:</u> Jeder Punkt hat einen individuellen Bildpunkt.
Ergebnisse bei der Drehung	**Ursprung O(0/0/0)** <u>Erläuterung:</u> Alle Punkte auf der Drehachse sind Fixpunkte.	**Ursprung O(0/0/0)** <u>Erläuterung:</u> Nur der Ursprung wird auf den Ursprung abgebildet.	**existiert nicht** <u>Erläuterung:</u> Jeder Punkt hat einen individuellen Bildpunkt.

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
Schuldruckportal.de

Umschlag Rückseite (Innen)

(unbedruckt)

Hier können Sie noch Vorlagen einfügen

VORSCHAU
Lehrerselbstverlag
Schuldruckportal.de

VORSCHAU
LehrerSelbstVerlag
schuldruckportal.de